

Определение топологического заряда оптического вихря по измерениям интенсивности сигнала на выходе интерферометра: принципы и моделирование

В.П. Аксенов¹, И.В. Измайлов², Ф.Ю. Канев¹, Б.Н. Пойзнер^{2*}

¹Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН

634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

²Томский государственный университет

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

Поступила в редакцию 4.03.2010 г.

Предложены метод определения топологического заряда оптического вихря, основанный на измерении интенсивности светового поля, и конструкция соответствующего детектора. Приведена математическая модель детектора топологического заряда вихря. Представлены результаты численных экспериментов, имитирующих распознавание вихря в присутствии шума, выполнены оценки работоспособности детектора вихря. Показано, что данные моделирования подтверждают аналитические расчеты.

Ключевые слова: детектор оптических вихрей, передача данных, интерферометр Рождественского, топологический заряд; detector of optical vortices, data transfer, Rozhdestvenski interferometer, topological charge.

Введение

Как известно, световые пучки не только переносят энергию, но и обладают линейным и угловым моментами. Причем полный угловой момент может содержать спиновую составляющую, связанную с поляризацией, и орбитальную составляющую, связанную с пространственным профилем интенсивности и фазы [1]. В пучке, несущем оптический вихрь (ОВ), комплексная амплитуда поля в окрестности вихря описывается выражением [1]:

$$A = Cr^{V_d} \exp(jV_d\vartheta), \quad (1)$$

где C – константа; V_d – топологический заряд ОВ; $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус-вектор точки в поперечном сечении; $r \equiv |\mathbf{r}|$ – расстояние от центра ОВ до точки; ϑ – азимутальный угол; $j = (-1)^{1/2}$ – мнимая единица. Орбитальный угловой момент (ОУМ) такого пучка в пересчете на один фотон будет равен $\hbar V_d$. Со значением V_d можно однозначно связать значение битов (либо байтов) данных, например, значение $V_d = 0$ связать со значением «логический ноль», а значению $V_d = 1$ приписать значение «логическая единица». Поэтому в работах [2, 3] было предложено использовать ОУМ для кодирования и обработки информации, в том числе в системах оптической связи. В простейшем случае для определения ОУМ достаточно определять V_d [3].

Как правило, среда, через которую распространяется лазерный пучок, искажает передачу информации. Степень искажений подлежит изучению в каждом конкретном случае, поскольку зависит не только от свойств искажающей среды, но и от принципов функционирования системы связи. Естественно, что для систем связи, применяющих оптические вихри для кодирования информации, возникает необходимость исследовать влияние среды на распространение вихревых лазерных пучков. Примером такого исследования может служить работа [4], в которой анализируется влияние случайных aberrаций, обусловленных турбулентностью атмосферы, на работу оптической системы связи, использующей ОУМ.

Другая самостоятельная задача – это создание связанных устройств на основе оптического поля с вихрями, способных работать при наличии искажений. Так, в работе [5] предлагаются принцип действия и соответствующая структурная схема адаптивной оптической системы связи. Она включает в себя передатчик, образованный генератором оптического вихря и предкорректором волнового фронта, адаптивный приемник, состоящий из корректора и датчика волнового фронта $S(\mathbf{r}, t)$, детектора топологического заряда $V_d(\mathbf{r}, t)$ и положения $\mathbf{r}_d(t)$ оптического вихря, а также компаратора. Одним из ключевых компонентов этой системы служит детектор параметров вихря $V_d(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r}_d(t)$, который не предназначен для восстановления фазы, но способен с высокой вероятностью диагностировать присутствие вихря в передававшемся сигнале.

* Валерий Петрович Аксенов; Игорь Валерьевич Измайлов; Федор Юрьевич Канев (kanev@iao.ru); Борис Николаевич Пойзнер.

Казалось бы, такой детектор целесообразно строить на базе датчиков волнового фронта: Шэка–Гартмана либо интерферометрического. Однако быстродействие таких приборов не превышает нескольких сотен герц, что не отвечает требованиям, предъявляемым к современным системам связи.

Ниже мы опишем и обоснуем возможность построения детектора топологического заряда вихрей, требующего лишь измерения интенсивности пучка (или его мощности), следовательно, способного работать со скоростью в несколько гигагерц. Но прежде кратко опишем свойства нелинейного кольцевого интерферометра (НКИ) – прототипа этого детектора.

Использование интерферометров для детектирования оптических вихрей

Теоретически показано, что в роли быстродействующего детектора $V_d(\mathbf{r}, t)$ можно использовать НКИ. При этом наличие и порядок оптического вихря [6, 7] диагностируются с высокой точностью даже в присутствии аддитивного «белого» фазового шума с амплитудой $0,4\pi$ [8].

