

Сравнительный анализ алгоритмов решения векторного уравнения переноса излучения по эффективности для плоского слоя мутной среды

В.П. Будак, Д.С. Ефременко, О.В. Шагалов*

Московский энергетический институт (ТУ)
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Поступила в редакцию 23.08.2011 г.

Численное решение векторного уравнения переноса излучения (ВУПИ) возможно только после его дискретизации, которая невозможна без выделения в решении анизотропной части, включая все особенности решения. Дискретизованное ВУПИ для плоского слоя мутной среды имеет единственное аналитическое решение в матричной форме. Существующие пакеты матричной (линейной) алгебры допускают только один возможный алгоритм решения ВУПИ на компьютере. Различные реализации данного алгоритма отличаются методом выделения анизотропной части. Проанализированы методы выделения анизотропии решения, и показано, что наилучшим является малоугловая модификация метода сферических гармоник (МСГ). Проведено сравнение программ, разработанных авторами этих методов, в простейшей ситуации слоя мутной среды для выявления влияния метода выделения анизотропии на эффективность кода. Для программы, основанной на МСГ, проведена оценка влияния различных аппаратно-программных средств на эффективность кода.

Ключевые слова: метод дискретных ординат, анизотропное рассеяние, плоская геометрия; discrete ordinate method, anisotropic scattering, slab geometry.

Введение

Оптические методы дистанционного зондирования (ДЗ) подстилающей поверхности и атмосферы основаны на решении обратных задач скалярного и векторного уравнения переноса излучения (УПИ, ВУПИ). Обратные задачи, как правило, решаются на основе решения прямых задач, что предъявляет жесткие требования к ним. Современный этап развития технических средств оптических методов ДЗ определяет точность решения не хуже 1% [1]. Широкое развитие гиперспектральных систем оптического ДЗ (например, датчик TANSO миссии GOSAT имеет более 18 000 спектральных линий) определяет требования по скорости счета соответствующих алгоритмов.

Сравнение различных кодов решения скалярного и векторного уравнения переноса излучения показывает поразительное совпадение результатов расчетов различных программ на уровне машинной точности [2, 3]. Это позволяет предположить, что все алгоритмы расчета полей поляризации в мутной среде являются, по сути, вариантами единого метода решения ВУПИ [4–7]. Однако сравнение времени счета различными программами показывает разброс более чем на порядок, что в реализации единого алгоритма существуют важные особенности, опреде-

ляющие время счета. В настоящей статье получено общее аналитическое решение дискретизованного ВУПИ в случае плоского слоя мутной среды, проанализированы особенности компьютерной реализации этого решения, а также проведен анализ влияния аппаратно-программных средств на эффективность кода. Построение общего решения проведем на физическом уровне строгости на основе вывода аналитического решения с указанием всех соответствующих ограничений.

1. Выделение анизотропной части решения

Рассмотрим краевую задачу ВУПИ для плоского слоя мутной среды оптической толщины τ_0 , который облучается плоским мононаправленным источником поляризованного света в направлении \mathbf{f}_0 [8]:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\mathbf{L}}(\tau, \mathbf{f}) + \bar{\mathbf{L}}(\tau, \mathbf{f}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \bar{\mathbf{R}}(\chi) \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{f}, \mathbf{f}') \bar{\mathbf{R}}(\chi') \bar{\mathbf{L}}(\tau, \mathbf{f}') d\mathbf{f}', \\ \bar{\mathbf{L}}(\tau, \mathbf{f}) \Big|_{\tau=0, (\mathbf{e}, \mathbf{f}) > 0} = \bar{\mathbf{L}}_0 \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0), \quad \bar{\mathbf{L}}(\tau, \mathbf{f}) \Big|_{\tau=\tau_0, (\mathbf{e}, \mathbf{f}) < 0} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{\mathbf{L}}(\tau, \mathbf{f})$ — вектор-параметр Стокса светового поля в среде на оптической глубине τ в направлении \mathbf{f} . Введем декартову систему координат $OXYZ$, в которой ось OZ направлена вниз перпендикулярно границе слоя, \mathbf{e} — единичный вектор вдоль OZ ;

* Владимир Павлович Будак (BudakVP@mpei.ru); Дмитрий Сергеевич Ефременко (efremenkods@gmail.com); Олег Владимирович Шагалов (shov010189@gmail.com).

$$\mathbf{f} = \left\{ \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \mu \right\},$$

$$\mathbf{f}_0 = \left\{ \sqrt{1-\mu_0^2}, 0, \mu_0 \right\}, \quad \mu = (\mathbf{f}, \mathbf{e}), \quad \mu_0 = (\mathbf{f}_0, \mathbf{e});$$

$\tilde{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ – матрица рассеяния; Λ – альbedo однократного рассеяния; $\tilde{R}(\chi)$ – матрица преобразования (ротатор) параметров Стокса при повороте плоскости референции; χ – двугранный угол между плоскостями $(\mathbf{e} \times \mathbf{f})$ и $(\mathbf{f} \times \mathbf{f})$; χ' – угол между плоскостями $(\mathbf{f} \times \mathbf{f})$ и $(\mathbf{f} \times \mathbf{e})$. Единичные векторы будем отмечать знаком « $\hat{\cdot}$ », вектор-столбцы правой стрелкой, вектор-строки левой стрелкой, а матрицы двойной стрелкой над соответствующими символами.

Для численного решения ВУПИ необходимо заменить интеграл конечной суммой, что возможно одним из двух методов: метод сферических гармоник (СГ) и метод дискретных ординат (ДОМ) [9]. ДОМ является наилучшим методом для численной реализации, поскольку решение ВУПИ приобретает ясную лучевую трактовку, что особенно упрощает формулировку сложных граничных условий.

Физической основой теории переноса является лучевое приближение, что неизбежно порождает пространственные особенности в решении: любой разрыв в граничных условиях распространяется в глубь среды. Простейший пример – скачок в угловом распределении яркости на границе «свет–тень». Поэтому решение краевой задачи (1) необходимо искать в пространстве обобщенных функций, что делает невозможной замену интеграла рассеяния гауссовой квадратурой. Следовательно, решение должно быть представлено в виде суммы двух частей: анизотропной части $\tilde{L}_a(\tau, \mathbf{f})$, содержащей все особенности точного решения и определяемой аналитически, и регулярной части $\tilde{L}_r(\tau, \mathbf{f})$, являющейся гладкой функцией угловых переменных и определяемой численно:

$$\tilde{L}(\tau, \mathbf{f}) = \tilde{L}_a(\tau, \mathbf{f}) + \tilde{L}_r(\tau, \mathbf{f}). \quad (2)$$

Поскольку анизотропная часть решения представляется аналитически, то интеграл рассеяния от нее также определяется аналитически – методом аналитического выделения сингулярностей при численном вычислении интеграла [10]. Подстановка (2) в (1) модифицирует исходную краевую задачу в задачу для определения регулярной части

$$\left\{ \begin{aligned} & \mu \frac{\partial \tilde{L}_r(\tau, \mathbf{f})}{\partial \tau} + \tilde{L}_r(\tau, \mathbf{f}) = \\ & = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \tilde{R}(\chi) \tilde{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tilde{R}(\chi') \tilde{L}_r(\tau, \mathbf{f}) d\mathbf{f} + \tilde{\Delta}(\tau, \mathbf{f}); \\ & \tilde{L}_r(\tau, \mathbf{f}) \Big|_{\tau=0, \mu>0} = \vec{0}; \quad \tilde{L}_r(\tau, \mathbf{f}) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = \vec{0} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

с функцией источников в правой части уравнения

$$\tilde{\Delta}(\tau, \mathbf{f}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \tilde{R}(\chi) \tilde{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tilde{R}(\chi') \tilde{L}_a(\tau, \mathbf{f}) d\mathbf{f} - \mu \frac{\partial \tilde{L}_a(\tau, \mathbf{f})}{\partial \tau} - \tilde{L}_a(\tau, \mathbf{f}). \quad (4)$$

В скалярном варианте разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра приводит на основе теоремы сложения для сферических функций к разделению в УПИ (факторизации) зависимостей от азимутального и зенитного углов [9], что преобразует двукратный интеграл рассеяния к однократному и позволяет его заменить через гауссову квадратуру. Однако в случае переноса поляризованного излучения плоскости референции падающего и рассеянного лучей, а также плоскость рассеяния не совпадают, что требует применения ротатора, который искажает угловую симметрию подынтегрального уравнения и не позволяет применять теорему сложения для сферических функций [8].

