

В.С. Антюфеев, А.Л. Маршак

**МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА**

Рассматривается уравнение переноса излучения для плоского слоя растительной среды. Приведены две его формы: интегродифференциальное уравнение и интегральное уравнение 2-го рода. Описан алгоритм решения интегрального уравнения методом Монте-Карло. Отмечены преимущества этого алгоритма и перспективы его использования для решения прямых и обратных задач.

**1. Введение**

В последние годы в связи с бурным развитием аэрокосмического зондирования растительности возникла потребность в создании различных моделей процессов взаимодействия солнечного излучения с растительным покровом (РП). Существуют различные модели радиационного режима РП: геометрические модели, модели мутной среды, смешанные модели и статистические модели.

Предлагаемая ниже модель находится на стыке моделей мутной среды и статистических моделей. Включение в модель мутной среды вертикальных и горизонтальных неоднородностей, рядкости посадки и размеров фитоэлементов приводит к значительным вычислительным трудностям. Учет же этих геометрических факторов в статистической модели проводится естественным образом. Однако использование статистических моделей типа модели [4] для оценки геометрических параметров отдельного растения и посева в целом довольно затруднительно в связи с невозможностью расчета производных по этим параметрам от траекторий фотонов [1].

Итак, в данной статье мы предлагаем описание радиационного режима РП при помощи уравнения переноса (с включением в него всех важных геометрических параметров), а решение его — при помощи метода Монте-Карло. Разработанная методика позволяет обобщить технику решения методом Монте-Карло прямых и обратных задач атмосферной физики [2] на растительную среду.

Для простоты изложения ограничимся однородным РП. В первых двух пунктах мы опишем интегро-дифференциальное уравнение переноса в пластинчатой среде и переход к интегральному уравнению. Его решению методом Монте-Карло посвящены два следующих пункта. Затем мы включим в нашу модель размеры пластин для учета эффекта обратного блеска.

**2. Уравнение переноса в растительном покрове**

Рассмотрим плоскопараллельную однородную пластинчатую среду толщиной  $H$ , верхняя граница которой освещена прямой солнечной радиацией, а нижняя представляет собой Ламбертову отражающую поверхность с альбедо  $r_s$ . Процесс переноса радиации в такой среде описывается краевой задачей

$$-\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} + G(\Omega) I(\tau, \Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{4\pi} \Gamma(\Omega' \rightarrow \Omega) I(\tau, \Omega') d\Omega';$$

$$I(0, \Omega) = I_0 \delta(\Omega - \Omega_0), \mu < 0; \tag{1}$$

$$I(H, \Omega) = \frac{r_s}{\pi} \int_{2\pi} |\mu| I(H, \Omega') d\Omega',$$

где  $G(\Omega)$  является средней проекцией нормалей пластин на направление  $\Omega$ , т.е.

$$G(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi^+} g_L(\Omega_L) |\Omega_L \Omega| d\Omega, \tag{2}$$

где  $\frac{1}{2\pi} g_L(\Omega_L)$  есть плотность вероятности распределения нормалей пластин (здесь и далее  $4\pi, 2\pi^{\pm}$ ,

стоящие под интегралом, обозначают всю единичную сферу и соответственно ее верхние и нижние полусферы). Единичный вектор  $\Omega = \Omega(\mu, \varphi)$  имеет азимутальный угол  $\varphi$  и полярный угол  $\theta$  ( $\cos\theta = \mu$ ) относительно внешней нормали, направленной противоположно оси  $z$ . Вектор  $\Omega_0 = \Omega(\mu_0, \varphi_0)$  есть направление солнечного излучения с интенсивностью  $I_0$ , функция  $\Gamma/\pi$  есть нормированная индикатриса элементарного объема:

$$\Gamma(\Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{1}{2} \int g_L(\Omega_L) |\Omega' \cdot \Omega_L| f(\Omega' \rightarrow \Omega, \Omega_L) d\Omega_L, \quad (3)$$

где  $f$  есть индикатриса отражения от поверхности листа. Если обозначить через  $\omega_L$  альбедо листа, т.е.

$$\omega_L = \int_{4\pi} f(\Omega' \rightarrow \Omega, \Omega_L) d\Omega, \quad (4)$$

то функция

$$P(\Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{\Gamma(\Omega' \rightarrow \Omega)}{\pi G(\Omega')} \quad (5)$$