Особенность работы НКИ заключается в том, что если световое поле в контуре обратной связи НКИ поворачивается на угол $\Delta = 2\pi M/m$ в поперечной плоскости пучка (M и m – взаимно простые целые числа), то имеет место периодичность отображения множества оптических полей с различными значениями V_d во множество оптических структур на выходе НКИ. То есть один НКИ «сортирует» вихри по m группам [6–8] в соответствии с правилом [9]:

$$N_s = \{m + [(V_d + L) \bmod m]\} \bmod m, \quad (2)$$

$$\varphi_{\text{к.о.с.}} = \varphi_{\text{к.о.с.0}} + 2\pi(LM)/m,$$

где N_s – номер группы (структуры); \bmod – операция взятия модуля целого числа L ; $\varphi_{\text{к.о.с.}}$ – сдвиг фазы в контуре обратной связи; $\varphi_{\text{к.о.с.0}}$ – значение $\varphi_{\text{к.о.с.}}$ при $L = 0$ либо $M = 0$.

Если необходимым является распознавание вихря высокого порядка V_{\max} , а создание НКИ с $m = V_{\max}$ сложно (или по каким-либо причинам нецелесообразно), следует построить N экземпляров НКИ с m_1, m_2, \dots, m_N . Причем таких НКИ, что все числа m_i взаимно попарно просты, а их произведение $\Pi \equiv m_1 m_2 \dots m_N \geq V_{\max}$. Тогда на выходе i -го НКИ сформируется распределение интенсивности излучения (с определенной средней интенсивностью пучка), соответствующее числу N_{si} . По комбинации N чисел N_{si} можно будет однозначно определить значение $V_d \in [1, \Pi]$.

Сказанное позволяет предположить, что в роли детектора заряда вихрей может выступать модифицированный интерферометр Рождественского, в одно из плеч которого включены устройство поворота светового пучка вокруг продольной оси на угол $\Delta = 2\pi M/m$ (элемент G) и устройство постоянного сдвига фазы ϕ (рис. 1).

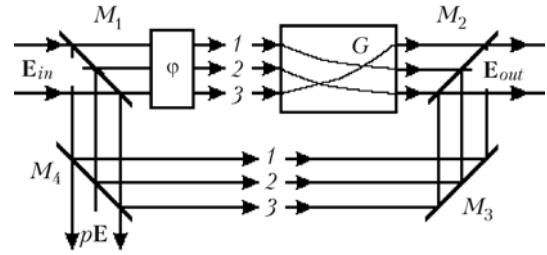


Рис. 1. Модифицированный интерферометр Рождественского как детектор вихрей. Ход лучей 1, 2, 3 показан для угла $\Delta = 120^\circ$

В интерферометре входное поле $\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}, t)$ делится на две части. Распространяясь в разных плечах, эти части испытывают различное затухание, приобретают различный фазовый набег, по-разному испытывают различные дифракционные преобразования. На выходе интерферометра поля складываются. Пусть коэффициенты отражения зеркал, потери энергии в устройствах G и ϕ таковы, что затухание оптического поля в обоих плечах одинаково. Пусть также оптические длины этих плеч отличаются незначительно, т.е. разность этих длин на несколько порядков меньше длины дифракции входного поля. В силу этого влияние разности выражается лишь в отличии фазовых набегов поля в плечах интерферометра на $\phi \equiv \omega \delta t$ (рис. 1), где ω – частота светового поля ($T = 2\pi/\omega$); δt – величина запаздывания поля из-за превышения оптической длины плеча интерферометра с устройствами G и ϕ над длиной второго плеча.

Обозначим через $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ поле, в которое преобразуется входное поле $\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}, t)$, пройдя расстояние, равное оптической длине плеча интерферометра, не содержащего устройств G и ϕ , и испытав затухание, равное затуханию в одном из плеч интерферометра. То есть $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ есть поле на выходе пустого равноплечего интерферометра Рождественского с оптическими длинами плеч, равными тем, что были в исходном. Иными словами, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – это своего рода входное поле интерферометра $\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}, t)$, приведенное к его выходу, но без учета разделения его на две части с последующей интерференцией последних.

Без ограничения общности далее можно оперировать полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, а не $\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}, t)$. Но при переносе получаемых выводов, характеристик и свойств детектора на реальные оптические системы необходимо длину трассы распространения пучка света последних считать с учетом оптической длины одного из плеч интерферометра.

