УДК 551.5.001.57

Б.А. Каргин

Новый подход к стохастическому моделированию задач атмосферной оптики

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию 5.10.2005 г.

Рассматриваются вопросы статистического моделирования переноса оптического излучения в стохастических рассеивающих и поглощающих средах. Предполагается, что пространственные вариации оптических параметров этих сред имеют случайный характер. Представлен весовой алгоритм, позволяющий оптимизировать моделирование. В данном подходе случайные траектории строятся для детерминированной среды, а случайные вариации оптических параметров учитываются при помощи вычисления специальных весовых множителей. В целом ряде практически важных задач оптики стохастических сред алгоритм допускает простое численное, а иногда и аналитическое интегрирование соответствующих случайных оценок, необходимое для вычисления средних характеристик поля излучения. Разработанный алгоритм позволяет строить численные модели поля электромагнитного излучения в случайно-неоднородных средах и ориентирован преимущественно на решение задач переноса солнечной радиации в стохастической сплошной облачности.

Введение

Известно, что в приближении геометрической оптики перенос оптического излучения в поглощающих и рассеивающих средах может быть описан интегральным уравнением [1]:

$$f(\mathbf{x}) = \int_X k(\mathbf{x}',\mathbf{x}) f(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' + \psi(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

где $f(\mathbf{x})$ — плотность столкновений; $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ и $\mathbf{x}' = (\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}')$ — точки фазового пространства $X = \{\mathbf{r} \in R \subset R^3,\ \boldsymbol{\omega} = (a,b,c) \in \Omega : (a^2+b^2+c^2=1)\}$; $\psi(\mathbf{x})$ — плотность распределения источников; $\int_X \psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$. Точный вид ядра $k(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ в уравнении (1) определяется типом задачи и граничными условиями. Задача заключается в оценке линейных функционалов вида

$$I_\varphi = (f,\varphi) = \int_X f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad (2)$$

где $\varphi(\mathbf{x}) \ge 0$ — так называемая «аппаратная функция», определяющая вид вычисляемой характеристики оптического поля. Вычисление функционалов I_φ методом Монте-Карло связано с моделированием однородных цепей Маркова, состояниями которой является последовательность $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ такая, что начальное состояние определяется плотностью $r_0(\mathbf{x})$, а переход из состояния $\mathbf{x}_{i-1}$ в состояние $\mathbf{x}_i$ определяется плотностью перехода $r(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i)$. Если

$$r_0(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \text{ и } r(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_i) = k(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{x}_i),$$

то цепь $\{\mathbf{x}_n\}$ является «физической» цепью столкновений и соответствующий метод моделирования называется «аналоговым» или «физическим». В этом случае

$$I_\varphi = M\xi,\ \ \xi = \sum_{n=0}^{N} \varphi(\mathbf{x}_n),$$

где N — случайный номер обрыва цепи; M — символ математического ожидания. В случае неаналогового моделирования вычисляется случайный вес:

$$Q_n = Q_{n-1}\frac{k(\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)}{r(\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)},\ \ Q_0 = \frac{\psi(\mathbf{x}_0)}{r_0(\mathbf{x}_0)} \qquad (3)$$

с условиями $r_0(\mathbf{x}) \ne 0$ при $\psi(\mathbf{x}) \ne 0$ и $r(\mathbf{x}',\mathbf{x}) \ne 0$ при $k(\mathbf{x}',\mathbf{x}) \ne 0$, и для функционала I_φ вычисляется несмещенная случайная оценка

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} Q_n \varphi(\mathbf{x}_n), \qquad (4)$$

так, что $M\xi = I_\varphi$. Общая теория постороения эффективных «весовых» оценок вида (4) представлена в [2].