2. Дискретизация ВУПИ

Kuščer и Ribarič [11] предложили вместо привычного линейного базиса (Stokes polarization, SP) использовать циркулярный базис (circular polarization, CP) для определения параметров поляризации

$$\tilde{L}_{CP} = \begin{bmatrix} L_{+2} \\ L_{+0} \\ L_{-0} \\ L_{-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q - iU \\ I - V \\ I + V \\ Q + iU \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \tilde{T}_{CS} \tilde{L}_{SP}, \quad \tilde{T}_{SC} \equiv \tilde{T}_{CS}^{-1}, \quad (5)$$

где I, Q, U, V – параметры Стокса по Chandrasekary [8].

Такое представление изменяет форму ротатора, что позволяет использовать для представления матрицы рассеяния обобщенные сферические функции $P_{mn}^k(\cos\theta)$, для которых справедлива своя форма теоремы сложения, соответствующая симметрии ротатора в представлении CP [8]:

$$e^{-im\chi} P_{mn}^k(\mathbf{f}, \mathbf{f}) e^{-im\chi'} = \sum_{q=-k}^k (-1)^q P_{mq}^k(\mathbf{f}, \mathbf{e}) P_{qn}^k(\mathbf{e}, \mathbf{f}) e^{iq\Delta\varphi},$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi'. \quad (6)$$

Однако в результате применения теоремы сложения все коэффициенты в ВУПИ становятся комплексными, что затрудняет использование эффективных численных алгоритмов при нахождении гладкой части решения. Поэтому после применения теоремы сложения для обобщенных сферических функций следует вернуться к представлению SP.

Рассмотрим отдельно матрицу локального преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) &\equiv \tilde{R}(\chi) \tilde{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tilde{R}(\chi') = \\ &= \tilde{T}_{SC} \tilde{T}_{CS} \tilde{R}(\chi) \tilde{T}_{SC} \tilde{T}_{CS} \tilde{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tilde{T}_{SC} \tilde{T}_{CS} \tilde{R}(\chi') \tilde{T}_{SC} \tilde{T}_{CS} = \\ &= \tilde{T}_{SC} \tilde{R}_{CP}(\chi) \tilde{x}_{CP}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tilde{R}_{CP}(\chi') \tilde{T}_{CS} \equiv \tilde{T}_{SC} \tilde{S}_{CP}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tilde{T}_{CS}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_{CP}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \equiv \tilde{T}_{CS} \tilde{x}_{SP}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \tilde{T}_{SC}$ – матрица рассеяния; $\tilde{R}_{CP}(\chi) = \tilde{T}_{CS} \tilde{R}(\chi) \tilde{T}_{SC}$ – ротатор в представлении СР.

Далее, представим элементы матрицы рассеяния в виде разложения по обобщенным сферическим функциям

$$[\tilde{x}_{CP}(\cos \gamma)]_{rs} = \sum_{k=\max(r,s)}^K (2k+1) x_{rs}^k P_{r,s}^k(\cos \gamma). \quad (8)$$

Здесь r и s принимают только значения ± 0 и ± 2 ; K – количество гармоник в разложении матрицы по обобщенным сферическим функциям.

Принимая во внимание теорему сложения (6), получим для элементов матрицы локального преобразования в представлении СР

$$\begin{aligned} [\tilde{S}_{CP}(\mathbf{f}, \mathbf{f})]_{r,s} &= \\ &= \left[\sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{q=-k}^k (-1)^q e^{iq(\varphi-\varphi')} x_{rs}^k P_{rq}^k(\mu) P_{qs}^k(\mu') \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Определим диагональную матрицу

$$\tilde{Y}_l^q(\mu) = \text{Diag}(P_{-2,q}^l(\mu), P_{0,q}^l(\mu), P_{+0,q}^l(\mu), P_{+2,q}^l(\mu)) \quad (10)$$

и, принимая во внимание соотношение взаимности $P_{m,n}^k(\mu) = P_{n,m}^k(\mu)$, получим с учетом (7)

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) &= \sum_{k=0}^K (2k+1) \times \\ &\times \sum_{q=-k}^k (-1)^q e^{iq(\varphi-\varphi')} \tilde{T}_{SC} \tilde{Y}_k^q(\mu) \tilde{x}_k \tilde{Y}_k^q(\mu') \tilde{T}_{CS} \equiv \\ &\equiv \sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{q=-k}^k e^{iq(\varphi-\varphi')} \tilde{S}_k^q(\mu, \mu'), \quad (11) \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_k \equiv [x_{rs}^k]$.

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k^q(\mu, \mu') &= (-1)^q \tilde{T}_{SC} \tilde{Y}_k^q(\mu) \tilde{x}_k \tilde{Y}_k^q(\mu') \tilde{T}_{CS} = \\ &= (-1)^q \tilde{T}_{SC} \tilde{Y}_k^q(\mu) \tilde{T}_{CS} \tilde{T}_{SC} \tilde{x}_k \tilde{T}_{SC} \tilde{T}_{CS} \tilde{Y}_k^q(\mu') \tilde{T}_{CS} = \\ &= \tilde{P}_n^k(\mu) \tilde{\chi}_k \tilde{P}_n^k(\mu'). \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\chi}_k = \tilde{T}_{SC} \tilde{x}_k \tilde{T}_{CS}$ – так называемая «греческая матрица» [12];

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n^l(\mu) &= (-i)^n \tilde{T}_{SC} \tilde{Y}_n^l(\mu) \tilde{T}_{CS} = \\ &= \begin{bmatrix} Q_l^n(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_l^n(\mu) & -iT_l^n(\mu) & 0 \\ 0 & iT_l^n(\mu) & R_l^n(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_l^n(\mu) \end{bmatrix} \equiv \tilde{P}_R + i\tilde{P}_I, \quad (13) \end{aligned}$$

\tilde{P}_R, \tilde{P}_I – действительные части матрицы $\tilde{P}_n^l(\mu)$ [13],

$$\begin{aligned} R_l^n(\mu) &= 0,5i^m (P_{m,2}^k(\mu) + P_{m,-2}^k(\mu)), \\ T_l^n(\mu) &= 0,5i^m (P_{m,2}^k(\mu) - P_{m,-2}^k(\mu)), \quad (14) \end{aligned}$$

$$Q_l^n(\mu) = \sqrt{\frac{(k-m)!}{(k+m)!}} P_k^m(\mu).$$

Окончательно ВУПИ (1) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L}_r(\tau, \mathbf{f}) + \bar{L}_r(\tau, \mathbf{f}) &= \frac{\Lambda}{4\pi} \sum_{k=0}^K (2k+1) \times \\ &\times \sum_{q=-k}^k \tilde{P}_n^k(\mu) \int e^{iq\Delta\varphi} \tilde{\chi}_k \tilde{P}_n^k(\mu') \bar{L}_r(\tau, \mathbf{f}) d\mathbf{f} + \bar{\Delta}(\tau, \mathbf{f}). \quad (15) \end{aligned}$$

