

Ф.Ю. Канев, В.П. Лукин, А.В. Ершов

СОПОСТАВЛЕНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА И ГРАДИЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКОМ

Проводится сопоставление эффективности и быстродействия коррекции теплового самовоздействия на основе таких алгоритмов управления пучком, как апертурное зондирование, модификация апертурного зондирования и симплекс-метод. Так как все перечисленные алгоритмы могут рассматриваться как методы определения экстремума, их характеристики сравниваются на основе задачи определения максимума аналитически заданной функции. Сделанные при этом выводы проверяются при анализе управления пучком в линейной среде (задание оптимальной фокусировки) и в задаче компенсации тепловых искажений излучения.

1. Введение

Так как схема адаптивной системы зависит от алгоритма управления пучком, одной из основных проблем начального этапа проектирования системы является выбор алгоритма коррекции искажений. В опубликованных к настоящему времени статьях можно найти анализ характеристик таких алгоритмов управления, как обращение волнового фронта [1], фазовое сопряжение [2], апертурное зондирование [3], априорная коррекция [4], симплекс-метод [5].

Все перечисленные методы не лишены недостатков, что ограничивает область их применения. В частности, недостаток фазового сопряжения – это нестабильность коррекции, развивающаяся при компенсации искажений пучков с высокой интенсивностью [6], к недостаткам градиентных методов следует отнести резкое снижение быстродействия при увеличении числа степеней свободы исполнительного элемента (адаптивного зеркала).

Стабильность градиентных алгоритмов в сочетании с высоким быстродействием характерна для симплекс-метода, развитие которого и сравнение с традиционными алгоритмами выполнено в серии работ [5, 7, 8], авторами которой в численных экспериментах иллюстрируются преимущества симплекса.

При проведении аналогичных численных исследований нами были получены несколько отличающиеся результаты. В частности, мы показали, что за счет оптимизации апертурного зондирования возможно значительное увеличение его быстродействия. Более того, в результате модификации апертурного зондирования, предложенной в [9], возможно получить алгоритм, имеющий характеристики, близкие к симплекс-методу.

Как можно видеть из представленного краткого обзора, проблему выбора алгоритма коррекции атмосферных искажений невозможно считать окончательно решенной, поэтому в настоящей статье мы повторно проводим сравнение некоторых методов компенсации самовоздействия.

2. Модель адаптивной системы

На рис. 1 представлено схематичное изображение адаптивной системы, модель которой была использована в численных экспериментах.

Распространение излучения в среде в приближении стационарной ветровой рефракции описывалось уравнениями [1, 2, 3]:

$$\begin{cases} 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E + 2 \frac{k^2}{n_0} \frac{\partial n}{\partial T} TE, \\ V \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha I}{\rho C_p}, \end{cases} \quad (1)$$

первое из которых – уравнение распространения, записанное в параболическом приближении, второе – уравнение взаимодействия излучения со средой. Используются следующие обозначения: E – комплексная амплитуда поля, V – скорость ветра (в нашей задаче это постоянная величина), T – температура среды. Остальные обозначения являются общепринятыми.

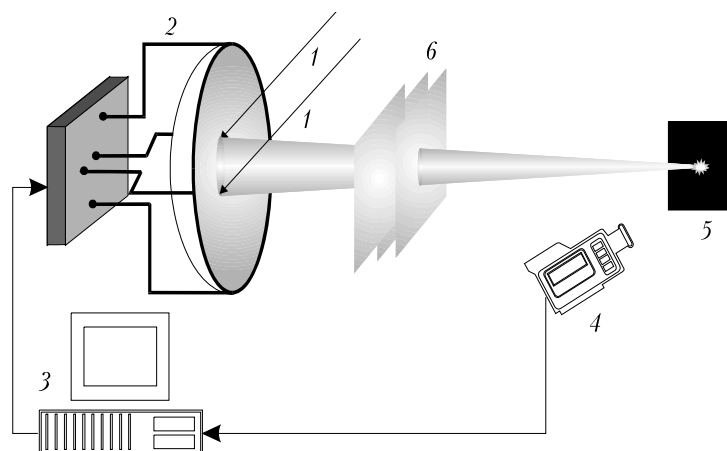


Рис. 1. Блок-схема адаптивной системы: лазерный пучок 1, адаптивный корректор 2, устройство формирования сигналов управления 3, устройство ввода данных, характеризующих распределение поля, объект фокусировки 5, распределенная тепловая линза, моделируемая набором экранов 6