Рассмотрим теперь стохастическую задачу, в которой один или несколько параметров $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s)$, от которых зависит ядро $k(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ и плотность столкновений $f(\mathbf{x})$, являются случайными функциями пространства (случайными полями). Задача решается путем вычисления случайных величин $\xi(\omega, \sigma)$, заданных на траекториях ω моделируемого случайного процесса, таких, что

$$M\xi[(\omega,\sigma)|\sigma] = I_\varphi(\sigma).$$

Траектории ω зависят от σ. Искомый функционал определяется как

$$I = \langle I_\varphi(\sigma)\rangle,$$

где $\langle\rangle$ обозначает статистическое осреднение по распределению случайного поля σ. Одной из наиболее важных стохастических задач атмосферной оптики является моделирование процесса переноса солнечного излучения в облачной атмосфере. Важность этой задачи обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, облака, которые всегда присутствуют над большей частью поверхности Земли, являются одним из основных факторов, определяющих перенос излучения в системе «атмосфера – подстилающая поверхность» и приток солнечной энергии к поверхности Земли. И, во-вторых, любая облачность имеет стохастическую структуру, более или менее точное описание которой может быть построено только с помощью статистического моделирования. Эта работа посвящена рассмотрению некоторых вопросов, связанных с применением статистического моделирования к решению этой стохастической задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс переноса частиц (фотонов) в фазовом пространстве $X = R \times \Omega$, $\mathbf{x}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \in X$ координат $\mathbf{r} \in R = (-\infty, \infty)\times[h, H]$ и направлений $\boldsymbol{\omega}(\mu,\varphi) \in \Omega = [-1, 1]\times[0, 2\pi]$. Единичный вектор $\boldsymbol{\omega}$ $(|\boldsymbol{\omega}| = 1)$ направления движения частицы определяется величинами $\mu = \cos\theta$ и φ. Здесь θ – угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью OZ, φ – азимутальный угол, т.е. угол между осью OX и вектором $\boldsymbol{\omega}_\perp$ – проекцией $\boldsymbol{\omega}$ на плоскость $z = 0$, а Ω_- и Ω_+ – пространства единичных векторов $\boldsymbol{\omega}$, для которых соответственно $\mu \in [-1, 0]$ и $\mu \in [0, 1]$.

Воздействие рассеивающей и поглощающей среды на перенос фотонов определяется макроскопическими сечениями рассеяния $\Sigma_s(\mathbf{r})$, поглощения $\Sigma_a(\mathbf{r})$ и индикатрисы рассеяния $g(\mathbf{r},\tilde{\mu})$, где $\tilde{\mu} = (\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega})$ – косинус угла между направлениями $\boldsymbol{\omega}'$ и $\boldsymbol{\omega}$ движения частицы до рассеяния и после рассеяния соответственно. Функция $g(\mathbf{r},\tilde{\mu})$ такова, что

$$\int_{-1}^{+1} g(\mathbf{r},\tilde{\mu})\,d\tilde{\mu} = 1.$$

В дальнейшем будем использовать величины

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \Sigma_a(\mathbf{r}) + \Sigma_s(\mathbf{r})$$

– макроскопическое сечение ослабления,

$$q(\mathbf{r}) = \Sigma_s(\mathbf{r})/\Sigma(\mathbf{r})$$

– альбедо однократного рассеяния (вероятность «выживания» частицы при столкновении) и

$$\tau(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \int_0^l \Sigma(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}s)\,ds$$

– оптическая длина пути между точками $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, где

$$l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,\quad \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Источником частиц в нашем случае является мононаправленный бесконечно широкий поток фотонов, падающий на верхнюю границу рассеивающего слоя $z = H$. Такой источник описывается функцией $S(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega}) = \pi S_0\delta(z - H)\delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)$, где πS_0 – солнечная постоянная для рассматриваемой длины волны; $\boldsymbol{\omega}_0$ – единичный вектор направления солнечного излучения, падающего на границу слоя.

В этих условиях в уравнении (1) имеем

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega}) = \pi S_0\delta(z - H)\delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)$$

и ядро уравнения (1) имеет вид [1]:

$$k(\mathbf{r}',\boldsymbol{\omega}' \to \mathbf{r},\boldsymbol{\omega}) = \frac{q(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}',(\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega}))}{2\pi}\times$$
$$\times\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\Sigma(\mathbf{r})e^{-\tau(\mathbf{r}',\mathbf{r})}\delta\left(\boldsymbol{\omega} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right). \qquad (5)$$

Когда переходим к стохастической задаче, то предполагаем, что один или несколько (в любом сочетании) исходных оптических параметров в выражении (5) – $q(\mathbf{r})$, $\Sigma(\mathbf{r})$ и $g(\mathbf{r},\tilde{\mu})$ – являются случайными функциями пространства. Эти функции в предыдущем разделе обобщенно обозначены через σ.