Учитывая сказанное, будем называть входным также и поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Для получения информации о характеристиках $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ используется его часть $p\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, выводимая сквозь зеркало M_4 (см. рис. 1). Тогда поле на выходе интерферометра (интерференционное поле) $\mathbf{E}_{out}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}_\Sigma(\mathbf{r}, t)$ описывается выражением

$$\mathbf{E}_\Sigma(\mathbf{r}, t) = (0,5)^{1/2}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}', t - \delta t)].$$

Здесь $\mathbf{r}' \equiv (x', y')$ – точка поперечного сечения лазерного пучка на входе элемента G , из которой луч приходит в точку $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ на выходе G (в случае прохождения плоской волны). Пусть

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x A(\mathbf{r}) \cos(\omega t + S(\mathbf{r})), \quad (3)$$

где $A(\mathbf{r})$, $S(\mathbf{r})$ – амплитуда и фаза светового поля; \mathbf{e}_x – орт оси Ox (вектор поляризации). Тогда поле на выходе интерферометра подчиняется выражению

$$\mathbf{E}_\Sigma(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x (0,5)^{1/2} \{A(\mathbf{r}) \cos[\omega t + S(\mathbf{r})] + A(\mathbf{r}') \cos[\omega t + S(\mathbf{r}') - \varphi]\} \equiv A_\Sigma(\mathbf{r}) \cos[\omega t + S_\Sigma(\mathbf{r})].$$

Так как интенсивность электромагнитной волны в вакууме задается выражением $(\epsilon_0/\mu_0)^{0,5} \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle_T$, где ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные в системе СИ, распределение интенсивности (без учета множителя $0,5(\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}$) на входе $I(\mathbf{r})$ и выходе $I_\Sigma(\mathbf{r})$ детектора может быть записано следующим образом:

$$I(\mathbf{r}) = 2 \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle_T = A^2(\mathbf{r}),$$

$$I_\Sigma(\mathbf{r}) = 2 \langle \mathbf{E}_\Sigma^2(\mathbf{r}) \rangle_T = 0,5I(\mathbf{r}) + 0,5I(\mathbf{r}') + [I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}')]^{0,5} \cos[S(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}') + \varphi] = A_\Sigma^2(\mathbf{r}),$$

где

$$\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t') dt',$$

а множитель $0,5(\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}$ здесь и далее опущен для компактности записи. Средняя по поперечному сечению интенсивность поля (т.е. интенсивность пучка) на входе $I \equiv \langle I(\mathbf{r}) \rangle_r$ и выходе $I_\Sigma \equiv \langle I_\Sigma(\mathbf{r}) \rangle_r$ детектора равна

$$I = \langle A^2(\mathbf{r}) \rangle_r,$$

$$I_\Sigma = I + \langle [I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}')]^{0,5} \cos[S(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}') + \varphi] \rangle_r = \langle A_\Sigma^2(\mathbf{r}) \rangle_r,$$

где $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_r \equiv \frac{1}{S_b} \iint_{(S_b)} I(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$, (S_b) – область поперечного сечения площадью S_b , занятая пучком.

Введем в рассмотрение относительную интенсивность выходного пучка интерференционного поля

$$I_{rsp} \equiv I_\Sigma/I =$$

$$= 1 + I^{-1} \langle [I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}')]^{1/2} \cos[S(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}') + \varphi] \rangle_r. \quad (4)$$

Очевидно, что величина I_{rsp} равна также отношению мощностей пучков света на выходе и входе интерферометра. Следовательно, I_{rsp} легко найдется в натурном эксперименте.

Рассмотрим «идеальное» вихревое поле на входе детектора $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, содержащее единственную винтовую дислокацию (ВД) волнового фронта (в начале координат поперечной плоскости пучка). Причем его амплитуда $A(\mathbf{r})$ и фаза $S(\mathbf{r})$ в (3) имеют вид

$$A(\mathbf{r}) = A(r); \quad S(\mathbf{r}) = S_r(r) + V_d \vartheta(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ – радиус-вектор точки в поперечном сечении; $r \equiv |\mathbf{r}|$ – расстояние от ВД; V_d – порядок ВД; $\vartheta(\mathbf{r}) \equiv \arg(\mathbf{r})$ – азимутальный угол. В частности, $A(\mathbf{r})$ и $S(\mathbf{r})$ могут иметь вид

$$A(\mathbf{r}) = C \exp(-r^2/r_0^2) (r/\rho_V)^{|V_d|}, \quad S(\mathbf{r}) = V_d \vartheta(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где r_0 – радиус гауссова пучка при $V_d = 0$; ρ_V – феноменологически вводимый [в отличие от (1)] «регулятор» крутизны радиальной зависимости амплитуды. Так как \mathbf{r} и \mathbf{r}' связаны преобразованием поворота на угол $\Delta = 2\pi M/m$, то $r = r'$, $\vartheta(\mathbf{r}) = \vartheta(\mathbf{r}') + M\Delta$ и при подстановке уравнения (5) в (4) получаем

$$I_{rsp}(V_d) \equiv I_\Sigma/I = 1 + \cos[2\pi M V_d/m + \varphi]. \quad (7)$$

Укажем на следствия, которые вытекают из выражения (7):

1. При изменении заряда V_d значение I_{rsp} принимает дискретный ряд значений, причем $I_{rsp}(V_d) = I_{rsp}(V_d + im)$, i – произвольное целое число.