Полагалось, что направление распространения пучка совпадает с осью OZ системы координат, пространственным масштабом в направлении распространения являлась дифракционная длина z_d , в поперечном направлении – начальный радиус пучка a_0 .

Нелинейное взаимодействие излучения и атмосферы характеризовалось параметром

$$R = \frac{2k^2 a_0^2 \alpha I_0}{n_0 \rho C_p V} \frac{\partial n}{\partial T}. \quad (2)$$

Здесь нужно отметить, что в квазистационарном приближении, используемом здесь для описания взаимодействия, переменная времени отсутствует в явном виде. Это существенно упрощает построение численной модели, но характеризовать быстродействие системы возможно только по косвенным признакам. В рассматриваемой задаче такой косвенной характеристикой являлось число итерационных шагов (точнее, число вызовов целевой функции управления), необходимое для достижения экстремума.

Адаптивное зеркало моделировалось набором низших полиномов Цернике (наклон, фокусировка, астигматизм, т.е. три степени свободы), также использовалась модель упругой пластины [10], деформируемой 4 или 8 приводами.

3. Алгоритмы управления пучком

Апертурное зондирование

Согласно этому алгоритму переход от $n - 1$ к n итерации осуществляется по формуле

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{n-1} + \alpha \mathbf{grad} J, \quad (3)$$

где $\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_{n-1}$ – векторы координат управления на n и $n - 1$ итерациях; J – целевая функция управления; \mathbf{grad} – градиент целевой функции, вычисленный по координатам управления; α – величина градиентного шага, которая уменьшалась на «неудачных» (приводящих к уменьшению J) итерациях.

В оптической задаче компонентами вектора координат управления \mathbf{F} в зависимости от используемой модели корректора являлись коэффициенты полиномов или смещения приводов зеркала, в качестве целевой функции использовался критерий фокусировки J , пропорциональный мощности излучения, попадающей в апертуру с заданным радиусом.

Так как алгоритм апертурного зондирования построен на основе градиентного метода определения экстремума (метод пробных вариаций), мы также рассматривали задачу поиска максимума аналитически заданной N -мерной функции с использованием формулы (3). В этом случае компонентами вектора \mathbf{F} являлись координаты текущей точки, критерием J – значение функции в этой точке.

Модификация апертурного зондирования

В этом алгоритме итерационная процедура выполняется по формуле [9]

$$x_i^{(n)} = x_i^{(n-1)} + \alpha \operatorname{sign}\left(\frac{\partial J}{\partial x_i}\right). \quad (4)$$

Здесь sign – функция знака. Такая запись означает, что производные $\partial J / \partial x_i$ определяют только направление движения, смещение полностью задается параметром α , т.е. итерационные шаги являются одинаковыми, величина шага не зависит от «крутизны» функции.

Симплекс-метод

Согласно этому алгоритму движение к экстремуму осуществляется последовательным отражением некоторой фигуры, называемой симплексом, которая в N -мерном пространстве координат управления имеет $(N + 1)$ вершину. В одномерном случае симплекс является отрезком прямой, в двухмерном – треугольником, в трехмерном – тетраэдром.

Шаг от $(n - 1)$ -го симплекса к n -у производится при зеркальном отражении «наихудшей» вершины относительно грани, в которой эта вершина отсутствует. Многократное отражение «наихудших» вершин приводит к движению центра симплекса к экстремуму. Пример движения для целевой функции, зависящей от двух координат, приведен на рис. 2. Здесь для первого треугольника «худшая» вершина – это b , отражение выполняется относительно грани $c - a$.

