

В.П. Лукин, Б.В. Фортес

О СПЕКТРАЛЬНЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Исследованы два аспекта функционирования адаптивных систем: влияние временной задержки в адаптивной системе и спектральная зависимость качества фазовой коррекции. Анализ проводится на основе численных расчетов. Используются наиболее достоверные модели высотной зависимости спектральной плотности флуктуаций показателя преломления атмосферы.

Одной из наиболее распространенных систем формирования изображения является наземный астрономический телескоп. При использовании такого телескопа в режиме адаптивной компенсации атмосферных искажений волнового фронта в его состав входят такие дополнительные элементы, как система контроля фазовых искажений (датчик волнового фронта), вычислительное устройство и управляемое зеркало, включенное в оптическую схему телескопа [1]. Эти элементы и обеспечивают компенсацию атмосферных искажений в реальном масштабе времени.

Как и любая другая система, адаптивный телескоп имеет конечную ширину полосы частот, в которой происходит эффективная компенсация искажений. Это связано с конечным быстродействием датчика волнового фронта, вычислительного устройства и инерционностью управляемого зеркала. Поэтому является актуальным вопрос определения требуемой полосы частот или максимально допустимой временной задержки между измерением фазовых искажений и компенсацией их управляемым зеркалом.

Второй вопрос, который мы затронем в этой статье, связан с тем, что в датчике волнового фронта телескопа используется интерферометрическая техника, следовательно, измерения искажений волнового фронта и управление профилем адаптивного зеркала производятся в достаточно узкой спектральной полосе около определенной (вырезаемой с помощью интерференционного фильтра) длины волны излучения. В то же время телескоп формирует изображение в достаточно широкой полосе длин волн излучения наблюдаемых источников света. Вопрос об эффективности компенсации искажений широкополосного излучения по результатам узкополосных измерений формулируется в специальной литературе [2, 3] как «спектральные характеристики адаптивных систем» или «двухцветные адаптивные системы».

Ранее оба эти аспекта рассматривались в работе одного из авторов [2, 4–7]. Однако в них, как правило, проводился асимптотический анализ. Вместе с тем появились работы, которые в определенном смысле противоречат полученным результатам [3, 8, 9]. В связи с этим в данной статье приводятся результаты численных расчетов, которые используют широко применяемые модели спектральной плотности флуктуаций показателя преломления атмосферы на атмосферной вертикальной трассе.

Динамические характеристики адаптивных оптических систем

В качестве исходного выражения воспользуемся записью поля $U(x, \rho)$ в произвольной плоскости x , формируемого в вакууме,

$$U(x, \rho) = \iint d^2\rho' U_0(\rho') \frac{k}{2\pi i(x-x_0)} \exp\left(ik \frac{(\rho-\rho')^2}{2(x-x_0)}\right), \quad (1)$$

где $U_0(\rho) = A(\rho)\exp(-ik\rho^2/2F)$ — исходная волна, упавшая на круглую линзу (F — фокусное расстояние линзы). В отсутствие флуктуаций в исходной волне U_0 поле в фокальной плоскости линзы на ее оси запишется:

$$I_{\text{ВАК}}(0) = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \iint d^4\rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) = \frac{(\pi R^2)^2}{\lambda^2 F^2} = \frac{\Omega_F^2}{4}. \quad (2)$$

Здесь R — радиус входной линзы, $\Omega_F = kR^2/F$.

Для случая распространения через атмосферную турбулентность [10]:

$$\langle I(0) \rangle = \lambda^{-2} F^{-2} \iint d^4\rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) e^{-\frac{1}{2} D_s(|\rho_1 - \rho_2|)} = \frac{\pi}{\lambda^2 F^2} \int_0^D \rho d\rho K(\rho) e^{-\frac{1}{2} D_s}, \quad (3)$$

где

$$K(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2} [D^2 \arccos(r/D) - r \sqrt{D^2 - r^2}], & r \leq D \\ 0 & , r > D \end{cases} \quad (4)$$