В этом случае уже возможно преобразование интеграла рассеяния в однократный интеграл, но он содержит комплексные выражения, однако само выражение (15) является действительным. С учетом симметрии введенных функций

$$R_l^n(\mu) = R_l^{-n}(\mu), \quad T_l^n(\mu) = -T_l^{-n}(\mu) \quad (16)$$

можно получить выражение [13]:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L}_r(\tau, \mathbf{f}) + \bar{L}_r(\tau, \mathbf{f}) &= \frac{\Lambda}{4\pi} \sum_{k=0}^K (2k+1) \sum_{m=0}^k (2 - \delta_{0,m}) \times \\ &\times \int (\tilde{C}_k^m(\mu, \mu') \cos m\Delta\varphi + \tilde{S}_k^m(\mu, \mu') \sin m\Delta\varphi) \bar{L}_r(\tau, \mathbf{f}) d\mathbf{f} + \bar{\Delta}(\tau, \mathbf{f}), \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_l^n(\mu, \mu') &= \tilde{P}_R^l(\mu) \tilde{\chi}_l \tilde{P}_R^l(\mu') - \tilde{P}_I^l(\mu) \tilde{\chi}_l \tilde{P}_I^l(\mu'); \\ \tilde{S}_l^n(\mu, \mu') &= \tilde{P}_I^l(\mu) \tilde{\chi}_l \tilde{P}_R^l(\mu') + \tilde{P}_R^l(\mu) \tilde{\chi}_l \tilde{P}_I^l(\mu'). \quad (18) \end{aligned}$$

Полученное выражение справедливо для всех матриц рассеяния. Однако для аэрозольной блочно-диагональной матрицы оно может быть упрощено [12, 13]. Представим решение задачи (3) в форме [13, 14]:

$$\begin{aligned} L_r(\tau, \mathbf{f}) &= \\ &= \sum_{m=0}^M (2 - \delta_{0,m}) [\phi_1(m\varphi) \bar{L}_1^m(\tau, \mu) + \phi_2(m\varphi) \bar{L}_2^m(\tau, \mu)], \quad (19) \end{aligned}$$

что приведет ВУПИ к следующей форме:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \bar{L}_c^m(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \bar{L}_c^m(\tau, \mu) &= \\ &= \frac{\Lambda}{2} \sum_{k=0}^K (2k+1) \tilde{P}_k^m(\mu) \tilde{\chi}_k \int_{-1}^1 \tilde{P}_k^m(\mu') \bar{L}_c^m(\tau, \mu') d\mu' + \bar{\Delta}(\tau, \mu), \quad (20) \\ &c = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь M – количество азимутальных членов ряда Фурье, $m \in \overline{0, M}$;

$$\tilde{\Pi}_m^k(\mu) = \begin{bmatrix} Q_k^m(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_k^m(\mu) & -T_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & -T_k^m(\mu) & R_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_k^m(\mu) \end{bmatrix}; \quad (21)$$

$$\phi_1(\varphi) = \text{diag}(\cos\varphi, \cos\varphi, \sin\varphi, \sin\varphi),$$

$$\phi_2(\varphi) = \text{diag}(-\sin\varphi, -\sin\varphi, \cos\varphi, \cos\varphi).$$

Для решения полученного уравнения по методу дискретных ординат представим интегралы, входящие в уравнение (20), принимая во внимание плоскую симметрию слоя, в виде двойной гауссовой квадратуры [15]:

$$\int_{-1}^1 \tilde{\Pi}_k^m(\mu') \tilde{L}_c^m(\tau, \mu') d\mu' \approx 0,5 \sum_{j=1}^{N/2} \omega_j \tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^+) \tilde{L}_c^m(\tau, \mu_j^+) + 0,5 \sum_{j=1}^{N/2} \omega_j \tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^-) \tilde{L}_c^m(\tau, \mu_j^-). \quad (22)$$

Здесь $\mu_j^\pm = 0,5(\zeta_j \pm 1)$, причем ζ_j , ω_j – нули и веса гауссовой квадратуры порядка $N/2$. Отметим, что обозначение μ_j^\pm соответствует нисходящему «+» и восходящему «-» потокам.

Соответственно для фиксированных значений m и c (поэтому мы будем опускать их в дальнейшей записи) получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\mu_i^\pm \frac{d}{d\tau} \tilde{L}_i^\pm(\tau) + \tilde{L}_i^\pm(\tau) = \frac{\Lambda}{4} \sum_{j=1}^{N/2} \omega_j \sum_{k=0}^K (2k+1) \tilde{\Pi}_k^m(\mu_i^\pm) \times \tilde{\chi}_k \left(\tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^+) \tilde{L}_i^+(\tau) + \tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^-) \tilde{L}_i^-(\tau) \right) + \tilde{\Delta}_i^\pm(\tau), \quad (23)$$

где

$$\tilde{L}_i^\pm(\tau) \equiv \tilde{L}_c^m(\tau, \mu_i^\pm); \quad \tilde{\Delta}_i^\pm(\tau) \equiv \tilde{\Delta}_c^m(\tau, \mu_i^\pm).$$

Определим следующие векторы и матрицы:

$$\tilde{L} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{L}_+(\tau) \\ \tilde{L}_-(\tau) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Delta} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_+(\tau) \\ \tilde{\Delta}_-(\tau) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\tilde{M} \equiv \begin{bmatrix} \mu_i^+ & 0 \\ 0 & -\mu_i^+ \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} \equiv \frac{\Lambda}{4} \begin{bmatrix} \omega_i & 0 \\ 0 & \omega_i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^K (2k+1) \tilde{\Pi}_k^m(\mu_i^+) \tilde{\chi}_k \tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^+) & \sum_{k=0}^K (2k+1) \tilde{\Pi}_k^m(\mu_i^+) \tilde{\chi}_k \tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^-) \\ \sum_{k=0}^K (2k+1) \tilde{\Pi}_k^m(\mu_i^-) \tilde{\chi}_k \tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^+) & \sum_{k=0}^K (2k+1) \tilde{\Pi}_k^m(\mu_i^-) \tilde{\chi}_k \tilde{\Pi}_k^m(\mu_j^-) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Здесь

$$\tilde{L}_\pm(\tau) = \left[I(\tau, \mu_1^\pm), Q(\tau, \mu_1^\pm), U(\tau, \mu_1^\pm), V(\tau, \mu_1^\pm), \dots, \right.$$

$$\left. I(\tau, \mu_{N/2}^\pm), Q(\tau, \mu_{N/2}^\pm), U(\tau, \mu_{N/2}^\pm), V(\tau, \mu_{N/2}^\pm) \right]^T,$$

а остальные массивы упорядочены аналогично.

Поскольку регулярная часть является гладкой функцией угла, то все матрицы конечные. Это позволяет переписать (23) в матричной форме

$$\frac{d\tilde{L}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{B}\tilde{L}(\tau) + \tilde{M}^{-1}\tilde{\Delta}(\tau), \quad \tilde{B} \equiv \tilde{M}^{-1}(\tilde{I} - \tilde{A}\tilde{W}). \quad (26)$$

Данная задача является двухточечной краевой для матричного линейного дифференциального неоднородного уравнения (26), когда задается падающее на слой излучение $\tilde{L}_+(0)$ и $\tilde{L}_-(\tau_0)$, а требуется определить выходящее из слоя отраженное $\tilde{L}_-(0)$ и прошедшее $\tilde{L}_+(\tau_0)$ излучение.

3. Регулярная часть решения

Полученная система имеет аналитическое решение в матричной форме [15]:

$$-\tilde{L}(0) + e^{\tilde{B}\tau_0}\tilde{L}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{\tilde{B}\tau}\tilde{M}^{-1}\tilde{\Delta}(\tau, \mu_0) d\tau. \quad (27)$$

Данное выражение (27) эквивалентно представлению решения в виде суммы общего решения однородной системы и частного неоднородной, используемой при анализе решения в [12, 16, 17]. Матричное представление более удобно для аналитических преобразований и при реализации решения на компьютере. При этом решение однородного уравнения

$$\tilde{L}(\tau_0) = e^{-\tilde{B}\tau_0}\tilde{L}(0) \equiv \tilde{P}(\tau_0)\tilde{L}(0): \quad \frac{d\tilde{P}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{B}\tilde{P}(\tau) \quad (28)$$

связывает излучение на нижней границе слоя с выражением на верхней и носит название пропагатора [4].