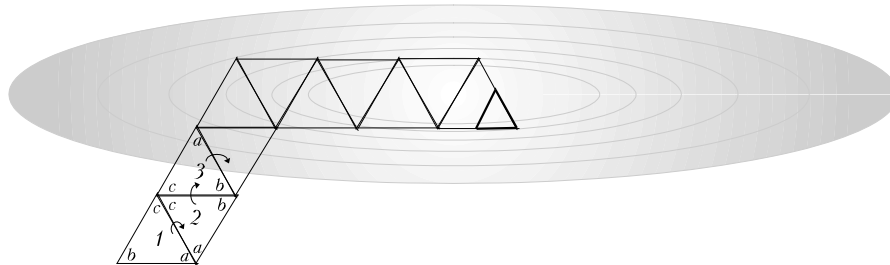


Рис. 2. Движение симплекса к экстремуму

4. Определение характеристик алгоритмов на примере задачи поиска экстремума аналитически заданной функции

Прежде чем перейти к проблеме коррекции нелинейных искажений, можно сделать предварительные выводы о быстродействии алгоритмов, рассмотрев задачу поиска экстремума аналитически заданной функции, например следующей:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_N^2}{a_N^2} = f^2(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (5)$$

Поиск проводился в области положительных значений (определение максимума), были рассмотрены все три алгоритма, описанные в п. 3. Число измерений функции N изменялось от 1 до 8.

Зависимость числа вызовов функции N_{call} от величины градиентного шага α иллюстрируется данными, приведенными на рис. 3. Результаты представлены для одномерной и восьми-мерной функций. Можно видеть, что в обоих случаях характер зависимости N_{call} от α приблизительно одинаковый. В одномерном случае наиболее низкое быстродействие характерно для метода пробных вариаций (кривая 1, рис. 3, а), параметры симплекса и модификации метода пробных вариаций близки (кривые 2 и 3). В то же время имеется интервал значений α , в кото-

ром быстродействие всех алгоритмов максимально (метод пробных вариаций и в этой области обеспечивает наиболее низкие результаты). Это означает, что для получения высокого быстродействия для каждого из рассмотренных алгоритмов необходимо проводить оптимизацию длины градиентного шага. Особенно важное значение оптимизация имеет для метода пробных вариаций, для которого наблюдается наиболее резкий рост N_{call} при выходе за границы интервала оптимальных значений, а сам интервал наиболее узкий. При переходе к 8 измерениям увеличивается число вызовов целевой функции, но отмеченные выше характерные особенности сохраняются.

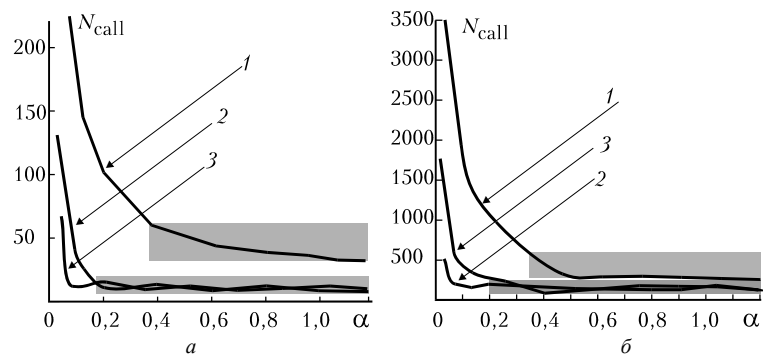


Рис. 3. Зависимость быстродействия алгоритмов поиска экстремума от параметра α (на рисунке выделена область оптимальных значений параметра). a – функция одной переменной, b – функция восьми переменных. Алгоритмы: 1 – метод пробных вариаций, 2 – модификация метода пробных вариаций, 3 – симплекс-метод

Зависимость N_{call} от размерности функции (5) при изменении числа независимых координат от 1 до 8 представлена на рис. 4. Значения α были выбраны соответствующими оптимальному интервалу (рис. 4, a), также рассматривался случай, когда длина градиентного шага не является оптимальной (рис. 4, b). Можно видеть, что наиболее резкое увеличение N_{call} характерно для метода пробных вариаций, оставшихся два алгоритма обеспечивают приблизительно одинаковое быстродействие, которое уменьшается незначительно при увеличении размерности от 1 до 8.