2. Изменяя величину φ , можно компенсировать влияние вихря произвольного порядка на значение I_{rsp} . По аналогии с (2) φ удобно представлять в форме $\varphi = \varphi_0 + 2\pi(LM)/m$, где φ_0 – значение φ при $L = 0$.

3. Величина I_{rsp} не зависит от конкретного вида $A(r)$ и $S_r(r)$ в (3). Более того, уравнение (7) справедливо и в несколько более общем случае, при поворотной симметрии m -го порядка, задаваемой элементом G , когда для любого \mathbf{r} верно $A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}')$ и $S(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}') = \text{const} + 2\pi i$. То есть когда совпадают $A(\mathbf{r})$ и $S(\mathbf{r})$ в различных секторах поперечной плоскости, ограниченных различными лучами с углами $\vartheta = \Delta i$.

Следствия 1 и 2 строго описываются выражением (2). Здесь справедлив прежний принцип нумерации структур (2), но теперь его можно интерпретировать и как правило нумерации значений I_{rsp} (N_s – номер структуры, которой соответствует значение $I_{rsp} N_s$).

Очевидно, что если удаленный источник испускает поле с обсуждаемым в следствии 3 типом симметрии, то при распространении в вакууме эта симметрия не нарушается. Следовательно, не важно, на каком расстоянии от датчика находится источник поля (5).

Докажем более общее утверждение относительно роли длины трассы, а именно, что I_{rsp} не зависит от расстояния между источником любого поля и детектором, расположенными в вакууме или в любой однородной в поперечном сечении, линейной, изотропной и поглощающей среде.

Действительно, дифракция поля в такой среде описывается некоторым линейным оператором L_D . Преобразования, совершаемые над полем в детекторе (расщепление L_{Spl} пучка на три, поворот L_G одного из них элементом G , сложение L_Σ двух пучков), тоже линейны (за исключением операции измерения интенсивности). Выполним перестановку этих операторов. Очевидно, что в силу линейности оператора L_D результат дифракции суммы полей равен сумме дифрагировавших полей. Это означает, что светоделительные зеркала интерферометра M_1 и M_4 можно передвинуть непосредственно к источнику поля, т.е. $L_{Spl} L_D \mathbf{E} \equiv L_D \mathbf{E}_1 + L_D \mathbf{E}_2 + L_D \mathbf{E}_3 =$

$= L_D(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \equiv L_D L_{Spl} \mathbf{E}$ (операторы L_{Spl} , L_D коммутируют). Аналогично можно изменить порядок применения операторов L_D и L_G : $L_G L_D \mathbf{E} = L_D L_G \mathbf{E}$, так как в силу изотропности пространства результат дифракции поля и его последующего поворота неотличим от результата поворота поля и последующей дифракции (на одно и то же расстояние, разумеется). Физически это означает возможность перемещения элемента G на сторону источника поля. Снова, используя свойство линейности L_D , из которого следует, что результат дифракции двух полей с последующим их суммированием равен дифракции суммы исходных полей, мы приходим к выводу о правомерности перестановки L_D и L_S :

$$\begin{aligned} L_S(L_D \mathbf{E}_1, L_D \mathbf{E}_2) &= L_D \mathbf{E}_1 + L_D \mathbf{E}_2 = \\ &= L_D(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = L_D L_S(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2). \end{aligned}$$

Следовательно, и зеркала M_2 , M_3 правомерно передвинуть непосредственно к источнику поля.

В итоге этих процедур мы поместили интерферометр непосредственно за источником поля, а измерители интенсивности (для \mathbf{E}_S и $p\mathbf{E}$) оставили у приемника. При этом от источника в сторону приемника направим два пучка света: \mathbf{E}_S – с выхода интерферометра и $p\mathbf{E}$ – часть поля, отведенную через M_4 . Очевидно, что отношение мощностей (или интенсивностей) этих пучков не зависит от длины пройденного ими (одного и того же) пути (в одной и той же среде). Следовательно, $I_{rsp} \equiv I_S/I$ не зависит от этой длины.