является нормированной к альбедо листа индикатрисой рассеяния

$$\int_{4\pi} P(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega = \omega_L. \quad (6)$$

### 3. Интегральное уравнение переноса

Обозначим

$$J(\tau, \Omega) = I(\tau, \Omega) G(\Omega). \quad (7)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (1) относительно функции  $I(\tau, \Omega)$  можно свести обычным путем к интегральному уравнению относительно функции  $J(\tau, \Omega)$ . Опуская промежуточные выкладки, выпишем это интегральное уравнение:

$$J(\tau, \Omega) = \int_{4\pi} \int_0^H k[(\tau', \Omega') \rightarrow (\tau, \Omega)] J(\tau', \Omega') d\tau' d\Omega' + F(\tau, \Omega), \quad (8)$$

где

$$k(x' \rightarrow x) = \begin{cases} k_1(x' \rightarrow x), & \mu < 0, \\ k_2(x' \rightarrow x), & \mu > 0, \end{cases} \quad (9)$$

а  $x = (\tau, \Omega)$  — точка фазового пространства  $X$ . Здесь

$$k_1(x' \rightarrow x) = \begin{cases} P(\Omega' \rightarrow \Omega) \frac{G(\Omega)}{|\mu|} \exp\left[-\frac{G(\Omega)}{|\mu|}(\tau - \tau')\right], & 0 \leq \tau' \leq \tau, \\ 0, & \tau < \tau' \leq H; \end{cases} \quad (10)$$

$$k_2(x' \rightarrow x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau' \leq \tau, \\ P(\Omega' \rightarrow \Omega) \frac{G(\Omega)}{\mu} \exp\left[-\frac{G(\Omega)}{\mu}(\tau' - \tau)\right], & \tau \leq \tau' \leq H, \end{cases} \quad (11)$$

а функция  $F(\tau, \Omega)$  есть

$$F(\tau, \Omega) = J(0, \Omega) \exp\left[-\frac{G(\Omega)}{|\mu|}\tau\right], \quad \mu < 0. \quad (12)$$

Заметим, что интегральное уравнение (8) можно вывести и непосредственно из физических соображений.

#### 4. Решение интегрального уравнения методом Монте-Карло

Запишем интегральное уравнение (8) в операторном виде

$$J = KJ + F, \quad (13)$$

где интегральный оператор  $K$  имеет ядро, определенное в (9)–(11). Дадим ему вероятностное толкование. Ядро  $k(x' \rightarrow x)$  есть плотность вероятности столкновения в точке  $x$  фазового пространства при условии, что предыдущее столкновение произошло в точке  $x'$ . Здесь  $x = (\tau, \Omega)$ , где  $\tau$  — глубина точки столкновения, а  $\Omega$  — направление движения фотона непосредственно перед столкновением;  $J(\tau, \Omega)$  — фазовая плотность столкновений;  $F(\tau, \Omega)/|\mu|$  — плотность первых столкновений фотонов, покинувших источник с плотностью излучения  $I(0, \Omega)$  в направлении  $\Omega$ .

Известно, что если  $\|K\| < 1$ , то уравнение (13) имеет единственное решение, которое можно представить рядом Неймана

$$J = F + KF + K^2F + \dots \quad (14)$$

Часто бывает достаточно найти не все решение, а лишь некоторый функционал от него. Например, для расчета коэффициента спектральной яркости (КСЯ) нам необходимо знать  $J(0, \Omega^*)$ ,  $\Omega^* = \Omega(\mu^*, \varphi^*)$ ,  $\mu^* > 0$ , т. е. отражение от верхней поверхности в направлении  $\Omega^*$ . Тогда

$$J(0, \Omega^*) = (J, \delta_{x^*}) = \int_{x'} J(x) \delta_{x^*}(x) dx,$$

где  $\delta_{x^*}$  — дельта функция Дирака, а  $x^* = (0, \Omega^*)$ . С учетом (14) последнее равенство можно привести к виду

$$\begin{aligned} J(0, \Omega^*) &= (F, \delta_{x^*}) + (KF, \delta_{x^*}) + (K^2F, \delta_{x^*}) + \dots = (F, K^* \delta_{x^*}) + \\ &+ (KF, K^* \delta_{x^*}) + (K^2F, K^* \delta_{x^*}) + \dots \end{aligned}$$