Основная проблема решения уравнения (27) связана с наличием отрицательных и положительных экспонент в решении, что приводит к быстрому ухудшению обусловленности системной матрицы. Для устранения данного эффекта воспользуемся масштабным преобразованием [15]. Матричная экспонента представима в виде [15]:

$$e^{\tilde{B}\tau_0} = \tilde{U}e^{\tilde{\Gamma}\tau_0}\tilde{U}^{-1}. \quad (29)$$

Здесь \tilde{U} – матрица собственных векторов системной матрицы \tilde{B} ; $\tilde{\Gamma} = \text{diag}(\tilde{\Gamma}_-, \tilde{\Gamma}_+)$ – диагональная матрица собственных значений, такая что $\tilde{\Gamma}_- = -\tilde{\Gamma}_+$.

Соответственно, уравнение (27) может быть переписано в форме

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} \\ e^{-\tilde{\Gamma}_+\tau_0}\tilde{u}_{21} & e^{-\tilde{\Gamma}_+\tau_0}\tilde{u}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{L}_+(0) \\ \tilde{L}_-(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{\tilde{\Gamma}_-\tau_0}\tilde{u}_{11} & e^{\tilde{\Gamma}_-\tau_0}\tilde{u}_{12} \\ \tilde{u}_{21} & \tilde{u}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{L}_+(\tau_0) \\ \tilde{L}_-(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_- \\ \tilde{J}_+ \end{bmatrix}, \quad (30)$$

где

$$\bar{J} \equiv \begin{bmatrix} \bar{J}_- \\ \bar{J}_+ \end{bmatrix} = \bar{S} \int_0^{\tau_0} e^{\bar{\Gamma}\tau} \bar{U}^{-1} \bar{M}^{-1} \bar{\Delta}(\tau, \mu_0) d\tau, \quad (31)$$

$$\bar{U}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что уравнение (30) содержит экспоненты только с отрицательными показателями. Выражая в уравнении (30) выходящее из слоя излучение $\bar{L}_-(0)$, $\bar{L}_+(\tau_0)$ через падающее $\bar{L}_+(0)$, $\bar{L}_-(\tau_0)$, получим регулярную гладкую часть решения в виде так называемых рассеивателей [4]:

$$\begin{bmatrix} \bar{L}_-(0) \\ \bar{L}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_- \\ \bar{F}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R}_- & \bar{T}_- \\ \bar{T}_+ & \bar{R}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{L}_+(0) \\ \bar{L}_-(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_- \\ \bar{F}_+ \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{J}_- \\ \bar{J}_+ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{R}_- & \bar{T}_- \\ \bar{T}_+ & \bar{R}_+ \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & -e^{-\bar{\Gamma}\tau_0} \bar{u}_{12} \\ e^{-\bar{\Gamma}\tau_0} \bar{u}_{21} & -\bar{u}_{22} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\bar{A} \equiv \begin{bmatrix} -\bar{u}_{12} & e^{-\bar{\Gamma}\tau_0} \bar{u}_{11} \\ -e^{-\bar{\Gamma}\tau_0} \bar{u}_{22} & \bar{u}_{21} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Аналогичное выражение в скалярном виде дано в [6].

Полученное решение в форме рассеивателей (32) имеет функциональный характер и позволяет вводить фотометрическое понятие коэффициента слоя яркости по отражению или пропусканию. Это дает возможность, в частности, сразу сформулировать матрично-операторный метод, позволяющий заменить два смежных слоя одним эквивалентным, описываемым выражением, идентичным (32), но с эффективными параметрами [6], а также утверждать, что решение в форме рассеивателей обладает свойством инвариантности.

Выражение (32) можно реорганизовать так, чтобы оно имело вид, подобный пропагатору (28):

$$\bar{L}(\tau_0) = \begin{bmatrix} \bar{T}_+ - \bar{R}_- \bar{T}_-^{-1} \bar{R}_+ & \bar{R}_- \bar{T}_-^{-1} \\ -\bar{T}_-^{-1} \bar{R}_+ & \bar{T}_-^{-1} \end{bmatrix} \bar{L}(0) + \bar{F}. \quad (34)$$

Подобного рода преобразование получило название звездного произведения [4]. Поскольку для пропагатора известно дифференциальное уравнение (28), то можно получить одноточечные задачи с начальными условиями матричного уравнения Риккати для элементов матрицы рассеивателей [4], например отражения:

$$\frac{d\bar{R}_-}{d\tau} = \bar{b}_2 + \bar{b}_1 \bar{R}_- + \bar{R}_- \bar{b}_1 + \bar{R}_- \bar{b}_2 \bar{R}_-;$$

$$\frac{d\bar{R}_+}{d\tau} = -\bar{b}_2 + \bar{b}_1 \bar{R}_+ - \bar{R}_+ \bar{b}_1 - \bar{R}_+ \bar{b}_2 \bar{R}_+; \quad (35)$$

$$\bar{B} \equiv \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ -\bar{b}_2 & -\bar{b}_1 \end{bmatrix},$$

и аналогично для пропускания \bar{T}_\pm .

Нетрудно видеть, что (35) эквивалентно уравнениям Амбарцумяна—Чандрасекара [16], получаемым с помощью принципа инвариантного погружения. Тем самым после выделения анизотропной части и дискретизации мы имеем одно единственное аналитическое решение в матричной форме (32).

4. Алгоритм решения

Алгоритм реализации решения (32) на компьютере должен включать в себя следующие основные операции:

- определение нулей и весов квадратурной формулы дискретизации ВУПИ (22);
- вычисление функции источников (4);
- решение задачи на собственные векторы и значения (29);
- вычисление матричных произведений (32).

В настоящее время все матричные операции оптимальным образом реализованы в виде соответствующих пакетов линейной алгебры: LAPACK, IMSL, NAG и других, эквивалентных им. Поэтому существует не только одно решение дискретизованного ВУПИ, но и один возможный алгоритм, основанный на указанных библиотеках [18]. Трудоемкость решения по сформулированному алгоритму определяется в основном размерами входящих в выражения матриц. В общем случае имеем $M \approx N \approx K$, т.е. определяется матрицей рассеяния среды. Однако в случае правильного выделения анизотропной части, когда регулярная близка к изотропному по углу распределения, соотношение зависит не от параметров среды, а определяется методом выделения анизотропной части. При этом возможна ситуация, когда $M \ll N \ll K$, что существенно улучшает эффективность алгоритма. С этих позиций различные программные реализации алгоритма расчета переноса поляризованного излучения через плоский слой отличаются методами выделения анизотропной части решения.

5. Методы выделения анизотропной части решения

5.1. Выделение прямого нерассеянного излучения

Впервые выделение анизотропной части на основе вычитания прямого нерассеянного излучения на основе закона Бутера было предложено Eddington [19], развито Milne [20] и получило завершение в работах Chandrasekhar [16]. В случае переноса поляризованного света выражение для прямого нерассеянного излучения в плоскости референции, совпадающей с плоскостью падения, имеет вид

$$\bar{L}_a(\tau, \mu, \varphi) \equiv \bar{L}_0(\tau, \mu, \varphi) = e^{-\tau/\mu_0} \bar{R}(\varphi) \bar{L}^0 \delta(\hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{f}}_0), \quad (36)$$

$$\bar{L}^0 = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ p \cos \varphi_0 \\ p \sin \varphi_0 \\ q \end{bmatrix},$$

где \vec{L}^0 – вектор-параметр Стокса падающего излучения; E_0 – нормальная облученность; p, q – степень линейной и круговой поляризации соответственно; φ_0 – азимут поляризации падающего пучка.