$D_S(\rho) = 6,88(\rho/r_0)^{5/3}$ – структурная функция фазы; r_0 – радиус Фрида. Кстати отметим здесь же, что апертурная функция (4) имеет достаточно эффективную и простую аппроксимацию [11]:

$$\tilde{K}(x) = 1 - 1,25x + 0,25x^4, \quad \tilde{K}(x) = \frac{2}{\pi} K(r/D).$$

Для оценки эффективности оптической системы будем использовать параметр Штреля

$$St = \int_0^1 dx x \tilde{K}(x) e^{-3,44(D/r_0)^{5/3} x^{5/3}} / \int_0^1 dx x \tilde{K}(x), \quad (5)$$

где

$$\tilde{K}(x) = \frac{2}{\pi} [\arccos x - x \sqrt{1 - x^2}], \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Обычно традиционные адаптивные системы используют для коррекции искажений данные текущих фазовых измерений. Поскольку полоса частот любой динамической системы конечна, имеет место временное запаздывание [2] между управлением и измерениями. Введем следующее понятие – постоянную времени запаздывания τ .

Традиционная адаптивная система с конечным временем запаздывания может быть классифицирована как система «постоянного запаздывания». В такой системе в качестве оценки фазы \hat{S} для момента времени $(t+\tau)$ мы используем данные предыдущих измерений:

$$\hat{S}(\mathbf{r}, t+\tau) = S(\mathbf{r}, t).$$

Тогда фазовый член в подынтегральном выражении, характеризующий остаточные искажения, запишется в виде

$$\exp \left\{ -D_S(\mathbf{v}\tau) - \left[D_S(\rho_1 - \rho_2) - \frac{1}{2} D_S(\rho_1 - \rho_2 + \mathbf{v}\tau) - \frac{1}{2} D_S(\rho_1 - \rho_2 - \mathbf{v}\tau) \right] \right\}. \quad (6)$$

Заменяв выражением (6) фазовый член в (3), получаем

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \frac{e^{-D_S(v\tau)}}{\lambda^2 F^2} \iint d^2 \rho K(\rho) e^{-[D_S(\rho) - \frac{1}{2} D_S(\rho + \mathbf{v}\tau) - \frac{1}{2} D_S(\rho - \mathbf{v}\tau)]}. \quad (7)$$

Далее можно воспользоваться асимптотическим поведением подынтегральной функции (6):

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = e^{-D_S(v\tau)} I_{\text{вак}}(0) + [1 - e^{-D_S(v\tau)}] \langle I(0) \rangle, \quad (8)$$

где $\langle I(0) \rangle$ из (3), т. е. для системы без коррекции. В результате

$$St(\tau) = St + e^{-D_S(v\tau)} [1 - St], \quad (9)$$

где St определяется (5). Легко видеть из (9), что при $D_S(v\tau) \rightarrow 0$ $St \rightarrow 1$, а при $D_S(v\tau) \rightarrow \infty$ $St(\tau) \rightarrow St$, как для системы без коррекции.

Возможен вариант описания фазовых искажений оптической волны на основе разложения их на ортогональные моды [11]. При этом, вычисляя средние

$$\langle [..]^2 \rangle = \langle \{ [S(\rho_1, t+\tau) - S(\rho_1, t)] - [S(\rho_2, t+\tau) - S(\rho_2, t)] \}^2 \rangle,$$

воспользуемся разложением в ряд Тейлора

$$S(\rho + \mathbf{v}\tau, t) = S(\rho, t) + \nabla_{\rho} S(\rho, t) \mathbf{v}\tau \quad (10)$$

и получим

$$\langle [\dots]^2 \rangle = \tau^2 \langle \{ \nabla_{\rho} S(\rho, t) \mathbf{v} - \nabla_{\rho} S(\rho, t) \mathbf{v} \}^2 \rangle. \quad (11)$$

Используем разложение по полиномам Цернике [12]:

$$S(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j F_j(\mathbf{r}/R), \quad \nabla S(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=2}^{\infty} a_j \nabla F_j(\mathbf{r}/R), \quad (12)$$

где

$$a_j = \iint d^2\rho A(\rho) S(R\rho, \theta) F_j(\rho, \theta), \quad \rho = \mathbf{r}/R.$$