Теперь учтем, что в реальных системах помехи присутствуют всегда, и рассмотрим «неидеальный» случай. Пусть на поле вида (5) наложен фазовый (аддитивный «белый») и амплитудный (мультипликативный «белый») шум с амплитудами A_{nS} и A_{nA} :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= A(r)[1 + A_{nA}\xi_A(\mathbf{r})], \\ S(\mathbf{r}) &= S_r(r) + V_d\vartheta(\mathbf{r}) + A_{nS}\xi_S(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi_A(\mathbf{r}) \in [-1, 1]$, $\xi_S(\mathbf{r}) \in [-1, 1]$ – независимые друг от друга случайные функции \mathbf{r} , равномерно распределенные в интервале $[-1, 1]$, такие, что $\langle \xi_A(\mathbf{r}) \rangle_r = 0$, $\langle \xi_S(\mathbf{r}) \rangle_r = 0$; $\langle \xi_A(\mathbf{r})\xi_A(\mathbf{r}') \rangle_r = 0$, $\langle \xi_S(\mathbf{r})\xi_S(\mathbf{r}') \rangle_r = 0$ при $\mathbf{r}'(\mathbf{r}) \neq \mathbf{r}$. Причем эти два свойства сохраняются на любом подмножестве точек поперечного сечения неконечной мощности (подмножестве ненулевой размерности). В физическом плане это означает, что пространственный масштаб изменения указанных шумов много меньше характерного размера интересующих нас подмножеств, например дуг окружности размером $2\pi r_c/m$, где r_c – радиус окружности. Подставим (8) в (4) и получим

$$\begin{aligned} I_{rsp} &= 1 + I^{-1}\langle A(r)^2[1 + A_{nA}\xi_A(\mathbf{r})][1 + A_{nA}\xi_A(\mathbf{r}')] \times \\ &\times \cos[2\pi V_d M/m + \varphi_0 + A_{nS}[\xi_S(\mathbf{r}) - \xi_S(\mathbf{r}')] \rangle_r. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим два частных случая: $A_{nA} \neq 0$, $A_{nS} = 0$ и $A_{nA} = 0$, $A_{nS} \neq 0$. В первом случае из уравнения (9) мы получаем

$$I_{rsp} = 1 + I^{-1}\langle A(r)^2[1 + A_{nA}\xi_A(\mathbf{r})][1 + A_{nA}\xi_A(\mathbf{r}')] \rangle_r \times$$

$$\times \cos[2\pi V_d M/m + \varphi]. \quad (10)$$

Для преобразования выражения (10) предлагается последовательность действий:

а) Переход от интеграла (усреднения $\langle \rangle_r$) в декартовых координатах x , y к интегралу в полярных

$$\text{координатах: } \langle \rangle_r = \langle \langle r \rangle_{\vartheta} \rangle_r = (1/S_b) \int_0^{r_{\max}} \int_0^{2\pi} r dr d\vartheta.$$

б) Вычисление (там, где это возможно) интеграла по ϑ , с использованием свойств $\langle \xi_A(\mathbf{r}) \rangle_r = 0$, $\langle \xi_A(\mathbf{r})\xi_A(\mathbf{r}') \rangle_r = 0$ при $\mathbf{r}'(\mathbf{r}) \neq \mathbf{r}$, справедливых на любом подмножестве точек поперечного сечения неконечной мощности. Когда вычисление невозможно, поступаем иначе. Поскольку радиус-вектор \mathbf{r} , т.е. r и ϑ , играет роль времени, то в предположении об «эргодичности» заменяем усреднение по ϑ усреднением по реализациям. Например:

$$\langle \xi_A(\mathbf{r})^2 \rangle_{\vartheta} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\{\xi_A(\mathbf{r})\}\xi_A(\mathbf{r})^2 d\xi_A(\mathbf{r}),$$

где $\rho\{\xi_A(\mathbf{r})\} = 1/2$ при $\xi_A(\mathbf{r}) \in [-1, 1]$ и $\rho\{\xi_A(\mathbf{r})\} = 0$ при $\xi_A(\mathbf{r}) \notin [-1, 1]$ – это плотность распределения значений случайного процесса $\xi_A(\mathbf{r})$.

в) Возвращение к декартовым координатам, например:

$$\langle rA(r)^2 \rangle_r = \langle rA(r)^2 \langle 1 \rangle_{\vartheta} \rangle_r = \langle rA(r)^2 \rangle_{\vartheta} = \langle A(r)^2 \rangle_r = I.$$

Тогда из (10) получается компактное выражение

$$I_{rsp} = 1 + \{1 + A_{nA}^2/3\}^{-1} \cos[2\pi V_d M/m + \varphi]. \quad (11)$$

По своему смыслу $A_{nA} \leq 1$. Подставляя значение $A_{nA} = 1$, получим минимальное значение множителя при функции косинуса в (11). Оно равно $\{1 + 1/3\}^{-1} = \{4/3\}^{-1} = 3/4 = 0,75$. Относительная близость этого значения к единице обеспечивает слабое влияние мультипликативного белого амплитудного шума на I_{rsp} , но только при отсутствии фазового шума (искажений фазы). Следствием этого является возможность безошибочного определения значения V_d ввиду неодинаковости значений I_{rsp} для различных V_d . Иллюстрации к этому положению даются ниже, при описании результатов вычислительных экспериментов.