Таким образом, мы ограничиваемся в дальнейшем рассмотрением статистического моделирования процесса переноса излучения в изолированной стохастической облачности без учета процессов рассеяния и поглощения в надоблачной и подоблачной атмосфере. Отметим, что радиационная модель изолированной облачности может быть легко встроена в радиационную модель аэрозольной атмосферы, основанную на уже применяемой в вычислительной практике автоматизированной системе статистического моделирования задач атмосферной оптики [3].

Весовой алгоритм стохастического моделирования

Стандартный подход к решению указанной выше стохастической задачи основывается на методе «двойной рандомизации» (см., например, [1]), вытекающем из соотношения

$$\langle I_\varphi(\sigma)\rangle = \langle M_\omega[\xi(\omega,\sigma)|\sigma]\rangle = M_{(\omega\sigma)}\xi(\omega,\sigma),$$

где через ω обозначена случайная траектория цепи Маркова. В этом случае алгоритм вычисления I включает в себя:

1. Построение реализаций случайного поля σ.

2. Моделирование для каждой реализации σ $n(n \ge 1)$ условно-независимых траекторий марковской цепи ω.

3. Вычисление соответствующих случайных оценок $\xi(\omega,\sigma)$.

При таком подходе возникают принципиальные вычислительные трудности, приводящие к сильному увеличению времени вычислений в сравнении с аналогичной детерминированной задачей. Основная сложность связана с моделированием траекторий фотонов в случайно-неоднородной трехмерной среде. А именно: при каждом моделировании очередной точки столкновения приходится решать трудоемкую задачу численного анализа — определения решения уравнения относительно величины l

$$\int_0^l \Sigma(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} s)ds = -\ln\alpha, \qquad (6)$$

где α — случайное число, распределенное равномерно на интервале (0, 1). Для решения этого уравнения обычно прибегают к той или иной дискретной аппроксимации случайной функции $\Sigma(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} s)$, $s \ge 0$. В общем случае такой подход может приводить к неконтролируемым ошибкам определения искомого решения уравнения (6). Уменьшение шага аппроксимации h_s функции $\Sigma(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} s)$ вдоль направления $\boldsymbol{\omega}$ с целью увеличения точности аппроксимации неизбежно приводит к росту числа арифметических операций, требуемых для определения корня уравнения (6) со скоростью, пропорциональной величине $1/h_s$. Все это делает вышеуказанный естественный подход моделирования траекторий фотонов в случайно-неоднородных средах трудноприменимым в целом ряде практически важных стохастических задач, например в случае использования спектральных моделей случайного поля Σ, в которых функция $\Sigma(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} s)$ является непрерывным случайным процессом вдоль произвольного направления $\boldsymbol{\omega}$.

Рассматриваемый далее весовой алгоритм позволяет исключить трудоемкую процедуру нахождения решения уравнения (6) при каждом столкновении и свести моделирование к случаю, аналогичному детерминированной задаче. Идея данного алгоритма заключается в том, что оценки типа (4) искомого функционала I могут быть получены по одним и тем же случайным траекториям фотонов для разных реализаций случайного поля $\Sigma(\mathbf{r})$ с учетом случайных весов (3), устраняющих возникающее смещение. А именно: траектории, построенные для некоторой детерминированной функции $\Sigma_0(\mathbf{r})$, могут быть использованы для осреднения функционала $I_\varphi(\Sigma)$ по реализациям $\Sigma(\mathbf{r})$, если после каждого перехода $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$ соответствующий «вес» фотона будет умножен на величину $k(\mathbf{x}',\mathbf{x};\Sigma)/k(\mathbf{x}',\mathbf{x};\Sigma_0)$.

