«Оптика атмосферы и океана», **15,** № 11 (2002)

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 535

В.А. Тартаковский[1], В.А. Сенников[2]

Условие появления и плотность действительных нулей флуктуирующей волны

[1] *Институт оптического мониторинга СО РАН,*
[2] *Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

Поступила в редакцию 9.07.2002 г.

Установлено, что скалярная квазимонохроматическая волна обращается в нуль в плоскости наблюдения как линейная функция двух переменных, если плотность вероятности логарифмической производной амплитуды волны убывает на бесконечности как минус третья степень. Коэффициент с индексом минус три ряда Лорана для этой плотности вероятности определяет число таких действительных нулей. Полученные общие результаты сводятся к известным частным случаям.

Введение

В процессе распространения, с увеличением дистанции и с усилением флуктуаций в турбулентной среде, волна приобретает особые свойства. В оптике при интерференции эти свойства проявляются как бифуркации интерференционных полос в тех частях плоскости наблюдения, где интенсивность объектной волны затухает [1, 2]. При дифракции света, исходящего из таких областей, например на субапертуре диафрагмы Гартмана, фокальные пятна образуют дублеты [3] и более сложные структуры. Эти феномены могут быть объяснены в рамках математической модели волны, когда ее комплексное представление локально аппроксимируется полиномом, а в общем случае целой функцией экспоненциального типа (ЦФЭТ) нескольких переменных. Известные теоремы о факторизации связывают свойства полиномов, ЦФЭТ с распределением точек нулей этих функций в действительной и комплексной плоскостях [4, 5]. С этих позиций особые свойства появляются вместе с обращением волны (ее амплитуды или интенсивности) в нуль в изолированных точках плоскости наблюдения. Эти точки нулей являются центрами оптических вихрей [6], характерных тем, что в самом центре фаза волны неопределена, а в некоторой окрестности центра фаза изменяется монотонно вокруг него и является минимальной [7]. При этом фаза перестает быть непрерывной функцией двух переменных в плоскости наблюдения, образуются дислокации волнового фронта.

Так как появление нуля есть дискретное событие, то связанные с этим свойства возникают после перехода волнового процесса через некоторый порог, а нуль является индикатором этого. После появления нуля возникает более сложное состояние с точки зрения как теории, так и эксперимента. При этом качественно изменяется плотность вероятности флуктуаций амплитуды волны, некоторые модели распространения света становятся неэффективными, а описание волнового процесса в терминах амплитуды и фазы и регистрация этих функций приводят к неоднозначным результатам [8, 9].

Нули и связанные с ними оптические вихри и дислокации волнового фронта являются интереснейшими объектами физики. Их изучение важно для понимания природы волновых процессов и для приложений. Данная работа направлена на выяснение общих условий, допускающих появление нулей и определяющих их плотность.

1. Предварительные рассуждения

Нули лежат в плоскости наблюдения в изолированных точках, на пересечении нулевых линий действительной и мнимой частей комплексной модели волны. В простейшем случае эта функция обращается в нуль как линейные члены ряда Тейлора, но, в соответствии с подготовительной теоремой Вейерштрасса, существуют нули и с более сложной структурой. Например, возможно обращение функции в нуль на замкнутой кривой в плоскости наблюдения или на линии, начинающейся и заканчивающейся в бесконечности [5]. Однако для их возникновения необходимо полное совпадение на плоскости наблюдения линий нулей действительной и мнимой частей модели волны, что статистически невероятно.

При экспериментах с рассеивающей свет пластинкой наблюдалась интерференционная картина, как будто обусловленная изолированным нулем полинома второго порядка от двух переменных [2]. В численном статистическом эксперименте по распространению света в турбулентной среде также были получены действительная и мнимая части волны и ее фаза, которые могли бы соответствовать такому нулю [3]. Следует отметить, что полиномы высших порядков от двух переменных обращаются в нуль при совпадении точек самопересечения нулевых линий действительной и мнимой частей. Это событие также статистически невероятно, поскольку в любой финитной области содержится бесконечное число точек.