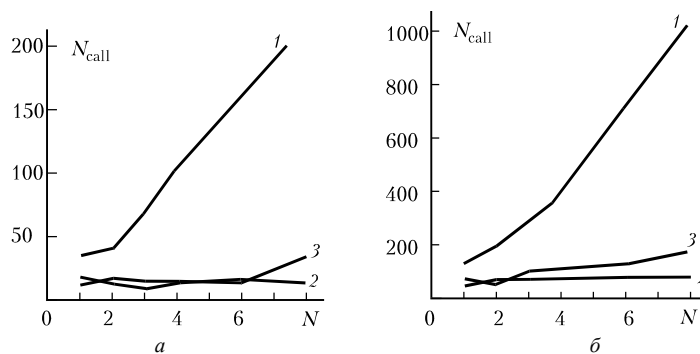


Рис. 4. Зависимость быстродействия алгоритмов от размерности базиса управления. Номера кривых и размерность функций соответствуют рис. 3

Также нами была определена зависимость быстродействия от задаваемой точности определения экстремума. Результаты представлены на рис. 5. В обоих случаях размерность N функции (5) выбиралась равной 8. Рис. 5, a соответствует оптимальным значениям α , рис. 5, b – неоптимальным значениям.

Наиболее резкий рост N_{call} при увеличении точности наблюдается для метода пробных вариаций. Результаты применения симплекса и алгоритма (4) приблизительно одинаковы. Здесь следует также отметить, что при уменьшении задаваемой точности быстродействие алгоритмов в интервале оптимальных значений α и за его границами отличается достаточно мало. Это означает, что при малой точности определения экстремума оптимизация длины градиентного шага не является обязательной.

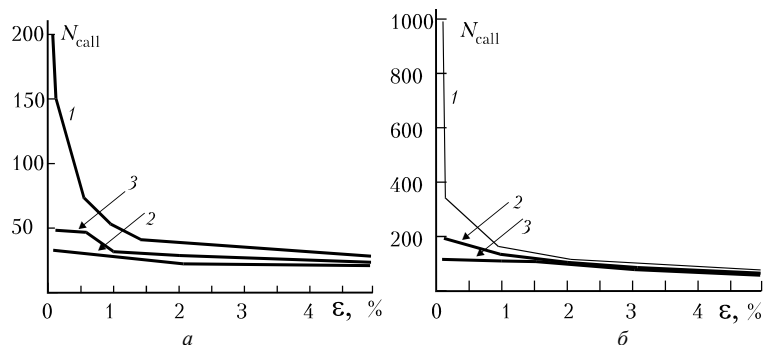


Рис. 5. Зависимость быстродействия алгоритмов от точности определения экстремума. Номера кривых и размерность функций соответствуют рис. 3

5. Управление пучком в линейной среде

Адаптивное управление пучком в линейной среде (т.е. когда параметр нелинейности R , задаваемый формулой (2), равен нулю) – это поиск фазовой поверхности, соответствующей экстремальным значениям целевой функции (в рассматриваемом примере – критерию фокусировки). Решение подобной задачи позволяет, с одной стороны, проверить правильность выводов, сделанных в п. 4, с другой – приблизительно определить оптимальные параметры для управления пучком в нелинейной среде.