В результате

$$\begin{aligned} \langle [\dots]^2 \rangle = \tau^2 & \left[v_x^2 \left\langle \left(\frac{\partial S(\mathbf{r}_1)}{\partial x} - \frac{\partial S(\mathbf{r}_2)}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + v_y^2 \left\langle \left(\frac{\partial S(\mathbf{r}_1)}{\partial y} - \frac{\partial S(\mathbf{r}_2)}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + \right. \\ & \left. + 2v_x v_y \left\langle \left(\frac{\partial S(\mathbf{r}_1)}{\partial x} - \frac{\partial S(\mathbf{r}_2)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial S(\mathbf{r}_1)}{\partial y} - \frac{\partial S(\mathbf{r}_2)}{\partial y} \right) \right\rangle \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Используя условие $v_x^2 = v_y^2 = v^2 / 2$, $\langle a_4^2 \rangle = \langle a_5^2 \rangle = \langle a_6^2 \rangle$, имеем

$$\langle [\dots]^2 \rangle = 48 \frac{v^2 \tau^2}{R^4} \langle a_4^2 \rangle \rho^2 \left[1 + \frac{\sin 2\theta}{2} \right], \quad (14)$$

где $\langle a_4^2 \rangle = 0,0232(D/r_0)^{5/3}$, $\rho = \rho(\rho, \theta)$.

Выражение (14) получаем из (12), используя разложение до шестой моды. Известно представление $D_S(\rho) = 6,88 (\rho/r_0)^{5/3}$, которое соответствует колмогоровской турбулентности [10] и, строго говоря, использует бесконечное число мод в разложении (12). Если же записать структурную функцию фазы для шести мод, то получим:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_S(\rho_1, \rho_2) = 1,796 (D/r_0)^{5/3} |\rho_1 - \rho_2|^2 / R^2 + 0,42 (D/r_0)^{5/3} [(x_1^2 - x_2^2) - (y_1^2 - y_2^2)]^2 / R^4 + \\ + 0,56 (D/r_0)^{5/3} (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 / R^4. \quad (15) \end{aligned}$$

Следующий шаг в развитии адаптивных систем — это построение «скоростной» адаптивной системы. При этом управление в системе строится по следующему алгоритму:

$$\hat{S}(\mathbf{r}, t + \tau) = S(\mathbf{r}, t) + \nabla_{\mathbf{r}} S(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}\tau. \quad (16)$$

При расчете структурной функции остаточных фазовых искажений

$$\Delta S(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t + \tau) - S(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}\tau,$$

используя разложение в (12) вплоть до десятой моды, имеем

$$D_{\Delta S}(\rho) = \frac{48 \cdot 12 \langle a_7^2 \rangle}{R^6} \rho^2 v^4 \tau^4, \quad (17)$$

где $\langle a_7^2 \rangle = 0,00619(D/r_0)^{5/3}$.