Полиномы высших порядков от двух переменных в сечениях плоскости наблюдения вырождаются в полиномы от одной переменной с изменением порядка. Они могут быть факторизованы в различных сечениях, проходящих через точку нуля, разным числом биномов. В этом смысле нуль полинома высших порядков анизотропен.

При недостаточном разрешении, как в численном так и в натурном эксперименте, скопление нулей первого порядка может выглядеть как один нуль высшего порядка, но явные случаи сложных нулей обычно связаны со специальными начальными условиями [10], поэтому нули высших порядков следует рассматривать как детерминированные объекты. В этой связи в дальнейшем используется линейная аппроксимация для описания нуля и изучения его как статистического объекта.

Рассмотрим волну, которая распространилась через турбулентную среду и испытывает флуктуации. Математическую модель волны представим в комплексном виде, в форме аналитического сигнала

$$U(x, y, z, t) + iV(x, y, z, t), \tag{1}$$

определенного по времени и по направлению распространения z [11]. Такая модель включает квазимонохроматическое, параболическое и скалярное приближение для световой волны.

Зафиксируем переменную z в некоторый момент времени t и поместим начало декартовой системы координат xoy в центр круга на плоскости наблюдения, располагающейся поперек направления распространения волны. В этой плоскости модель (1) будем рассматривать как ЦФЭТ, что позволяет локально представить действительную и мнимую части волны линейными членами равномерно сходящегося ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= u + u'_x x + u'_y y; \\ V(x, y) &= v + v'_x x + v'_y y. \end{aligned} \tag{2}$$

Константы в этих уравнениях определены в центре круга, штрихи и индексы обозначают производные по x или y. Координаты точки (x_0, y_0), где волна обращается в нуль как полином первой степени, есть корни системы уравнений

$$\begin{cases} u + u'_x x_0 + u'_y y_0 = 0, \\ v + v'_x x_0 + v'_y y_0 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Для реализации статистического подхода необходимо сделать обычные предположения [12–14] о том, что флуктуации волны являются однородными и изотропными в плоскости наблюдения. Первое условие, в частности, дает основание полагать, что вероятность появления нуля $p(r)$ в каком-либо круге с достаточно малым радиусом r не зависит от положения этого круга в плоскости наблюдения. Тогда средняя плотность нулей может быть выражена известным способом как предел отношения

$$Д = \lim_{r\to 0} \frac{p(r)}{\pi r^2}. \tag{4}$$

При справедливости предположения об изотропности флуктуаций волны вероятность $p(r)$ не должна зависеть от направления, по которому нуль попадает в круг, по крайней мере когда круг достаточно мал. Поэтому в системе (3) можно положить $y_0 = 0$ и опустить индексы. Затем, представив действительную и мнимую части волны в центре круга через амплитуду и фазу в виде $u + iv = A \exp i\varphi$, из (3) получим выражение

$$A + (A' + iA\varphi')x_0 = 0,$$

из которого следует система уравнений

$$\begin{cases} A\varphi' x_0 = 0, \\ A + A' x_0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Одно из решений первого уравнения системы есть $A \neq 0$, $\varphi' = 0$. Оно соответствует тому, что волновой фронт оптического вихря есть прямой геликоид. Другое решение связывает координаты нуля с логарифмической производной амплитуды χ' следующим образом [12]:

$$x_0 = -\frac{A}{A'} = -(\chi')^{-1}, \quad \chi = \ln A. \tag{6}$$

Из предположения об изотропности следует четность функции плотности вероятности $w(x_0)$ случайной координаты нуля x_0. Учитывая этот факт и монотонную связь между переменными в (6), представим вероятность появления нуля в круге в виде

$$p(r) = \int_{-r}^{r} w(x_0)\,dx_0 = 2\int_{1/r}^{\infty} w(1/\chi')\frac{d}{d\chi'}(1/\chi')\,d\chi' = \\ = 2\int_{1/r}^{\infty} w_{\chi'}(\chi')\,d\chi', \tag{7}$$

где $w_{\chi'}$ есть плотность вероятности переменной χ'. Подставляя (7) в (4), получают следующее выражение для плотности нулей [12]:

$$Д = \lim_{r\to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_{1/r}^{\infty} w_{\chi'}(\chi')\,d\chi'. \tag{8}$$

Из него, в частности, следует особая роль плотности вероятности логарифмической производной амплитуды, именно ее поведение на бесконечности определяет плотность нулей Д. Перейдем к исследованию деталей этого поведения.