Пусть

$$\omega_n = \{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n); \quad \mathbf{x}_i = (\mathbf{r}_i,\ \boldsymbol{\omega}_i);\ \ i = \overline{0,n}\}$$

— случайная n-звенная траектория, посторенная для плотности перехода $r(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}',\mathbf{x};\Sigma_0)$. Тогда весовой множитель $Q_n(\Sigma)$, соответствующий реализации $\Sigma(\mathbf{r})$, вычисляется по формуле

$$Q_n(\Sigma) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}\Sigma_s(\mathbf{r}_i)}{\prod_{i=1}^{n}\Sigma_{s,0}(\mathbf{r}_i)}\frac{\Sigma(\mathbf{r}_n)}{\Sigma_0(\mathbf{r}_n)}e^{-\sum_{i=1}^{n}(\tau(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i)-\tau_0(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i))}, \qquad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\tau_0(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i) &= \int_0^{|\mathbf{r}_{i-1}-\mathbf{r}_i|}\Sigma_0(\mathbf{r}_{i-1} + s\boldsymbol{\omega}_{i-1})ds,\\ \tau(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i) &= \int_0^{|\mathbf{r}_{i-1}-\mathbf{r}_i|}\Sigma(\mathbf{r}_{i-1} + s\boldsymbol{\omega}_{i-1})ds.\end{aligned} \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что для вычисления $\xi(\Sigma)$ по траектории ω_n, построенной для плотности $k(\mathbf{x}',\ \mathbf{x};\ \Sigma_0)$, необходимо строить реализации случайной функции $\Sigma(\mathbf{r})$ только в точках $\mathbf{r}_1$, ..., $\mathbf{r}_n$, т.е. $\Sigma(\mathbf{r}_1)$, ..., $\Sigma(\mathbf{r}_n)$, а значения интегралов (8) от случайных функций $\Sigma(\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i s)$, $i = 1$, ..., n, вдоль направлений $\boldsymbol{\omega}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1})/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$ определять на отрезках $(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i)$.

Таким образом, задача осреднения оценки $\xi(\Sigma)$ по реализациям непрерывного случайного поля Σ сводится к осреднению по реализациям случайных векторов $\{\Sigma(\mathbf{r}_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ и $\{\tau(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i;\Sigma)\}_{i=\overline{1,n}}$. Во многих случаях это позволяет существенно сократить время вычислений. Выигрыш во времени вычислений зависит от модели случайного поля $\Sigma(\mathbf{r})$.

В качестве примера можно рассмотреть часто используемую в литературе стохастическую модель непрерывного слоистообразного облачного слоя $h \le z \le H$ в виде однородного по вертикали стационарного случайного процесса $\Sigma(z)$. В качестве приближенного процесса $\Sigma(z)$ может быть взята одна из многочисленных спектральных моделей, см., например, [4]:

$$\Sigma(z) \approx \Sigma^{(k)}(z) = \overline{\Sigma(z)} + \sigma_\Sigma\sum_{j=1}^{k}a_j\sqrt{-2\ln\alpha_j}\cos(\lambda_j z + 2\pi\beta_j),$$

где α_j и β_j — независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0, 1); $a_j^2 = 1/k$; σ_Σ^2 — дисперсия маргинального распределения Σ; $\lambda_j \in [0, \infty)$ распределены с плотностью вероятности

$$S(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\lambda z)K_\Sigma(z)dz,$$

$K_\Sigma(z)$ — корреляционная функция. В этом случае величина $\tau(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i)_{i=\overline{1,n}}$ в (8) вычисляется по формуле

$$\tau(\mathbf{r}_{i-1},\mathbf{r}_i) = \frac{1}{|(\boldsymbol{\omega}_{i-1},\mathbf{k})|}\Bigg[\bar{\Sigma}|z_{i-1}-z_i| +$$

$$+\sigma_\Sigma \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j}\sqrt{-2\ln\alpha_j}\left[\sin(\lambda_j z_{i-1}+2\pi\beta_j)-\sin(\lambda_j z_i+2\pi\beta_j)\right]\Bigg].$$

Здесь $\mathbf{k} = (0,\ 0,\ 1)$.