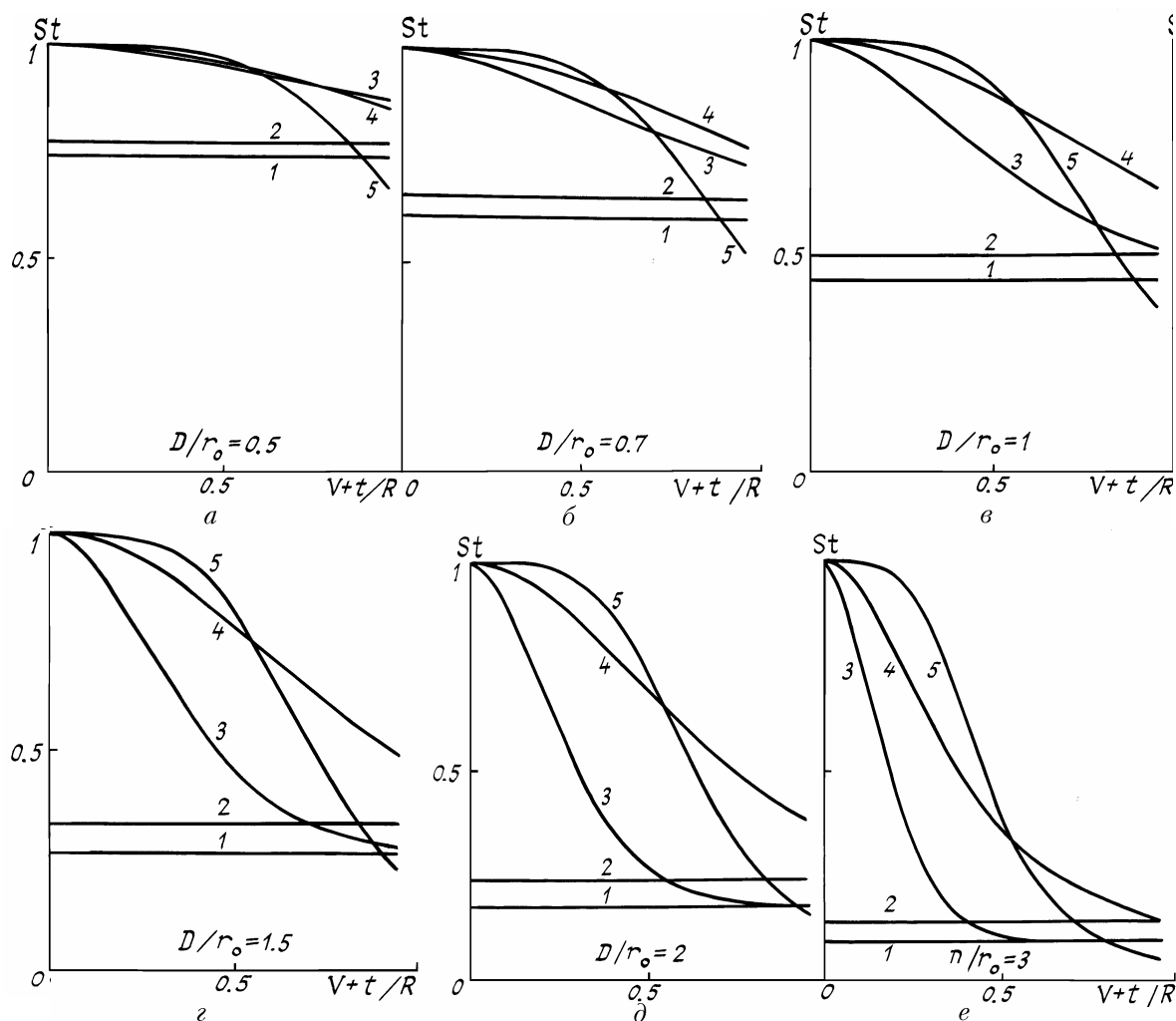
Ниже приведем сводку формул, где обозначены

$D_S(\rho_1 - \rho_2) = 6,88 (|\rho_1 - \rho_2|/r_0)^{5/3} = 2,17 (D/r_0)^{5/3} (\rho/R)^{5/3}$ — структурная функция турбулентных искажений фазы;

$D_S(\rho_1, \rho_2) = 1,796 (D/r_0)^{5/3} |\rho_1 - \rho_2|^2/R^2 + 0,42 (D/r_0)^{5/3} [(x_1^2 - x_2^2) - (y_1^2 - y_2^2)]^2/R^4 +$
 $+ 0,56 (D/r_0)^{5/3} (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2/R^4$ — структурная функция, использующая разложение до шестой моды;

$D'_S(\rho_1 - \rho_2) = 1,11 (D/r_0)^{5/3} (v\tau/R)^2 (\rho/R)^2 [1 + \sin 2\theta/2]$ — структурная функция остаточных искажений в системе «постоянного запаздывания»;

$D''_S(\rho_1, \rho_2) = 3,56 (D/r_0)^{5/3} (v\tau/R)^4 (\rho/R)^2, \rho_1 \rho_2 = \rho^2 \sin \theta \cos \theta$ — структурная функция остаточных искажений в «скоростной» системе.