В соответствии с (4) в этом случае нетрудно получить функцию источников в уравнении для регулярной части

$$\vec{\Delta}(\tau, \mathbf{f}) = \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \vec{R}(\varphi) \vec{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f}_0). \quad (37)$$

Дальнейшее развитие теории переноса излучения было направлено на решение задач в реальных мутных средах типа «атмосфера» или «морская вода», для которых характерны взвешенные частицы размером много больше длины волны, что в соответствии с теорией Ми приводит к сильно анизотропному рассеянию света на них. В этих условиях излучение, рассеянное в малые углы, мало отличается от прямого излучения и данный метод становится неэффективным. Сильно анизотропное рассеяние приводит к существенному увеличению количества членов в разложении матрицы рассеяния в ряд по обобщенным сферическим функциям K , что соответственно увеличивает количество азимутальных гармоник M и размеры матриц N в решении (32). Например, $K \sim 300$ для индикатрисы рассеяния Хенъи–Гринштейна с параметром $g = 0,9$, и $K \sim 3000$ уже необходимо при $g = 0,99$.

5.2. Метод delta-M

Не желая нарушать схему теории, созданную великим Чандрасекаром, исследователи направили усилия на борьбу с анизотропией рассеяния, что привело к созданию многочисленных методов усечения индикатрисы рассеяния, среди которых, несомненно, наилучшим является метод delta-M [21]. Его нетрудно обобщить на векторное распространение поляризованного излучения. Аналогично скалярному случаю матрица рассеяния представляется в виде суммы дельта-функции и гладкой функции по углу рассеяния:

$$\vec{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 4\pi f \vec{1} \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}) + (1-f) \vec{x}^*(\mathbf{f}, \mathbf{f}), \quad (38)$$

где f – доля анизотропного рассеяния; $\vec{1}$ – единичная матрица.

Выражение (38) для греческой матрицы (12) примет вид

$$\vec{\chi}_k = f \vec{1} + (1-f) \vec{\chi}_k^*, \quad (39)$$

откуда нетрудно определить

$$\vec{\chi}_k^* = \frac{\vec{\chi}_k - f \vec{1}}{(1-f)}. \quad (40)$$

Подобное преобразование матрицы рассеяния приводит к масштабному преобразованию и замене реальных параметров среды на эффективные:

$$\tau^* = (1 - \Lambda f) \tau, \quad \Lambda^* = \frac{1-f}{1-\Lambda f} \Lambda. \quad (41)$$

Метод delta-M позволяет значительно снизить K . Однако такой подход искажает исходную краевую

задачу, что приводит иногда при неправильном выборе параметра f к сильным осцилляциям в решении и всегда к искажению распределения в области малых углов визирования, что эквивалентно пренебрежению грубой фракцией аэрозоля.

С использованием метода delta-M реализована программа DISORT [22] решения скалярного УПИ, которая находится в свободном пользовании по адресу [23].

5.3. Метод TMS

Для устранения такого рода проблем Nakajima, Tanaka [24] предложили вернуться к идее выделения анизотропной части решения на основе приближенного аналитического представления углового распределения параметров Стокса для первых двух кратностей рассеяния:

$$\vec{L}(\tau, \mathbf{f}) = \underbrace{\vec{L}_0(\tau, \mathbf{f}) + \vec{L}_1(\tau, \mathbf{f}) + \vec{L}_2(\tau, \mathbf{f})}_{\vec{L}_a(\tau, \mathbf{f})} + \vec{L}_r(\tau, \mathbf{f}). \quad (42)$$

Угловые распределения яркости первых двух кратностей рассеяния удовлетворяют уравнениям:

$$\mu \frac{\partial \vec{L}_1(\tau, \mathbf{f})}{\partial \tau} + \vec{L}_1(\tau, \mathbf{f}) = \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \vec{R}(\varphi) \vec{L}^0 \vec{x}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \vec{L}_2(\tau, \mathbf{f})}{\partial \tau} + \vec{L}_2(\tau, \mathbf{f}) = \\ & = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \vec{R}(\chi) \vec{x}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \vec{R}(\chi) \vec{L}_1(\tau, \mathbf{f}) d\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (44)$$

В соответствии с (4) модифицируются выражение для функции источников $\vec{\Delta}(\tau, \mathbf{f})$ и вектор-столбец $[\vec{F}_- \vec{F}_+]^T$ в выражении (32). Отметим, что идея расчета световых полей в атмосфере на основе точного выражения для яркости первой кратности и приближенно многократно рассеянного была предложена В.В. Соболевым [25].

Уравнения (43) и (44) имеют аналитические решения. Однако решение уравнения (44) представляет собой трехкратный интеграл, время вычисления которого существенно превышает расчет выражения (32). Однако для выделения анизотропной части решения не требуется угловое распределение яркости для всех углов визирования, достаточно только в области малых углов от направления падения. Поэтому на практике используется малоугловое приближение [26, 27]. Это приближение эквивалентно замене μ в (43), (44) на μ_0 .

С использованием метода TMS реализована программа Pstar [28] решения ВУПИ, которая находится в свободном пользовании по адресу [29].

5.4. Малоугловая модификация метода сферических гармоник

Естественным обобщением метода TMS является включение в $\vec{L}_a(\tau, \mathbf{f})$ яркостей всех кратностей рассеяния на основе малоуглового приближения

[13, 27, 30]. Наиболее общей формой малоуглового приближения является малоугловая модификация метода сферических гармоник — модифицированные сферические гармоники (МСГ).

В этом случае анизотропная часть углового распределения параметров Стокса в SP-представлении раскладывается в ряд по обобщенным сферическим функциям относительно направления падения \mathbf{f}_0 :

$$\bar{L}_a(\tau, \mathbf{f}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \bar{Y}_k^m(\nu) \bar{f}_k^m(\tau) \exp(im\psi), \quad (45)$$

где $\nu = (\mathbf{f}, \mathbf{f}_0)$; ψ — азимут \mathbf{f} в системе относительно направления \mathbf{f}_0 .

Угловой спектр $\bar{f}_k^m(\tau)$ анизотропной части углового распределения является медленной монотонно убывающей функцией индекса k , что позволяет допустить непрерывную зависимость $\bar{f}^m(k, \tau)$, разложить ее в ряд Тейлора по k с сохранением двух первых [13, 27, 30] членов, что приведет к системе уравнений для коэффициентов ряда (45):

$$\mu_0 \frac{\partial \bar{f}^m(\tau, k)}{\partial \tau} + (\bar{1} - \Lambda \bar{x}_k) \bar{f}^m(\tau, k) = \bar{0}, \quad (46)$$

имеющей простое аналитическое решение

$$\bar{f}^m(\tau, k) = \exp(-(\bar{1} - \Lambda \bar{x}_k)\tau/\mu_0) \bar{f}^m(0, k). \quad (47)$$

Отметим, что (46) эквивалентно замене в ВУПИ (1) μ на μ_0 , что определяет выделение анизотропной части на основе МСГ как развитие метода TMS.

После перехода в МСГ к SP-представлению анизотропная часть решения в системе координат относительно нормали к границе слоя примет вид [13, 27, 30]:

$$\bar{L}_a(\tau, \mathbf{f}, \mathbf{f}_0) = \sum_{c=1,2} \sum_{m=0}^M (2 - \delta_{m,0}) \bar{\Phi}_c(m\varphi) \times \\ \times \sum_{k=0}^K \frac{2k+1}{4\pi} \bar{\Pi}_k^m(\mu) \bar{Z}_k(\tau) \bar{\Pi}_k^m(\mu_0) \bar{D}_c \bar{L}^0, \quad (48)$$

где $\bar{D}_1 = \text{diag}(1 \ 1 \ 0 \ 0)$, $\bar{D}_2 = \text{diag}(0 \ 0 \ 1 \ 1)$; $\bar{Z}_k(\tau) = \exp(-\bar{d}_k \tau/\mu_0)$, $\bar{d}_k = \bar{1} - \Lambda \bar{x}_k$.