2. Основной результат

Величина Д будет иметь конечное значение, если интеграл в (8) убывает при $r \to 0$ не медленнее, чем r^2. Чтобы обеспечить это, необходимо предположить непрерывность функции $w_{\chi'}$ и ее убывание при $\chi' \to \infty$. Для исследования скорости убывания представим $w_{\chi'}$ в окрестности бесконечно удаленной точки, регулярной там частью ряда Лорана:

$$w_{\chi'}(\chi') = \sum_{n=2}^{\infty} \ell_{-n}\, \chi'^{-n}. \tag{9}$$

Поскольку плотность вероятности $w_{\chi'}$ должна быть интегрируемой функцией в области определения, начальное значение индекса n не может быть меньше двух. Тогда, в силу равномерной сходимости ряда, возможно его почленное интегрирование. Используя этот факт, подставим (9) в (8) и вычислим интеграл:

$$\int\limits_{1/r}^{\infty}(\chi')^{-n}d\chi' = (n-1)^{-1}\left\{r^{n-1} - (\chi')^{1-n}\Big|_{\infty}\right\} =$$

$$= (n-1)^{-1}\, r^{n-1}. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим предел (8) в новом виде:

$$\text{D} = 2\pi^{-1}\lim_{r\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\ell_{-n}\frac{r^{n-3}}{n-1}. \tag{11}$$

Для того чтобы плотность нулей D имела какое-либо конечное значение, индекс n должен быть больше двух. Однако D > 0 тогда, когда начальное значение индекса равно трем. То есть нули возможны только при условии, что функция $w_{\chi'}$ асимптотически эквивалентна $\ell_{-3}\,\chi'^{-3}$ на бесконечности

$$\lim_{\chi'\to 0}\chi'^3\, w_{\chi'}(\chi') = \ell_{-3}. \tag{12}$$

Таким образом, вне зависимости от конкретного вида функции плотности вероятности логарифмической производной амплитуды, плотность нулей определяется одним коэффициентом ряда Лорана по формуле

$$\text{D} = \pi^{-1}\,\ell_{-3}. \tag{13}$$

3. Сопоставления с известными результатами

Воспользуемся общим выражением (13) и получим из него известные частные результаты для плотности нулей световой волны, распространяющейся в турбулентной среде при различной силе флуктуаций.

Отметим, что плотность вероятности $w_{\chi'}(\chi')$, представленная равномерно сходящимся степенным рядом в бесконечно удаленной точке, регулярна там, поэтому возможна замена переменных вида $\chi' = t^{-1}$ в выражении (9). Тогда коэффициент ряда Лорана ℓ_{-3} может быть вычислен как третий коэффициент ряда Тейлора по формуле

$$\ell_{-3} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dt^3}w_{\chi'}(t^{-1})\Big|_{t=0}. \tag{14}$$

– Рассмотрим случай очень сильной турбулентности. Флуктуации световой волны в этих условиях становятся нормальными, а ее амплитуды рэлеевскими [15]. Для этих условий функция $w_{\chi'}$ и плотность нулей подсчитаны в работе [12]:

$$w_{\chi'} = \frac{\sigma_{A'}^2}{\langle I\rangle}\left(\chi'^2 + \frac{\sigma_{A'}^2}{\langle I\rangle}\right)^{-3/2}; \quad \text{D} = \frac{\sigma_{A'}^2}{\pi\langle I\rangle}, \tag{15}$$

где $\sigma_{A'}^2$ – дисперсия производной амплитуды; $\langle I\rangle$ – среднее значение интенсивности. Легко убедиться, что плотность вероятности из (15) удовлетворяет асимптотическому условию (12), поэтому нули возможны. Найдем, следуя (14), что общее выражение (13) преобразуется в известную формулу для плотности нулей нормального случайного процесса из (15)

$$\ell_{-3} = \frac{\sigma_{A'}^2}{3!\langle I\rangle}\frac{d^3}{dt^3}\left(t^{-2} + \frac{\sigma_{A'}^2}{\langle I\rangle}\right)^{-3/2}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\sigma_{A'}^2}{\langle I\rangle} \Rightarrow \text{D} = \frac{\sigma_{A'}^2}{\pi\langle I\rangle}. \tag{16}$$