Поведение параметра Штреля как функции обобщенного параметра $v\tau/R$. а, б, в, г, е кривые 1 — расчет по формуле (18); 2 — $\int_0^1 dx x \tilde{K}(x) \exp\left(-\frac{1}{2} D_S(x)\right) \left[\int_0^1 dx x \tilde{K}(x)\right]^{-1}$; 3 — расчет по формуле (9); 4 — $St'(\tau)$ в соответствии с (19); 5 — $St''(\tau)$ — (20)

Результаты численных расчетов по этим формулам представлены на рисунке для следующих параметров Штреля:

$$St = \frac{\int_0^1 dx x \tilde{K}(x) \exp(-3,44 (D/r_0)^{5/3} x^{5/3})}{\int_0^1 dx x \tilde{K}(x)} ; \quad (18)$$

$$St'(\tau) = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 dx x \tilde{K}(x) \exp[-2,23 (D/r_0)^{5/3} (v\tau/R)^2 x^2 (1 + \sin 2\theta/2)] \left[\pi \int_0^1 dx x \tilde{K}(x)\right]^{-1}. \quad (19)$$

$$St''(\tau) = \int_0^1 dx x \tilde{K}(x) \exp[-7,12(D/r_0)(v\tau/R)^4 x^2] / \int_0^1 dx x \tilde{K}(x). \quad (20)$$

Параметром расчетов является $(D/r_0)^{5/3}$, а $\frac{V\tau}{P}$ — обобщенный аргумент. На этом же рисунке представлены расчеты по формуле (9). Из графиков легко определить, для каких значений $v\tau/R$ $St''(\tau)$ превышает значение St , а также выигрыш «скоростной» адаптации по сравнению с алгоритмом «постоянного запаздывания».

Спектральные характеристики адаптивных систем

Двухцветные адаптивные системы — наиболее часто встречающиеся на практике, поскольку длина волны в опорном канале (или системе контроля) не совпадает с корректируемой длиной волны. В [5] получены аналитические выражения и проведен асимптотический анализ дисперсии разности эйконолов и их структурной функции. Так, дисперсия разности эйконолов

$$\sigma_{\Delta\theta}^2 = 2\pi^2 \int_0^L dx \int_0^\infty dx x \Phi_n(x, x) \left[\cos \frac{x^2 x}{2k_1} - \cos \frac{x^2 x}{2k_2} \right]^2. \quad (21)$$

Для расчетов использовалась модель спектральной плотности колмогоровского типа с конечным внешним масштабом

$$\Phi_n(x, x) = 0,033 C_n^2(x) (x^2 + x_0^2)^{-11/6} e^{-x^2/x_m^2}. \quad (22)$$

Высотный профиль турбулентности задавался в виде

$$C_n^2(h) = C_n^2(0) \begin{cases} (1 + h/h_0)^{-2/3}, & h \leq h_1, \\ (h/h_0)^{-4/3} (1 + h_1/h_0), & h > h_1, \end{cases} \quad (23)$$

где $h \in [0, L]$. В расчетах использовались следующие значения: внешний масштаб $2\pi/x_0 = 100$ м, внутренний $5,92\pi/x_m = 0,01$ м, длина трассы $L = 1000$ м, начальная высота $h_0 = 30$ м, высота $h_1 = 300$ м, радиус Фрида для $0,55$ мкм $r_0 = 0,1$ м, диаметр приемной апертуры $D = 1$ м.

Результаты расчетов сведены в табл. 1. В первой колонке дается длина волны, на которой корректируются искажения, во второй колонке — длина волны, корректирующей искажения. Последующие колонки дают значения соответствующих дисперсий и связанных с ними функций.

Таблица 1

λ_1 , мкм	λ_2 , мкм	$\sigma_{\Delta S}^2 \cdot 10^3$	$\sigma_{\Delta S}^2 \cdot 10^5 / (D/r_0)^{5/3}$	$\sigma_{\Delta S}^2 \cdot 10^3 / 2\pi$	$\sigma_{\Delta\theta}^2 \cdot 10^3$ мкм
0,50	1,0	3,12	5,55	8,88	4,44
0,50	2,0	10,3	18,3	16,1	8,06
0,50	3,0	17,0	30,2	20,7	10,4
0,50	4,0	23,4	41,6	24,3	12,2
0,50	5,0	29,5	52,6	27,4	13,7
0,50	6,0	35,5	63,3	30,0	15,0
0,50	7,0	41,4	73,6	32,4	16,2
0,50	8,0	47,1	83,8	34,5	17,3
0,50	9,0	52,7	93,8	36,5	18,3
0,50	10,0	58,2	104	38,4	19,2