После подстановки (48) в (4) и некоторых преобразований [13, 27, 30] получается выражение для функции источников

$$\mu_0 \bar{\Delta}_c^m(\tau, \mu_i) = \sum_{k=m}^K (2k+1)(\mu_i - \mu_0) \bar{\Pi}_m^k(\mu_i) \bar{d}_k \bar{Z}_k(\tau) \times \\ \times \bar{\Pi}_m^k(\mu_0) \bar{D}_c \bar{L}_0 + \bar{A}_{K+1}^m \left[\bar{\Pi}_m^K(\mu_i) \bar{d}_{K+1} \bar{Z}_{K+1}(\tau) \bar{\Pi}_m^{K+1}(\mu_0) - \right. \\ \left. - \bar{\Pi}_m^{K+1}(\mu_i) \bar{d}_K \bar{Z}_K(\tau) \bar{\Pi}_m^K(\mu_0) \right] \bar{D}_c \bar{L}_0, \quad (49)$$

где

$$[\bar{A}_m^k]_{rs} = \frac{1}{k} \sqrt{(k^2 - m^2)(k^2 - s^2)} \delta_{rs}.$$

Описанный подход решения скалярного УПИ реализован в виде кода MDOM, а решения ВУПИ — в виде кода MVDOM [30], которые находятся в свободном пользовании по адресу [31]. Как показали тестовые расчеты, регулярная часть решения в этом случае является почти изотропной функцией угловых переменных, что существенно уменьшает M , N , и они практически не зависят от K .

5.5. Численное сравнение эффективности различных методов выделения анизотропной части решения

Сравнение программ по времени счета является достаточно трудной задачей, поскольку одновременно требуется равная точность. Однако на точность расчетов влияет множество факторов, многие из которых лишь опосредованно связаны с решением ВУПИ, как, например, вычисление обобщенных сферических функций. При сравнении MDOM и DISORT максимальное отличие было около 10^{-4} , но при увеличении M разница в результатах также увеличивалась, что мы связываем с увеличением ошибки в вычислениях сферических функций. Поэтому очень важно найти оптимальное соотношение между числами N , M и K . К сожалению, очень трудно здесь сформулировать какое-то общее правило.

Код DISORT2.0 использует оба метода — delta-M и TMS, что существенно улучшило расчет углового распределения яркости для сильно анизотропного рассеяния. На рис. 1 представлено сравнение расчетов для индикатрисы Хенри—Гринштейна с параметром $g = 0,99$. При этом MDOM дает гладкое решение с $N = 401$, $M = 8$ менее чем 10 с, в то время как в результатах расчета DISORT с $N = 300$ для времени счета более 700 с еще сохраняются осцилляции.

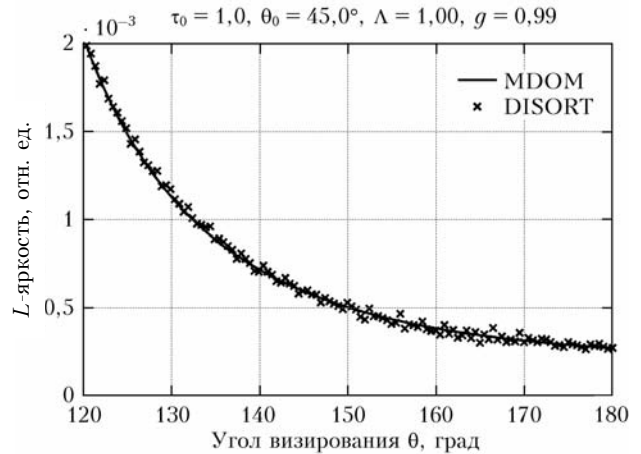


Рис. 1. Сравнение программ MDOM и DISORT (отражение)

Необходимо отметить, что время счета DISORT можно существенно уменьшить, если сделать некоторые изменения в программе ZEROIT, — при этом в указанном случае время счета уменьшается примерно до 100 с. В этом случае для гладких индикатрис рассеяния $g < 0,9$ обе программы приблизительно одинаковы по всем параметрам.

Очень похожие результаты имеем для векторного излучения при сравнении Pstar и MVDOM, которое мы провели для двух случаев:

1) сравнительно гладкая матрица рассеяния для логнормального распределения с параметрами $r_0 = 5$, $s = 0,4$; $\theta_0 = 85^\circ$; $\tau_0 = 1,0$ (рис. 2);

2) сильно анизотропная матрица рассеяния Water Cloud C1, $\theta_0 = 85^\circ$; $\tau_0 = 10,0$ (рис. 3).

В первом случае обеим программам требуется приблизительно одинаковое время (около 15 с). Во втором случае с увеличением анизотропии рассеяния и толщи среды разница в решениях становится заметной. При этом для MVDOM время счета около 50 с для $N = 121$, $M = 32$ и $K = 120$; программа Pstar требует 150 с при 30 потоках. С учетом нашего анализа и сравнения с DISORT можно утверждать, что

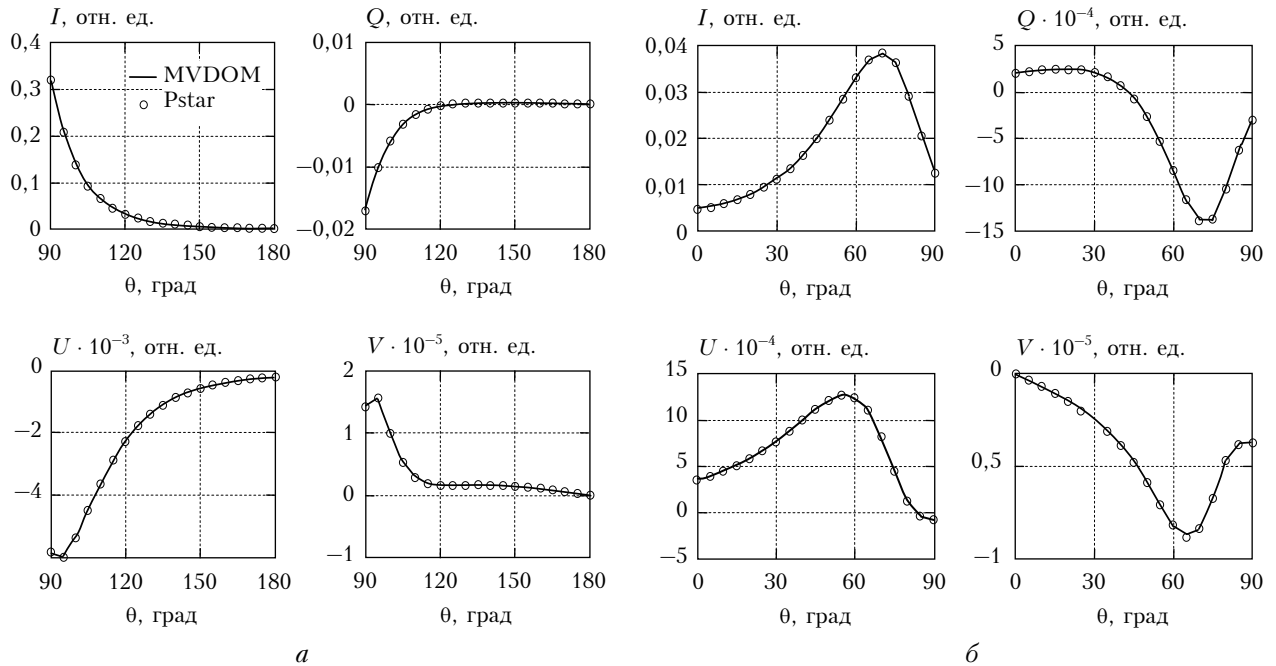


Рис. 2. Сравнение программ MVDOM и Pstar: логнормальное распределение с параметрами $r_0 = 5$, $s = 0,4$; $\theta_0 = 85^\circ$, $\tau_0 = 1,0$, $\varphi = 30^\circ$: *a* – восходящее излучение; *б* – нисходящее излучение