– Для рассмотренного случая очень сильной турбулентности эффективна и другая техника определения плотности нулей [13, 14]. Используют связь числа нулей с вероятностью пересечения нулевых линий действительной и мнимой частей волны в плоскости наблюдения. В этой связи необходимы многомерные совместные плотности вероятности составляющих волны и их градиентов. Для нормального случайного процесса получен конечный результат. Установлено, что плотность нулей определяется шириной пространственного спектра волны θ в виде

$$\text{D} = k^2\langle\theta^2\rangle/2\pi, \tag{17}$$

где k – волновое число.

Сведем выражение (17) к выражению для плотности нулей нормального процесса из (15). Волна, с учетом узкополосности ее углового спектра, представима в сечениях плоскости наблюдения аналитическим сигналом, который является нормальным случайным процессом с дисперсией σ^2. Плотность вероятности интенсивности такого процесса и средняя интенсивность определяются выражениями:

$$w_I = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right),\ \sigma^2 = \langle I\rangle. \tag{18}$$

Плотность вероятности производной амплитуды нормального процесса также имеет гауссову форму:

$$w_{A'} = \frac{1}{\sigma b\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{A'^2}{2\sigma^2 b^2}\right),$$

$$\sigma^2_{A'} = \sigma^2 b^2 = b^2\langle I\rangle, \qquad (19)$$

где $\sigma^2_{A'}$ – дисперсия производной амплитуды; b – полуширина пространственной спектральной плотности [15]. Примем во внимание, что размерность величины b есть обратная единица длины, а $2b^2 = k^2\langle\theta^2\rangle$. В результате из (17) получим

$$\mathsf{D} = \frac{k^2}{2\pi}\left\langle\theta^2\right\rangle = \frac{b^2}{\pi} = \frac{\sigma^2_{A'}}{\pi\langle I\rangle}\ . \qquad (20)$$

Таким образом, в случае нормального случайного процесса общее выражение для плотности нулей (13) сводится к известному выражению (15), в которое переходит и более ранний результат (17).

– Исследуем случай слабой турбулентности. Как следствие аппроксимации Рытова для параболического уравнения флуктуации логарифма амплитуды имеют нормальное распределение [9]. Тогда плотность вероятности логарифмической производной амплитуды также нормальна:

$$w_{\chi'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\chi'}} \exp\left(\frac{-\chi'^2}{2\sigma^2_{\chi'}}\right). \qquad (21)$$

Эта плотность вероятности убывает на бесконечности более быстро, нежели χ'^{-3}. Поэтому, в соответствии с условием (12), нулей не должно возникать. Действуя как и раньше [см. выражение (14)], получим известный результат из [12]:

$$\ell_{-3} = \frac{1}{3!\sqrt{2\pi}\sigma_{\chi'}}\frac{d^3}{dt^3}\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2_{\chi}, t^2}\right)\Bigg|_{t=0} = 0 \Rightarrow \mathsf{D} = 0. \quad (22)$$

– Произведем анализ наиболее сложного промежуточного случая, когда световая волна распространяется через сильную турбулентность. Отметим вначале, что плотность вероятности $w_{\chi'}(\chi')$ может быть выражена через функцию $w_2(A, A')$ – совместную плотность вероятности амплитуды A и ее производной A' – известным способом [12]:

$$w_{\chi'}(\chi') = \int\limits_0^\infty w_2(A,\ A\ \chi')\,A\,dA\,. \qquad (23)$$

После подстановки выражения (23) в (14) можно изменить порядок интегрирования по A и дифференцирования по t, принимая во внимание независимость этих переменных и отсутствие каких-либо сингулярностей, а именно:

$$\ell_{-3} = \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dt^3}\int\limits_0^\infty w_2(A, At^{-1})\ A\,dA\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\int\limits_0^\infty \frac{d^3}{dt^3}\,w_2(A, At^{-1})\ A\,dA\right)\Bigg|_{t=0}, \qquad (24)$$

где $t^{-1} = \chi'$, как и прежде. Тогда из выражения (24) получим тот же самый результат, что и в работе [12], а именно:

$$\ell_{-3} = \frac{\alpha\sigma^2_{A'}}{(\alpha-1)\langle I\rangle} \Rightarrow \mathsf{D} = \frac{\alpha\sigma^2_{A'}}{\pi(\alpha-1)\langle I\rangle}. \qquad (25)$$

Расчеты приведены в Приложении.