В качестве маргинального распределения Σ часто используется усеченное нормальное распределение с математическим ожиданием $\bar{\Sigma}$ и дисперсией σ_Σ^2, т.е. $\varphi(\Sigma) = \Phi(\Sigma) = 0$ при $\Sigma < \Sigma_{\min}$ и

$$\varphi(\Sigma) = \frac{1}{\sigma_{\Sigma,u}(1-\tau_a)}\varphi_u\left(\frac{\Sigma - \bar{\Sigma}_u}{\sigma_{\Sigma,u}}\right);$$

$$\Phi(\Sigma) = \frac{\Phi_u\left(\dfrac{\Sigma - \bar{\Sigma}_u}{\sigma_{\Sigma,u}}\right) - \tau_a}{1-\tau_a},$$

где $\varphi_u(x)$ и $\Phi_u(x)$ являются соответственно плотностью и функцией распределения для нормального распределения с параметрами $\bar{\Sigma}_u$, $\sigma_{\Sigma,u}$ и $\tau_a = \Phi_u[(\Sigma_{\min} - \bar{\Sigma}_u)/\sigma_{\Sigma,u}]$. Чтобы определить значения $\bar{\Sigma}_u$ и $\sigma_{\Sigma,u}$, можно воспользоваться формулами

$$\alpha_1 = \bar{\Sigma}_u + \sigma_{\Sigma,u}^2\varphi(\Sigma_{\min}),$$

$$\alpha_2 = \bar{\Sigma}_u^2 + \sigma_{\Sigma,u}^2\varphi(\Sigma_{\min})(\Sigma_{\min} + \bar{\Sigma}_u) + \sigma_{\Sigma,u}^2. \qquad (9)$$

Используя (9), значения $\bar{\Sigma}$, σ_Σ и таблицы Пирсона, которые выражают величины $\bar{\Sigma}$ и σ_Σ через σ_1 и σ_2, нетрудно вычислить $\bar{\Sigma}_u$ и $\sigma_{\Sigma,u}$

Заключение

Данный весовой алгоритм позволяет избежать трудоемкой процедуры моделирования случайных траекторий фотонов в случайно-неоднородных рассеивающих средах и тем самым сократить время вычислений. Предложенный алгоритм прост в реализации. Выигрыш во времени вычислений зависит от модели случайного поля. Для исследования этой зависимости начато проведение серии численных экспериментов.

Работа выполнялась при финансовой поддержке фондов РФФИ (грант № 03-01-0040) и «Ведущих научных школ» (грант НШ-1271, 2003).

1. *Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., Darbinian R.A., Kargin B.A., Elepov B.S.* Monte Carlo methods in atmospheric optics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 209 p.
2. *Mikhailov G.A.* Optimization of weighted Monte Carlo methods. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. 225 p.
3. *Каргин Б.А., Лаврентьев А.Е., Пригарин С.М.* Система автоматизации стохастического моделирования радиационного поля атмосферы // Оптика атмосф. и океана. 1999. Т. 12. № 3. С. 238–245.
4. *Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M.* Numerical Modeling of Random Processes and Fields. Algorithms and Applications. The Netherlands. Utrecht: VSP, 1996. 240 p.

B.A. Kargin. **A new approach to stochastic modeling in problems of atmospheric optics.**

The problems of statistical modeling of optic radiation transfer in stochastic scattering and absorbing media are considered. It is assumed that the spatial variations of optical parameters of these media are of random nature. In the paper weight algorithms allowing one to greatly optimize modeling are presented. In this approach, random trajectories are constructed for a determined medium, and random variations of optical parameters are considered by means of calculation of special weight multipliers. In a great number of practically important problems of stochastic media optics the algorithm allows a simple numerical or sometimes an analytical integration of the corresponding random estimates, which is necessary for calculation of average radiation field characteristics. The developed algorithms of the Monte-Carlo methods allow constructing numeric models of the electromagnetic radiation fields in randomly-inhomogeneous media and are directed, mostly, at solving problems of solar radiation transfer in stochastic continuous cloudiness.