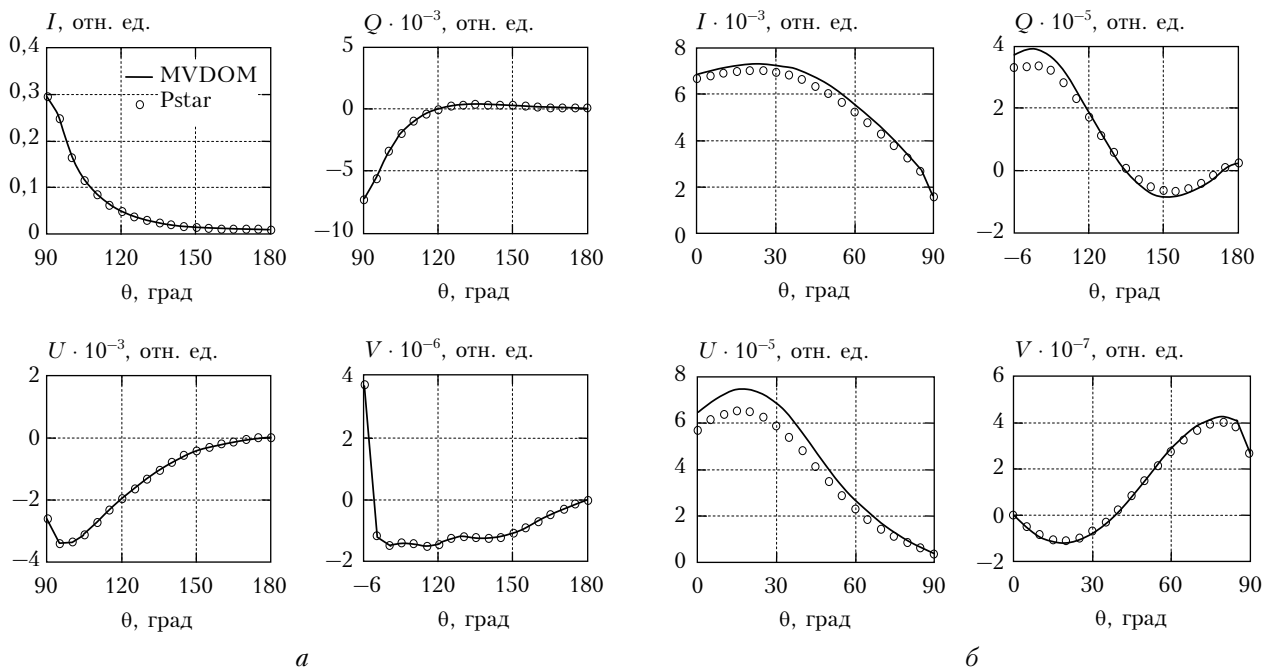


Рис. 3. Сравнение программ MVDOM и Pstar: модель среды – Water Cloud C1; $\theta_0 = 85^\circ$, $\tau_0 = 10,0$, $\varphi = 30^\circ$: *a* – восходящее излучение; *б* – нисходящее излучение

точность MCG существенно лучше TMS для сильной анизотропии и больших толщ.

6. Влияние аппаратно-программных средств на эффективность алгоритма

С одной стороны, MCG показал себя наиболее эффективным методом выделения анизотропной части решения, а с другой, программа MVDOM является нашей разработкой. Это определило то, что влияние различных аспектов на эффективность расчета переноса излучения через слой мы исследовали на основе MVDOM.

Прежде всего отметим, что независимо от способа выделения анизотропной части решения при реализации (32) необходимо решить три основные проблемы линейной алгебры: умножение матриц, решение задачи на собственные векторы и значения и вычисление обратной матрицы. Такие операции на сегодня наиболее оптимально реализованы в пакетах линейной алгебры: LAPACK, IMSL, NAG и некоторых других. Эти библиотеки существуют для любой платформы. Однако существуют специализированные библиотеки, оптимизированные для определенного процессора. Например, библиотека MKL (Math Kernel Library) [32] есть LAPACK, оптимизированная производителем Intel для процессоров Intel. MKL имеет версии для обеих операционных систем: Windows и Linux. Важнейшими достоинствами MKL являются поддержка многоядерности и многопроцессорности и автоматическое распараллеливание всех операций, что существенно увеличивает скорость выполнения программы. В нее включено векторное выполнение элементарных операций в параллельном режиме. Специализированные математические пакеты, такие как Matlab, Maple, Mathematica, используют MKL, играя роль обертки библиотеки.

Существенное ускорение и более рациональное использование памяти возможно при использовании алгоритмов разреженных матриц (sparse matrices). При работе с матрицами, у которых значительное количество нулевых элементов, эффективно хранить только ненулевые элементы и дополнительную информацию об индексах. Существует несколько форматов хранения разреженных матриц: compressed sparse row (CSR) format, compressed sparse column format (CSC) и Coordinate Format. Выбор формата определяется типом операций с матрицами: например CSC формат наиболее удобен, если элементы матрицы хранятся в памяти по колонкам.

Программа MVDOM была реализована как на языке FORTRAN, так и в системе Matlab. Влияние различных факторов на время счета программы сведено в таблицу для двух тестов: тест № 1: $N = 101$, $K = 500$, $M = 32$; тест № 2: $N = 101$, $K = 1000$, $M = 32$. Тесты выполнялись на компьютере IntelCore 2 Duo 3 ГГц, 2 Гб RAM, Intel Fortran Compiler 11.1 с библиотекой MKL 10.2. Использовались два компилятора (gfortran и ifort) с полной оптимизацией.

Отметим, что библиотека MKL использует эффективно все вычислительные ядра компьютера (2 ядра

в нашем случае), что уменьшает время счета вдвое. Еще более эффективно использование алгоритма разреженных матриц для вычисления функции источников (49) и операций с ней — в нашем случае в 4–6 раз.

Сравнение времени счета для двух тестов

Условия реализации кода	Время счета I, с	Время счета II, с
gfortran + LAPACK	240	530
gfortran + LAPACK + optimization	230	505
ifort + LAPACK	210	490
ifort + MKL	115	250
ifort + MKL + optimization	105	230
ifort + MKL + optimization + sparse matrix	33	44
MATLAB 2010b	27	45
MATLAB 2010b + CUDA	22	33

Такое влияние объяснимо — все тесты относятся к аэрозольному рассеянию, имеющему блочно-диагональный тип матрицы рассеяния, что определяет не менее половины элементов матриц нулевыми. Нами проведено отдельное исследование эффективности использования алгоритма разреженных матриц: на рис. 4 показана зависимость времени счета от K . Благодаря этому алгоритму операции с двумерными массивами становятся эквивалентно одномерными, что определяет линейную зависимость времени счета от K в отличие от K^2 в обычном случае.