Заключение

При самых общих предположениях о характере флуктуаций и о математической модели волнового процесса были установлены неизвестные ранее условия обращения в нуль амплитуды волны. Только определенное поведение на бесконечности плотности вероятности логарифмической производной амплитуды, асимптотически эквивалентное минус третьей степени, создает возможность для появления нулей. Оказалось, что плотность нулей определяется одним параметром вне зависимости от функционального вида плотности вероятности. Им является коэффициент с индексом минус три ряда Лорана для плотности вероятности логарифмической производной амплитуды. Вычисление этого коэффициента для конкретных функций демонстрирует совпадение полученного общего результата с известными частными случаями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расчет плотности нулей для случая сильной турбулентности

В случае сильной турбулентности совместная плотность вероятности амплитуды волны и ее производной может быть представлена произведением K-распределения и нормального распределения [12]:

$$w_2(A, A') = \frac{4A^\alpha}{\sigma_{A'}\ \sqrt{2\pi}\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\langle I\rangle}\right)^{(\alpha+1)/2} \times$$

$$\times K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\langle I\rangle}}\ A\right)\exp\left(-\frac{A'^2}{2\ \sigma^2_{A'}}\right), \qquad (\text{П}1)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция; $K_{\alpha-1}$ есть функция Мак-Дональда. Параметр α выражается через индекс мерцания β как

$$\alpha = 2/(\beta^2 - 1),\ \beta^2 > 1.$$

Подстановка At^{-1} вместо A' позволяет вычислить коэффициент ℓ_{-3}. Следуя (14), найдем третью производную по t экспоненциального множителя в выражении (П1):

$$\frac{d^3}{dt^3}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_{A'}^2 t^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{A^6}{\sigma_{A'}^6 t^9} - \frac{9A^4}{\sigma_{A'}^4 t^7} + \frac{12A^2}{\sigma_{A'}^2 t^5}\right)\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_{A'}^2 t^2}\right). \quad (П2)$$

Подставив этот результат в (23), получим сумму трех интегралов по переменной A. Они имеют один и тот же вид и приводятся в таблицах [16]:

$$\ell_{-3} = \frac{2}{3\sigma_{A'}^2\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\langle I\rangle}\right)^{(\alpha+1)/2} \times$$
$$\times\left(\frac{\mathrm{I}_{\alpha+8}}{\sigma_{A'}^6 t^9} - \frac{9\mathrm{I}_{\alpha+6}}{\sigma_{A'}^4 t^7} + \frac{12\mathrm{I}_{\alpha+4}}{\sigma_{A'}^2 t^5}\right)\Bigg|_{t=0}; \quad (П3)$$

$$\mathrm{I}_{\tilde\alpha} = \int_0^\infty A^{\tilde\alpha-1}\exp(-qA^2)K_\nu(cA)dA = \frac{1}{2c}q^{(1-\tilde\alpha)/2}\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{\tilde\alpha+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\tilde\alpha-\nu}{2}\right)\exp\left(\frac{c^2}{8q}\right)W_{\frac{1-\tilde\alpha}{2},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{c^2}{8q}\right), \quad (П4)$$

где $q = \sigma_{A'}^{-2}\,t^{-2}$; $c = 2\sqrt{\alpha/\langle I\rangle}$; $\nu = \alpha - 1$.