Пусть теперь $A_{nA} = 0$, $A_{nS} \neq 0$. Из уравнения (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} I_{rsp} &= 1 + I^{-1}\langle A(r)^2 \times \\ &\times \cos[2\pi V_d M/m + \varphi + A_{nS}[\xi_S(\mathbf{r}) - \xi_S(\mathbf{r}')] \rangle_r. \end{aligned} \quad (12)$$

Интерпретируя выражение (12) как функцию двух независимых случайных величин и действуя по аналогии с переходом от (10) к (11), получаем

$$I_{rsp} = 1 + [\sin^2(A_{nS})/A_{nS}^2] \cos(2\pi V_d M/m + \varphi). \quad (13)$$

Из (13) следует, что амплитуда фазового шума уменьшает отличия значений I_{rsp} для различных V_d по закону $[\sin(A_{nS})/A_{nS}]^2$, затрудняя распознавание V_d . Так, при $A_{nS} = \pi$ идентификация порядка винтовой дислокации невозможна.

В границах сделанных упрощений правомерно полагать, что справедливо более общее соотношение

$$I_{rsp} = 1 + \{1 + A_{nA}^2/3\}^{-1} \times [\sin(A_{nS})/A_{nS}]^2 \cos(2\pi V_d M/m + \varphi). \quad (14)$$

Моделирование работы детектора вихря и анализ его характеристик

Для проверки полученных выводов, их визуализации и дополнения аналитических расчетов была построена численная модель детектора заряда вихря, работающего в присутствии фазового (аддитивного белого) и амплитудного (мультипликативного белого) шумов с амплитудами A_{nS} и A_{nA} соответственно, наложенными на поле вида (6) при $\rho_V = 8r_0$. В модели детектора с использованием формул (6), (8) и датчика псевдослучайных чисел (встроенного в язык программирования Pascal) рассчитывается поле $\mathbf{E}_\Sigma(\mathbf{r}, t) = (0,5)^{1/2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}', t - \delta t)]$, а затем по определению вычисляются значения $I_\Sigma \equiv \langle I_\Sigma(\mathbf{r}, t) \rangle_r$, $I \equiv \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_r$ и $I_{rsp} \equiv I_\Sigma/I$. Здесь и далее параметр M угла поворота Δ был задан равным единице, длина трассы распространения равнялась нулю.

Пилотная проверка работоспособности детектора вихря в присутствии фазового (аддитивного белого) и амплитудного (мультипликативного белого) шумов выполнена в [5]. Она показала, что вычисление величин I_{rsp} по *единственной* реализации [5, табл. 1] с распределениями $S(\mathbf{r})$, $A(\mathbf{r})$, $A_\Sigma^2(\mathbf{r})$ и значениями I_{rsp} позволяет идентифицировать V_d вихря даже при $A_{nS} = 0,5\pi$, $A_{nA} = 0,5$. Но при $A_{nS} = \pi$, $A_{nA} = 0,5$ идентификация неосуществима.

Для получения более достоверных оценок был выполнен анализ большего числа реализаций при различных уровнях шума. Результаты анализа 150 реализаций (для каждой тройки фиксированных

значений A_{nS} , A_{nA} и V_d) в форме распределений плотности вероятности относительной интенсивности I_{rsp} представлены на рис. 2 и 3.

Параметры численных экспериментов, иллюстрируемых рис. 2 и 3, отличаются величинами поворотов поля Δ и сдвигами фаз φ . Значение φ выбрано так, чтобы обеспечить максимум различий в значениях $I_{rsp}(V_d)$ для данного угла Δ : так, $\varphi = 0$ при $\Delta = 180^\circ$ и $\varphi = -90^\circ$ при $\Delta = 120^\circ$. Общие тенденции, обнаруженные ранее в [5], подтверждаются.

Основные особенности, характеризующие детектор, могут быть систематизированы следующим образом:

1. На работу детектора амплитудный шум практически не влияет, тогда как фазовый оказывает значительное влияние. Этот тезис согласуется с выводами, полученными при анализе уравнений (11) и (13).

2. Определить значение топологического заряда V_d по результатам наблюдения единственной реализации возможно, руководствуясь правилом

$$V_d = \begin{cases} 1 + 2i, & I_{rsp} \leq 1 \\ 0 + 2i, & I_{rsp} > 1 \end{cases} \text{ при } \Delta = 180^\circ,$$

и

$$V_d = \begin{cases} 2 + 3i, & I_{rsp} < 0,94 \\ 0 + 3i, & I_{rsp} \in [0,94, 1,06] \\ 1 + 3i, & I_{rsp} > 1,06 \end{cases} \text{ при } \Delta = 120^\circ, \quad (15)$$

где i – произвольное целое число. Правило справедливо при $A_{nS} \leq 0,64\pi$ (для $\Delta = 120^\circ$) и $A_{nS} \leq 0,72\pi$ (для $\Delta = 180^\circ$). Эти границы на рис. 2 и 3 показаны вертикальным пунктиром.