Мы учли, что  $(F, \delta_{x^*}) = 0$ , ибо солнечное и отраженное излучения направлены в разные стороны. Оператор  $K^*$  есть оператор, сопряженный с  $K$ , а именно:

$$(K^* \Psi)(x) = \int_{x'} k(x \rightarrow x') \Psi(x') dx'.$$

Отсюда

$$(K^* \delta_{x^*})(\tau, \Omega) = P(\Omega \rightarrow \Omega^*) \frac{G(\Omega^*)}{\mu^*} \exp\left(-\tau \frac{G(\Omega^*)}{\mu^*}\right).$$

Обозначая правую часть последнего равенства через  $\Psi(\tau, \Omega) G(\Omega^*)$ , получим

$$I(0, \Omega^*) = \frac{J(0, \Omega^*)}{G(\Omega^*)} = (F, \Psi) + (KF, \Psi) + (K^2F, \Psi) + \dots, \quad (15)$$

где функция вклада

$$\Psi(\tau, \Omega) = P(\Omega \rightarrow \Omega^*) \exp\left[-\frac{G(\Omega^*)}{\mu^*} \tau\right] / \mu^*. \quad (16)$$

Здесь  $\Omega^*$  — направление наблюдения, причем точка наблюдения находится на верхней границе среды, а  $P(\Omega \rightarrow \Omega^*)$  вычисляется по формулам (2), (3) и (4).

В случае отражения от подстилающей ламбертовой поверхности

$$J(0, \Omega^*) = (J, \delta_{x^*}) = \int_{x'} J(x) \delta_{x^*}(x) dx,$$

В сумме (15)  $i$ -е слагаемое есть вклад в оценку КСЯ от фотонов  $i$ -х столкновений. Разложение

(15) находится в соответствии с алгоритмом метода Монте-Карло для расчета коэффициента спектральной яркости, а именно: согласно двум плотностям распределения (плотности распределения длины свободного пробега и плотности распределения направления рассеяния  $P(\Omega \rightarrow \Omega)$ ), входящим в определение ядра  $k(x' \rightarrow x)$ , моделируются траектории фотонов  $x_0^n \rightarrow x_1^n \rightarrow \dots \rightarrow x_m^n$ , где  $x_i^n$  — точки столкновения  $n$ -го фотона в фазовом пространстве, а  $m$  — номер последнего до вылета или поглощения столкновения. При очередном столкновении в точке в статистическую оценку  $I$  заносится вклад  $W_i^n \Psi(x_i^n)$  и

$$I(0, \Omega^*) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^m W_i^n \Psi(x_i^n),$$

где  $N$  — число траекторий;  $W_i^n$  — «вес»  $n$ -го фотона после  $i$ -го столкновения.

## 5. Моделирование цепи Маркова

Для решения уравнения переноса нам осталось смоделировать траекторию фотона. Процесс моделирования осуществляется согласно ядру  $k$ , которое состоит из двух плотностей вероятностей: плотности вероятности длины свободного пробега фотона в направлении  $\Omega$  и плотности вероятности рассеяния в направлении  $\Omega$ .

1) *Моделирование длины свободного пробега.* Оптическая длина свободного пробега

$$\bar{\tau} = -\ln \alpha,$$

где  $\alpha$  — случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $(0,1)$ . Отсюда оптическая глубина свободного пробега

$$\bar{\tau} = -\frac{\mu}{G(\Omega)} \ln \alpha.$$

2) *Моделирование направления рассеяния.* Пусть  $\Omega'$  — направление пробега фотона перед столкновением. Рассмотрим вопрос о моделировании направления  $\Omega$  после столкновения. Плотность перехода из состояния  $\Omega'$  в  $\Omega$  имеет вид

$$P(\Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi^+} g(\Omega_L) \frac{|\Omega' \cdot \Omega|}{G(\Omega')} f(\Omega' \rightarrow \Omega, \Omega_L) d\Omega_L.$$

Заметим, что плотность моделирования должна удовлетворять двум требованиям: первое — быть удобной для моделирования; второе — быть универсальной.

Поясним: универсальность означает, что плотность, используемая в алгоритме расчета, не должна изменяться при изменении реального распределения. В противном случае для каждого варианта расчета придется подбирать свою моделирующую формулу, и алгоритм расчета получается неуниверсальным. Метод Монте-Карло предлагает осуществлять моделирование по некоторой единой и удобной плотности, а для компенсации смещения статистической оценки «вес» частицы при очередном столкновении умножать на соответствующий множитель. «Вес» входит сомножителем в функцию вклада.