При $|t| \to 0$ переменная $z = (c^2/8q) \to 0$, тогда функция Уиттекера $W_{\kappa,\mu}$ имеет следующее асимптотическое представление [17]:

$$W_{\kappa,\mu}(z) = z^{\frac{1}{2}+\mu}\exp(-z/2)U(1/2+\mu-\kappa, 1+2\mu, z) =$$
$$= z^{\frac{1}{2}-\mu}\exp(-z/2)\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)}, \quad (П5)$$

где U – второе решение уравнения Куммера; $\kappa = (1-\tilde\alpha)/2$; $\mu = (1-\alpha)/2$. Для малых $|t|$ выражение (П3) существенно упрощается и принимает вид

$$\mathrm{I}_{\tilde\alpha} = \frac{(\sigma_{A'}t)^{\tilde\alpha-\alpha+1}}{4}\Gamma(\alpha-1)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{\tilde\alpha-\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{\langle I\rangle}{\alpha}\right)^{(\alpha-1)/2}. \quad (П6)$$

Как и прежде, $\tilde\alpha$ принимает значения: $\alpha+8$, $\alpha+6$, $\alpha+4$.

Теперь просто получить конечное выражение (25), подставляя интеграл (П6) в выражение (П3) и полагая $t = 0$.

1. *Fried D.L., Vaughn J.L.* Branch cuts in phase function // Appl. Opt. 1992. V. 31. N 15. P. 2865–2882.
2. *Freund I., Shvartsman N. and Freilikher V.* Optical dislocation networks in highly random media // Opt. Commun. 1993. V. 101. N 3–4. P. 247–264.
3. *Тартаковский В.А., Майер Н.Н.* Дислокации фазы и локальные пятна // Оптика атмосф. и океана. 1996. Т. 9. № 11. С. 1457–1461.
4. *Fiddy M.A.* The role of analyticity in image recovery // Image Recovery: Theory and Application / Ed. H. Stark. Academic Press, Orlando, Fla., 1987. P. 499–529.
5. *Sciver M.S., Fiddy M.A.* Phase ambiguities and zeros of multidimensional band-limited functions // J. Opt. Soc. Amer. A. 1985. V. 2. N 5. P. 693–697.
6. *Аксенов В.П., Колосов В.В., Тартаковский В.А., Фортес Б.В.* Оптические вихри в неоднородных средах // Оптика атмосф. и океана. 1999. Т. 12. № 10. С. 952–959.
7. *Tartakovsky V.A. and Maier N.N.* Dispersion relation for real-plane zeros as a concept of wavefront measurement // Appl. Opt. 1998. V. 37. № 33. P. 7689–7697.
8. *Cohen L., Loughlin P., and Vakman D.* On an ambiguity in the definition of the amplitude and phase of a signal // Signal Proc. 1999. V. 79. P. 301–307.
9. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
10. *Тартаковский В.А., Майер Н.Н.* Световой пучок с азимутальной несущей в вакууме и неоднородной среде // Оптика атмосф. и океана. 1998. Т. 11. № 11. С. 1169–1174.
11. *Тартаковский В.А.* Определение фазы оптической волны и многомерный аналитический сигнал // Оптика атмосф. и океана. 1997. Т. 10. № 3. С. 301–315.
12. *Voitsekhovich V., Kuznetsov D., and Morozov D.* Density of turbulence-induced phase dislocations // Appl. Opt. 1998. V. 37. № 21. P. 4525–4535.
13. *Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я.* Дислокация поверхностей волнового фронта и нули амплитуды // Ж. эксперим. и теор. физ. 1981. Т. 80. Вып. 5. С. 1789–1797.
14. *Журавлев В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А.* Статистические характеристики дислокаций фазового фронта волнового поля // Ж. эксперим. и теор. физ. 1992. Т. 102. Вып. 2(8). С. 483–494.
15. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. С. 129–133.
16. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
17. *Слейтер Л.* // Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 325.

V.A. Tartakovsky, V.A. Sennikov. **Appearance condition and density of real-plane zeros in fluctuating wave.**

It is established that a scalar quasi-monochromatic wave vanishes in the observation plane as a linear function of two variables, if the probability density of logarithmic derivative of the wave amplitude decreases at infinity as power function with exponent minus three. The coefficient with the negative third index of the Laurent series for this probability density determines the number of real-plane zeros. The general results obtained can be reduced to well-known special cases.