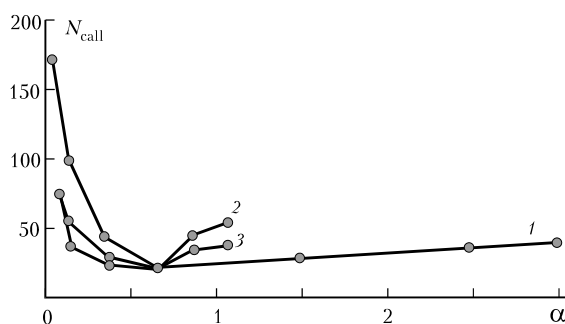


Рис. 6. Быстродействие управления в линейной среде в зависимости от параметра α . Алгоритмы: 1 – апертурное зондирование, 2 – модификация апертурного зондирования, 3 – симплекс-метод

Зависимость числа вызовов целевой функции от параметра α и размерности базиса управления иллюстрируется на рис. 6 и 7. Как и в предыдущем случае (при определении экстремума аналитически заданной функции), можем выделить интервал оптимальных значений α , в котором все алгоритмы обеспечивают приблизительно одинаковое быстродействие. Для $\alpha \neq \alpha_{\text{опт}}$ N_{call} резко увеличивается, при этом наименьшее быстродействие наблюдается для апертурного зондирования.

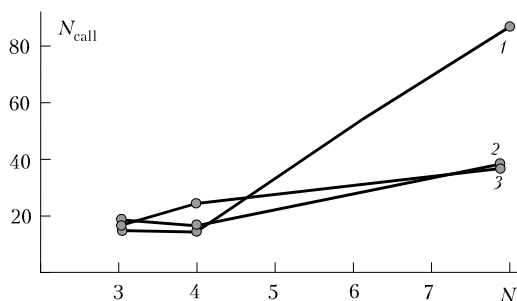


Рис. 7. Быстродействие управления в линейной среде в зависимости от числа степеней свободы адаптивного корректора. Номера кривых соответствуют рис. 6

При увеличении размерности базиса управления наиболее резкое увеличение числа вызовов снова наблюдается при использовании апертурного зондирования (см. рис. 7).

Результаты применения симплекс-метода для управления пучком в линейной среде

Модель корректора: набор полиномов							
α	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
N_{call}	76	41	27	28	26*	34	31
J	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79
Модель корректора: зеркало с 4 приводами							
α	0,2	0,5	1	5	15	18	20
N_{call}	80	63	41	26*	33	21	37
J	0,57	0,63	0,64	0,64	0,64	0,64	0,64
Модель корректора: зеркало с 8 приводами							
α	0,1	0,2	0,5	1	5	10	12
N_{call}	–	68	62	24*	36	51	–
J	–	0,51	0,55	0,54	0,65	0,66	–

* Минимальное число вызовов целевой функции

Дополнительные особенности, которые не проявились в задаче, рассмотренной в п. 4, иллюстрируются результатами, представленными в табл. 1. Данные приведены для симплекс-метода, характеристики остальных алгоритмов приблизительно равны.

Из приведенных данных видно, что эффективность управления зависит от типа используемого корректора. При оптимальных значениях градиентного шага для зеркала с 4 приводами значения J равны 0,64, для набора полиномов – 0,79.

Следующей особенностью оптической задачи является зависимость результирующих значений J от α , проявившаяся при использовании зеркал. Так, для зеркала с 4 приводами при переходе от неоптимальных к оптимальным значениям α критерий фокусировки увеличился от 0,57 до 0,64 (10%). Для зеркала с 8 приводами соответствующее увеличение составило 23% (от 0,51 до 0,66).

Для объяснения отмеченной особенности необходимо рассмотреть условие окончания коррекции. Во всех алгоритмах управление прекращается, если значение целевой функции на n -м шаге отличается не более чем на ε от значения функции на $n-1$ шаге (т.е. целевая функция не увеличивается). Так, в случае, если параметр α выбран значительно отличающимся от оптимального и целевая функция имеет «плоскую» вершину, с приближением к экстремуму приращение J на каждом из итерационных шагов уменьшается. При $\Delta J < \varepsilon$ управление прекращается, несмотря на то, что экстремум не достигнут. По-видимому, этим можно объяснить уменьшение критерия при «неудачном» выборе параметра α .