Таким образом, представим функцию  $P(\Omega' \rightarrow \Omega)$  в виде суперпозиции двух плотностей:

$$P(\Omega' \rightarrow \Omega) = \int_{2\pi^+} \frac{1}{2\pi} g_L(\Omega_L) \frac{|\Omega_L \cdot \Omega'|}{G(\Omega')} \times f(\Omega' \rightarrow \Omega, \Omega_L) d\Omega_L.$$

Моделирование направления  $\Omega_L$  теперь может быть реализовано следующим образом: согласно плотности

$$P(\Omega_L) = \frac{1}{2\pi} g_L(\Omega_L) \frac{|\Omega' \cdot \Omega_L|}{G(\Omega')}$$

моделируем нормаль листа  $\Omega_L$ , а затем, зная  $\Omega_L$ , моделируем направление  $\Omega$  согласно плотности  $f(\Omega' \rightarrow \Omega, \Omega_L)$ . Однако плотность  $p(\Omega_L)$  не удовлетворяет двум упомянутым выше требованиям: не су-

ществует простых моделирующих формул, и функция распределения листовых нормалей  $g_L(\Omega_L)$  является в общем случае многопараметрической.

В предположении, что нормали листьев распределены равномерно по азимуту  $\varphi$ , а их распределение по  $\mu$  выбирается из трехпараметрического семейства [3], представим плотность  $g_L(\Omega_L)/2\pi$  в виде

$$\frac{1}{2\pi} g_L(\Omega_L) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} g^*(\mu),$$

где

$g^*(\mu) = a + b(2\mu^2 - 1) + c(8\mu^4 - 8\mu^2 + 1)$ ,  $a, b, c - \text{const}$ . Функцию  $\frac{1}{2\pi} \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}}$  будем рассматри-

вать как новую плотность для направления  $\Omega_L \sim (\mu_L, \varphi_L)$ , где  $1/2\pi$  — плотность по  $\varphi_L$ , а  $\frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}}$  — плотность по  $\mu_L$ . Итак, плотность по  $\Omega_L$  является универсальной (она не зависит от параметров  $a, b, c$ ) и удобной ввиду простоты моделирующих формул:  $\varphi_L = 2\pi\alpha$ ,  $\mu_L = \sin(\pi\beta/2)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  случайные (независимые) величины, равномерно распределенные в интервале (0; 1).

Теперь выделим из функции  $P(\Omega_L)$  вышеупомянутую плотность:

$$P(\Omega_L) = \left[ \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} \right] \left[ g^*(\mu) \frac{|\Omega' \Omega|}{G(\Omega')} \right].$$

Первый из сомножителей взят в качестве новой плотности для  $\Omega_L$ , а второй умножается на «вес» частицы при очередном столкновении. Следует отметить, что факторизацию можно выполнить и по-другому, однако выбранный нами способ удобен тем, что неограниченный сомножитель  $1/\sqrt{1-\mu^2}$  включен в плотность и соответственно исключен из «веса», поэтому оценка остается ограниченной. Неограниченность оценки привела бы к большим погрешностям расчета.

Моделирование направления  $\Omega$  при известном  $\Omega_L$  осуществляется согласно плотности взаимодействия фотона с поверхностью листа. В случае биламбертовского закона рассеяния

$$f(\Omega' \rightarrow \Omega, \Omega_L) = \begin{cases} r_L |\Omega \Omega_L| / \pi, & (\Omega \Omega_L) (\Omega' \Omega_L) < 0, \\ t_L |\Omega \Omega_L| / \pi, & (\Omega \Omega_L) (\Omega' \Omega_L) > 0, \end{cases}$$

где  $r_L, t_L$  — дифференциальные коэффициенты отражения и пропускания. Тогда моделирование  $\Omega$  осуществляется по формулам

$$\varphi = 2\pi\alpha, \quad \mu = \delta\sqrt{\beta},$$

где  $\mu$  и  $\varphi$  — координаты вектора  $\Omega$  в сферической системе координат с осью  $\Omega_L$ , а

$$\delta = \begin{cases} +1, & [(\Omega' \Omega_L) > 0] \text{ \& } [\gamma > r_L/(r_L + t_L)] \text{ или} \\ & [(\Omega' \Omega_L) < 0] \text{ \& } [\gamma < r_L/(r_L + t_L)], \\ -1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — случайные величины, равномерно распределенные в интервале (0, 1).