3. При большом числе реализаций это правило позволяет определять значение V_d даже при $A_{nS} \leq 0,85\pi$ (как для $\Delta = 180^\circ$, так и для $\Delta = 120^\circ$). Но здесь следует оценивать величину $\langle I_{rsp} \rangle$, а не I_{rsp} . Сделанный вывод не противоречит выводу, полученному при анализе формулы (13), где $A_{nS} < \pi$.

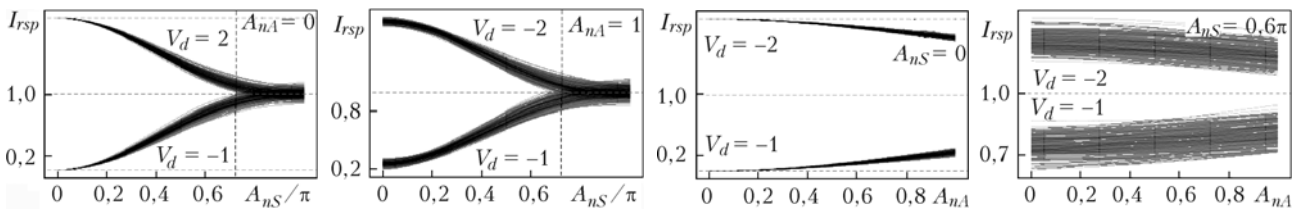


Рис. 2. Влияние фазового и амплитудного шумов с амплитудами A_{nS} , A_{nA} на распределение плотности вероятности относительной интенсивности интерференционного поля I_{rsp} (на возможность распознавания вихря) при $\Delta = 180^\circ$, $\varphi = 0$. Вертикальный пунктир соответствует $A_{nS} = 0,72\pi$, горизонтальные пунктиры – значениям I_{rsp} из ряда 0, 1, 2

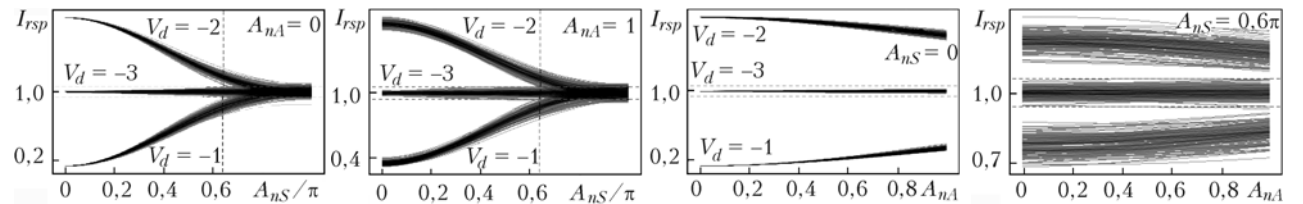


Рис. 3. Влияние фазового и амплитудного шумов с амплитудами A_{nS} , A_{nA} на распределение плотности вероятности относительной интенсивности интерференционного поля $I_{rsp} \equiv \langle A_\Sigma^2 \rangle_r / \langle A^2 \rangle$ (на возможность распознавания вихря) при $\Delta = 120^\circ$, $\varphi = \pi/2$. Вертикальный пунктир соответствует $A_{nS} = 0,64\pi$, горизонтальный – $I_{rsp} = 0,94$ и $1,06$

На рис. 2, как и на рис. 3, распределение плотности вероятности относительной интенсивности интерференционного поля I_{rsp} имеет конечную ширину, что отражает и несовпадение кривых для минимума и максимума на рис. 4.

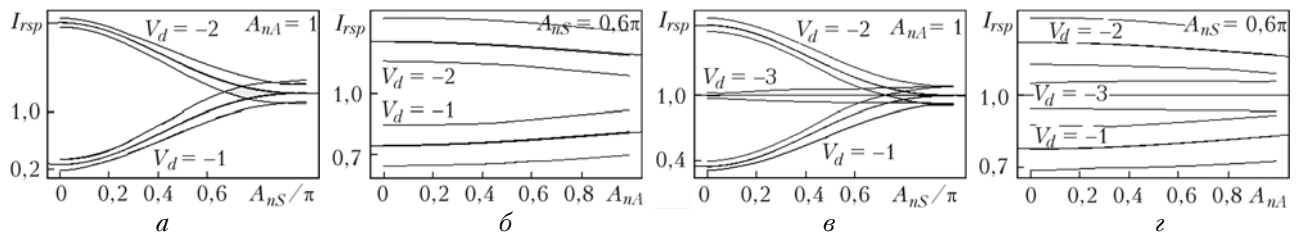


Рис. 4. Влияние фазового и амплитудного шумов с амплитудами A_{nS} , A_{nA} на вычисленные по 150 реализациям экстремальные и средние значения относительной интенсивности интерференционного поля I_{rsp} при $\Delta = 180^\circ$, $\varphi = 0$ (а, б), и при $\Delta = 120^\circ$, $\varphi = \pi/2$ (в, г). $A_{nA} = 0,5$ (а, в), $A_{nS} = 0,6\pi$ (б, г)