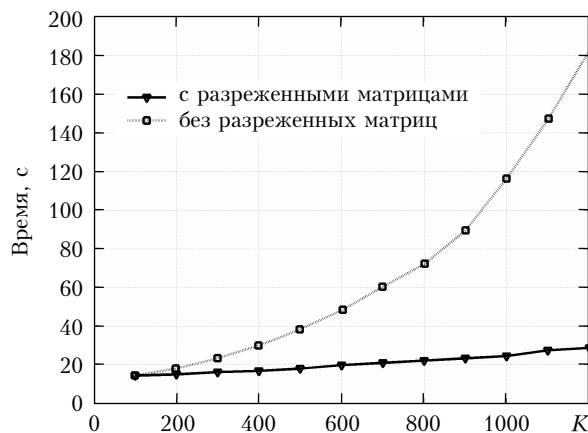


Рис. 4. Зависимость времени счета от K

Перспективным средством ускорения кода является использование графических процессоров общего назначения (graphics processing units, GPUs). Программно-аппаратная архитектура (Compute Unified Device Architecture, CUDA) позволяет проводить вычисления на графических процессорах nVIDIA GPUs, что открывает возможность проведения стандартных процедур библиотеки LAPACK в рамках архитектуры CUDA. Для этого существует специальная реализация LAPACK для графических карт — CULA. MATLAB 2010b поддерживает nVIDIA CUDA GPUs, однако достоинства вычислений на GPU существенны при использовании больших массивов,

в противном случае вычисления на CPU более эффективны. В нашем коде MVDOM использовался алгоритм выделения анизотропии на основе МСГ, что существенно снизило размеры всех массивов. При тестировании нам не приходилось брать число потоков N более 300. Оценка времени счета с помощью профайлера показывает, что половина времени алгоритма уходит на задачу на собственные значения. К сожалению, эта процедура не реализована в пакете MATLAB GPU. Нам удалось снизить время счета на 20% за счет перемножения матриц на nVIDIA GeForce 480 GTX GPU.

Заключение

Дискретизованное ВУПИ для плоского слоя имеет единственное аналитическое решение в матричной форме. Высокий уровень оптимизации пакетов линейной алгебры допускает единственный алгоритм решения ВУПИ на компьютере. Различные реализации отличаются методами выделения анизотропной части решения, среди которых наиболее эффективным является метод на основе МСГ. При реализации алгоритма необходимо использовать алгоритм разреженных матриц, а при использовании процессора Intel очень существенно применение библиотеки MKL.

1. Yokota T., Oguma H., Morino I., Inoue G. A nadir-looking «SWIR» sensor to monitor CO₂ column density for Japanese GOSAT project // Proc. XXIV Int. Sympos. on Space tech. Science. Japan: Miyazaki, 2004. P. 887.
2. Sokoletsky L.G., Nikolaeva O.V., Budak V.P., Bass L.P., Lunetta R.S., Kuznetsov V.S., Kokhanovsky A.A. A comparison of numerical and analytical radiative-transfer solutions for plane albedo of natural waters // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2009. V. 110, N 13. P. 1132–1146.
3. Kokhanovsky A.A., Budak V.P., Cornet C., Duan M., Emde C., Katsev I.L., Klyukov D.A., Korkin S.V., C-Labonnote L., Mayer B., Min Q., Nakajima T., Ota Y., Priklach A.S., Rozanov V.V., Yokota T., Zege E.P. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2010. V. 111, is. 12–13. P. 1931–1946.
4. Flatau P.J., Stephens G.L. On the fundamental solution of the radiative transfer equation // J. Geophys. Res. D. 1988. V. 93, N 9. P. 11037–11050.
5. Doicu A., Trautmann T. Discrete-ordinate method with matrix exponential for a pseudo-spherical atmosphere. Scalar case // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2009. V. 110, is. 1–2. P. 146–158.
6. Doicu A., Trautmann T. Discrete-ordinate method with matrix exponential for a pseudo-spherical atmosphere. Vector case // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2009. V. 110, is. 1–2. P. 159–172.
7. Budak V.P., Klyukov D.A., Korkin S.V. Complete matrix solution of radiative transfer equation for pile of horizontally homogeneous slabs // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2011. V. 112, is. 7. P. 1141–1148.
8. Hovenier J.W., Vander Mee C., Domke H. Transfer of polarized light in planetary atmospheres. Basic concepts and practical methods. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. 258 p.
9. Wang M.C., Guth E. On the theory of multiple scattering, particularly of charged particles // Phys. Rev. 1951. V. 84, N 6. P. 1092–1111.
10. Krylov V.I. Approximate calculation of integrals. N.Y.: Macmillan, 1962. 357 p.
11. Kuščer I., Ribarič M. Matrix formalism in the theory of diffusion of light // Opt. Acta. 1959. V. 6, N 1. P. 42–51.
12. Siewert C.E. A discrete-ordinates solution for radiative-transfer models that include polarization effects // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2000. V. 64, is. 3. P. 227–254.
13. Budak V.P., Korkin S.V. On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transf. 2008. V. 109, N 2. P. 220–234.
14. Sykes J.B. Approximate integration of the equation of transfer // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1951. V. 111, N 4. P. 378–386.
15. Karp A.H., Greenstadt J., Fillmore J.A. Radiative transfer through an arbitrary thick scattering atmosphere // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1980. V. 24, N 5. P. 391–406.
16. Chandrasekhar S. Radiative transfer. London: Oxford University Press, 1950. 393 p.
17. Thomas G.E., Stamnes K. Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean. Cambridge: University Press, 2002. 540 p.
18. Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing. Cambridge: University Press, 2007.
19. Eddington A.S. On the radiative equilibrium of the stars // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1916. V. 77. P. 16–35.
20. Milne E.A. The reflection effect in eclipse binaries // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1926. V. 87. P. 43–55.
21. Wiscombe W.J. The delta-M method. Rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase functions // J. Atmos. Sci. 1977. V. 34, N 9. P. 1408–1422.
22. Stamnes K., Tsay S.-C., Wiscombe W., Jayaweera K. A numerically stable algorithm for discrete-ordinate-method radiative transfer in multiple scattering and emitting layered media // Appl. Opt. 1988. V. 27, is. 12. P. 2502–2509.
23. URL: ftp://climate1.gsfc.nasa.gov/wiscombe/Multiple_Scatt
24. Nakajima T., Tanaka M. Algorithms for radiative intensity calculations in moderately thick atmos using a truncation approximation // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1988. V. 40, N 1. P. 51–69.
25. Sobolev V.V. A Treatise on Radiative Transfer. Princeton. N.Y.: Van Nostrand, 1963. 319 p.
26. Kisselev V. Peaked phase function approximation in the solution of radiative transfer equation // Proc. SPIE. 2005. V. 5829. P. 63–73
27. Budak V.P., Kozelskii A.V., Savitskii E.N. Improvement of the spherical harmonics method convergence at strongly anisotropic scattering // Atmos. Ocean Opt. J. 2004. V. 17, N 1. P. 28–33.
28. Ota Y., Higurashi A., Nakajima T., Yokota T. Matrix formulations of radiative transfer including the polarization effect in a coupled atmosphere–ocean system // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2010. V. 111, is. 6. P. 878–894.
29. URL: <http://www.ccsr.u-tokyo.ac.jp/~clastr/>

30. *Budak V.P., Klyukov D.A., Korkin S.V.* Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // Light Scattering Reviews 5. Single Light Scattering and Radiative Transfer

/ Ed. A.A. Kokhanovsky. Springer Praxis Books, 2010. P. 147–204.

31. URL: <http://www.svet-mpei.org>

32. URL: <http://software.intel.com/en-us/intel-mkl>

V.P. Budak, D.S. Efremenko, O.V. Shagalov. **Comparative analysis of algorithms of vectorial radiative transfer equation for slab by solution efficiency.**

The numerical solution of the vectorial radiative transfer equation (VRTE) is possible only after its discretization, which is impossible without the separation of anisotropic part in the solution, including all the singularities. Discretized VRTE for the turbid medium slab has unique analytical solution in the matrix form. Modern packages of matrix (linear) algebra allow only one possible algorithm of VRTE computer solution. Various realizations of such algorithm differ by the method of the solution anisotropic part separation. Methods of the anisotropic part separation are analyzed in the paper. It is shown that the most effective method is based on the small angle modification of the spherical harmonics (MSH). The codes, created by the authors, of these methods in the simple situation in order to define the effect of the method on the code efficiency are analyzed. The influence of different properties of hard and software on the code, based on MSH, is analyzed more in detail.