3) *Вычисление функции вклада.* В качестве функции вклада следует взять не точную величину  $\Psi(\tau, \Omega)$ , которую трудно вычислять после каждого столкновения, а ее рандомизированную по  $\Omega_L$  оценку  $f(\Omega \rightarrow \Omega^*, \Omega_L) \exp(-\tau^*)/\mu^*$ . Здесь  $\Omega_L$  — смоделированная после столкновения нормаль листа, а  $\tau^*$  — оптическая толщина слоя от точки столкновения до приемника в направлении наблюдения  $\Omega^*$ .

## 6. Учет эффекта обратного блеска

Построенная выше модель хорошо аппроксимирует РП, в которых размеры фитоэлементов пренебрежимо малы по сравнению с высотой растений и задаются лишь плотностью распределения их нормалей. Однако в реальных РП фитоэлементы имеют конечные размеры, что приводит к образованию так называемого обратного блеска у КСЯ: в направлении на Солнце наблюдается значительный рост яркости РП, зависящий от геометрической структуры как одного растения, так и посева в целом [4]. Коэффициент ослабления потока радиации в направлении  $\Omega$  после столкновения оказывается зависимым не только от распределения нормалей  $g_L(\Omega_L)$  (см. (2)), но также и от направления движения до столкновения. Если известен коэффициент взаимной корреляции индикаторных функций на-

личия пластин в дифференциальном слое в направлениях  $\Omega$  и  $\Omega'$  [5], то можно вычислить новый коэффициент ослабления  $\sigma_k$ , зависящий от размеров фитоэлементов. В случае однородного РП имеем

$$\sigma_k [(\tau, \Omega) \rightarrow (\tau', \Omega')] = \begin{cases} G(\Omega), & \mu\mu' > 0, \\ G(\Omega) \left[ 1 - \sqrt{A'/A} \exp\left(-\frac{\Delta(\Omega, \Omega')|\tau - \tau'|}{k}\right) \right], & \mu\mu' < 0, \end{cases}$$

где  $A = G(\Omega)/|\mu|$ ,  $A' = G(\Omega')/|\mu'|$ , а

$$\Delta(\Omega, \Omega') = (\mu^{-2} + \mu'^{-2} + 2(\Omega' \cdot \Omega)/|\mu\mu_0|)^{1/2},$$

здесь  $k$  есть средняя длина хорды фитоэлемента. Понятно, что в случае  $\Omega = -\Omega'$ , т. е. когда отражение идет строго назад, ослабление отсутствует и  $\sigma_k = 0$ .

Таким образом, при моделировании длины свободного пробега фотона вместо  $G(\Omega)$  мы используем новый коэффициент ослабления  $\sigma_k$ . Здесь  $k$  — средние линейные параметры листа [5].

## 7. Заключение

Предложенная выше методика решения интегрального уравнения переноса излучения (для растительности) методом Монте-Карло позволяет оценивать коэффициент спектральной яркости системы «почва—растительность» для различных типов сельскохозяйственных посевов.

Результаты хорошо согласуются с решением интегро-дифференциального уравнения методом дискретных ординат.

1. Маршак А. Л. // Изв. АН СССР. Сер. Физика. Математика. 1987. Т. 36. № 3. С. 289—293.
2. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 256 с.
3. Bunnik N. J. J. The multispectral reflectance of shortwave radiation by Agricultural crops in relation with their morphological and optical properties. Netherland: Wageningen, 1978. 175 p.
4. Ross J. K., Marshak A. L. // Remote Sens. Env. 1988. V. 24. P. 213—225.
5. Kuusk A., Nilsen T. The reflection of shortwave radiation from multilayer plant canopies. Tallin, 1989. (Preprint A-1).

Вычислительный центр СО АН СССР, Новосибирск  
Тартуский госуниверситет

Поступила в редакцию  
25 мая 1989 г.

V. S. Antyufeev, A. A. Marshak. **Monte-Carlo Method Application to Solution of the Radiation Transfer Equation for a Plane Layer of Vegetation.**

The paper considers radiation transfer equation for a plane layer of vegetation. Two forms of this equation are given: integrodifferential and integral equation of the second kind. The algorithm is described for solving the integral equation by Monte-Carlo method. Advantages of this algorithm are shown, and prospects of its use for solving direct and inverse problems are described.