По-видимому, причиной этого является относительно малое число точек расчетной сетки (32×32), на которой были представлены распределения величин в поперечной плоскости. Видимо поэтому выполняются лишь приближенно условия: $\langle \xi_A(\mathbf{r}) \rangle_r = 0$, $\langle \xi_S(\mathbf{r}) \rangle_r = 0$; $\langle \xi_A(\mathbf{r}) \xi_A(\mathbf{r}(\mathbf{r})) \rangle_r = 0$ и $\langle \xi_S(\mathbf{r}) \xi_S(\mathbf{r}(\mathbf{r})) \rangle_r = 0$ при $\mathbf{r}'(\mathbf{r}) \neq \mathbf{r}$, которые были использованы при выводе формул (11), (13) и (14). Эту вычислительную погрешность можно полностью убрать при выполнении дополнительного усреднения I_{rsp} (например, по 150 реализациям), что видно из сравнения значения $\langle I_{rsp} \rangle_{Nr}$ со значением I_{rsp} , рассчитанным по (14). Экстремальные и средние значения I_{rsp} получены из численного эксперимента, приводимого на рис. 2 и 3. Средние значения также вычислены по формуле (14) и на рисунке они совпадают с результатами вычислительного эксперимента. Графическое сопоставление этих величин, представленное на рис. 4, доказывает справедливость формул (11), (13), (14). Следовательно, все теоретические выводы относительно воздействия «белого» шума согласуются с данными моделирования процессов преобразования поля в детекторе.

Заключение

Выполненные аналитические исследования и вычислительные эксперименты доказывают перспективность разработки детектора порядка винтовой дислокации волнового фронта, имеющего предложенную конструкцию, включая решения комплекса инженерно-физических и приборостроительных проблем. Дальнейшим направлением исследований логично считать анализ характеристик детектора в условиях искажающего воздействия атмосферы,

а также разработку адаптивной системы передачи данных с помощью оптических вихрей на основе предложенного детектора [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-02-90452-Укр_ф_а.

1. Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. 8185.
2. Molina-Terriza G., Torres J.P., and Torner L. Management of the angular momentum of light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. 4 p. 013601.
3. Gibson G., Courtial J., Padgett M.J., Vasnetsov M., Pas'ko V., Barnett S.M., and Franke-Arnold S. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum // Opt. Express. 2004. V. 12, N 22. P. 5448–5456.
4. Paterson C. Atmospheric turbulence and orbital angular momentum of single photons for optical communication // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. 4 p. 153901.
5. Аксенов В.П., Измайлов И.В., Канев Ф.Ю., Поизнер Б.Н. Адаптивная система передачи данных с помощью оптических вихрей // Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы: Материалы XVI Международ. симпози. Томск, 12–15 октября 2009. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2009. С. 166–168.
6. Измайлов И.В., Магазинников А.Л., Поизнер Б.Н. Идентификация винтовой дислокации волнового фронта и компенсация ее влияния на структурообразование в моделях кольцевого интерферометра // Оптика атмосф. и океана. 2000. Т. 13, № 9. С. 805–812.
7. Измайлов И.В., Лячин А.В., Поизнер Б.Н. Детерминированный хаос в моделях нелинейного кольцевого интерферометра. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 258 с.
8. Измайлов И.В., Поизнер Б.Н. Имитация распознавания оптических вихрей нелинейно-оптической нейросетью // Научная сессия МИФИ – 2003: Сб. науч. тр. 5-й Всерос. научно-техн. конф. «Нейроинформатика-2003» (29–31 янв. 2003 г., г. Москва). М.: МИФИ, 2003. Ч. 1. С. 77–84.
9. Измайлов И.В., Поизнер Б.Н., Раводин В.О. Элементы нелинейной оптики и синергетики в курсе оптоинформатики: Уч. пособие. Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. 92 с.

V.P. Aksenov, I.V. Izmailov, F.Yu. Kanev, and B.N. Poizner. **Detection of topological charge of an optical vortex from measurements of intensity at the output of interferometer: principles and simulation.**

The method of vortex topological charge detection based on measurements of light field intensity and design of a corresponding detector are suggested. A mathematical model of the detector is introduced in the work. Results of numerical experiments simulating recognition of a vortex in the presence of noise are also presented along with assessments of the detector performance. The data of numerical experiments are confirmed by analytical calculations.

Определение топологического заряда оптического вихря по измерениям интенсивности сигнала...

1041