6. Коррекция стационарных искажений когерентных пучков

Основные особенности управления в линейной среде сохраняются и при возникновении на трассе распространения пучка тепловой линзы (данные представлены в табл. 2). При этом результирующие значения критерия фокусировки несколько меньше, чем в линейной среде (т.е. коррекция не является полной), а число вызовов целевой функции больше. Но, как и в предыдущем случае, можно выделить интервал оптимальных значений длины градиентного шага и области, где параметр α не является оптимальным. Для $\alpha \neq \alpha_{\text{opt}}$ быстродействие симплекса и модификации апертурного зондирования приблизительно одинаково; если параметр выбран неудачно, быстродействие коррекции значительно снижается.

В области $\alpha \neq \alpha_{\text{opt}}$ наибольшее быстродействие получено для апертурного зондирования, с использованием этого алгоритма «восхождение на холм» удалось выполнить при 28 вызовах целевой функции (четвертая графа табл. 2). Для других алгоритмов значения N_{call} почти в два раза выше. Но при этом результирующие значения критерия J для апертурного зондирования меньше, т.е. можно считать, что при выбранной длине шага алгоритм не «поднимается на вершину холма», а выходит по условию прерывания, не достигнув максимума. При увеличении длины шага значения J увеличиваются, быстродействие снижается.

В заключение еще раз отметим основные результаты.

1. Быстродействие каждого из алгоритмов зависит от величины градиентного шага (ребра симплекса).

**Характеристики алгоритмов коррекции самовоздействия.
R = -20, корректор – зеркало с 8 приводами**

Симплекс-метод				
α	0,5	2	3	5
N_{call}	75	48	43*	53
J	0,37	0,38	0,40	0,42
Модификация апертурного зондирования				
α	0,1	1	2	2,5
N_{call}	118	55	46*	55
J	0,35	0,40	0,40	0,39
Апертурное зондирование				
α	20	40	60	140
N_{call}	37	28	37*	91
J	0,37	0,37	0,38	0,39

* Минимальное число вызовов целевой функции

2. В области оптимальных параметров алгоритмы обладают приблизительно одинаковым быстродействием.

3. Все рассмотренные алгоритмы обеспечивают приблизительно одинаковую эффективность коррекции стационарного самовоздействия.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
15 июля 1996 г.

1. Канев Ф.Ю., Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1991. Т. 4. N 12. С. 1237–1247.
2. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Сухоруков А.П. и др. // Известия вузов. Радиофизика. 1980. N 1. С. 1–37.
3. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. // Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
4. Выслоух В.А., Егоров К.Д., Кандидов В.П. // Известия вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. N 4. С. 434–440.
5. Малафеева И.В., Тельпуховский И.Е., Чесноков С.С. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 4. С. 413–417.
6. Коняев П.А. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 12. С. 1261–1268.
7. Chesnokov S.S., Davletshina I.V. // Proc. SPIE. 1994. V. 2312. P. 627–654.
8. Chesnokov S.S., Davletshina I.V. // Proc. SPIE. 1994. V. 2222. P. 423–436.
9. Чесноков С.С. // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. N 6. С. 1160–1165.
10. Канев Ф.Ю., Чесноков С.С. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. N 3. С. 302–307.

F.Ju. Kanev, V.P. Lukin, A.V. Ershov. **Comparison of Simplex-method and Gradient Algorithms of a Beam Control.**

The efficiency and time-consuming of thermal blooming correction are compared in the paper based on such beam-controlling algorithms as aperture sounding, modified aperture sounding, and simplex-method. Since all the algorithms may be treated as the extremum determination methods, their characteristics are compared based on the problem of determination of maximum for an analytically defined function. The obtained results are then tested both through the analysis of a beam control in a linear medium (optimal focusing) and the problem of the radiation thermal blooming compensation.