Численные расчеты выполнены при значении $C_n^2(0) = 4,93 \times 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$. Соответствующие эквивалентные высоты модели (23) оказались равными

$$\int_0^L dh C_n^2(h), C_n^2(0) = 170 \text{ м}, \quad \int_0^L dh h C_n^2(h) / \int_0^L C_n^2(h) dh = 271 \text{ м}.$$

Третья колонка соответствует дисперсии остаточной разности фаз в результате «двухцветной» коррекции. Четвертая колонка дает значения той же величины при нормировке на $(D/r_0)^{5/3}$, пятая — средне-

квадратическое отклонение, нормированное на 2π рад. И наконец, шестая колонка дает среднеквадратическое отклонение, измеренное в микронах. Для сравнения укажем, что при этих же значениях дисперсия флуктуаций фазы (для длины волны 0,5 мкм) равна $0,76 \times 10^2$.

Расчеты, приведенные в табл. 1, соответствуют значению внешнего масштаба турбулентности $2\pi/\kappa_0 = 100$ м. Проводились расчеты с моделью высотной зависимости $2\pi/\kappa_0 = 2\sqrt{h}$, результаты практически тождественны данным из табл. 1. Таким образом, дисперсия разности эйконоалов для двух различных длин волн не чувствительна к вариациям внешнего масштаба турбулентности. В то же время дисперсия разности эйконоалов $\sigma_{\Delta\theta}^2$ достаточно чувствительна к изменению внутреннего масштаба и длины трассы.

Таблица 2

Внутренний масштаб турбулентности $5,92/\kappa_m$, м	0,03	0,01	0,003
Флуктуации оптической разности хода $\sigma_{\Delta\theta}$, мкм	0,017	0,019	0,020

В табл. 2 дается зависимость $\sigma_{\Delta\theta}^2$ от вариации внутреннего масштаба для трассы 1000 м, в табл. 3 — от вариации длины трассы для значения внутреннего масштаба турбулентности, равного 0,01 м.

Таблица 3

Длина трассы L , М	1000	3000	6000	10000
Флуктуации оптической разности хода $\sigma_{\Delta\theta}^2$, мкм	0,0192	0,0256	0,0299	0,0346

Таким образом, полученные численные расчеты еще раз подтвердили выводы [5, 7] и доказали эффективность применения «двухцветных» адаптивных систем при формировании изображения, а также возможности улучшения динамических характеристик таких систем.

1. Адаптивная оптика /Под редакцией Д. Фрида. М.: Мир, 1980. 456 с.
2. Лукин В. П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 256 с.
3. Winocur I. // Applied Opt. 1983. V. 22. № 23. P. 3711—3715.
4. Lukin V. P. // Opt Lett. 1979. V. 4. № 1. P. 15—17.
5. Лукин В. П. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. № 9. С. 1856—1861.
6. Лукин В. П. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 6. С. 563—572.
7. Lukin V. P., Zuev V. E. // Appl. Opt. 1987. V. 27 № 1. P. 139.
8. Hogge C. B., Butts R. R. // J. Opt. Soc. Am. 1982. V. 2. P. 606.
9. Holmes J. F., Gudimetla V. S. // J. Opt. Am. 1983. V. 73. № 9. P. 1119—1122.
10. Hufnagel R. E. // Appl. Opt. 1971. V. 10. № 11. P. 2547—2548.
11. Wang J. Y., Markey L. K. // J. Opt. Soc. Am. 1978. V. 68. № 1. P. 78—87.

V. P. Lukin, B. V. Fortes. **Spectral and Dynamic Characteristics of the Adaptive Systems for Imaging.**

Two aspects of the adaptive systems functioning are investigated in the paper, i. e. the influence of a time lag of the adaptive system and the spectral dependence of the phase correction quality. The analysis is made using numerical methods. Most reliable models of the altitude behavior of the spectral density of the atmospheric refractive index fluctuations are used.