«Оптика атмосферы и океана», **23**, № 11 (2010)

УДК 539.194:539.196.3

Уточнение некоторых аналитических решений для оптико-акустического сигнала в жидкостях и газах

А.Е. Протасевич*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 16.08.2010 г.

Без учета влияния акустической волны на температуру поглощающей жидкости получено точное решение уравнений, описывающих формирование цилиндрически симметричного оптико-акустического сигнала от лазерного импульса гауссовой формы в случае мгновенного перехода поглощенной световой энергии в тепло. В решении учитывается изменение возбуждаемой области за счет теплопроводности среды. Также получено точное решение уравнений, описывающих формирование цилиндрически симметричного оптико-акустического сигнала в газовых средах с немгновенной релаксацией возбужденных молекул после прохождения лазерного импульса с пространственным распределением интенсивности, имеющим гауссову форму. В решении учитывается изменение размеров области генерации оптико-акустического сигнала за счет диффузии возбужденных молекул.

Ключевые слова: оптико-акустический сигнал, жидкость, газ, теплопроводность, релаксация, диффузия; optoacoustic, liquid, gas, thermal conductivity, relaxation, diffusion.

Введение

Часто оказывается, что простые выражения, которые поддаются аналитическому вычислению, остаются не полученными просто в силу своей невостребованности, поскольку хорошие физические или математические приближения позволяют описывать те или иные явления с достаточной точностью.

При исследовании взаимодействия лазерного излучения с газовыми средами и жидкостями часто применяется оптико-акустический метод измерения поглощенной веществом энергии. Теория этого метода хорошо развита, и в качестве классического труда по этой тематике можно привести, например, книгу [1]. Однако нельзя объять необъятное, и всегда можно стремиться к уточнению физических или математических моделей, а также и просто к уточнению тех или иных выражений, отказываясь от каких-либо ограничений, упрощений, приближений и т.д. Данная статья, не претендуя на сколько-нибудь серьезное место в исследованиях по оптико-акустической спектроскопии, призвана обратить внимание читателей на некоторые мелкие моменты в теории оптико-акустического метода, которые, по мнению автора, можно улучшить.

Целью данной статьи является уточнение решения, полученного для оптико-акустического сигнала в работе [2], а также получение точных решений волнового уравнения, описывающего избыточное давление оптико-акустического сигнала в газовых средах с немгновенной релаксацией теплового источника при наличии диффузии возбужденных молекул.

* Александр Евгеньевич Протасевич (A.E.Protasevich@mail.ru).

Уточнение решения задачи определения оптико-акустического сигнала в жидкости с мгновенным преобразованием поглощенной энергии света в тепло

Следуя работе [2] при описании поглощения лазерного излучения слабо поглощающей жидкостью, рассмотрим простую геометрическую модель, обладающую цилиндрической симметрией. В этой модели возбуждающий пучок лазерного излучения проходит через жидкость и порождает звуковую волну, которая детектируется на некотором расстоянии r от центра пучка (оптической оси). Предполагается, что влиянием стенок ячейки оптико-акустического детектора (ОАД) можно пренебречь и решать задачу во всем пространстве. Уравнения для определения избыточных по отношению к их равновесным значениям величин давления и температуры p_1 и T_1, возникающих за счет поглощения жидкостью импульса лазерного излучения интенсивности I, представляют собой линеаризованные уравнения гидродинамики. Первое уравнение имеет вид

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p_1 = -\beta\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_1 + \frac{\gamma^e}{2nc}\nabla^2 I, \qquad (1)$$

второе уравнение (выражает закон сохранения энергии)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\kappa\nabla^2 T_1 - \rho_0 C_p\frac{\partial T_1}{\partial t}\right] - \beta T_0\upsilon^2\nabla^2 p_1 = -\frac{\partial}{\partial t}S_t. \qquad (2)$$

Здесь t — время; ρ_0 — равновесная плотность; T_0 — равновесная температура; κ — теплопроводность; C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; v — скорость звука; β — коэффициент теплового объемного расширения; S_t — источник тепловой энергии, обусловленный поглощением оптического излучения; c — скорость света в вакууме; n — показатель преломления; $\gamma^e = \rho_0(\partial n^2/\partial\rho)_T$ [2].

В линейном случае источник тепловой энергии за счет оптического поглощения в предположении, что теплота выделяется немедленно после поглощения света, записывается как [2]:

$$S_t(r,t) = \alpha I(r,t), \tag{3}$$

где α — коэффициент поглощения света; I — интенсивность излучения лазерного импульса (считается, что интенсивность постоянна по всей длине ячейки ОАД). Более детально используемые предположения описаны в оригинальной работе [2], в которой рассматривается случай, когда интенсивность лазерного импульса имеет гауссову форму:

$$I(r,t) = \frac{2E}{\pi^{\frac{3}{2}} w_0^2 \tau}\exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2} - \frac{t^2}{\tau^2}\right). \tag{4}$$

Здесь через E обозначена полная энергия лазерного импульса; w_0 и τ — параметры лазерного импульса (величина w_0 характеризует поперечный размер лазерного пучка, τ — длительность лазерного импульса).

Далее в [2] пренебрегается влиянием акустической волны на температуру поглощающей жидкости, в результате чего уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\kappa\nabla^2 T_1 - \rho_0 C_p \frac{\partial T_1}{\partial t}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}S_t. \tag{5}$$

Это уравнение, определяющее тепловую диффузию молекул (теплопроводность) и служащее для определения избыточной температуры поглощающей жидкости, теперь не содержит избыточное давление и поэтому может быть решено независимо от волнового уравнения (1). Последнее обстоятельство значительно упрощает задачу и дает возможность в итоге выписать решение задачи определения оптико-акустического сигнала в аналитическом виде.

Первое отличие данной статьи от работы [2] связано с тем, что существует точное решение волнового уравнения (1), более удобное для аналитических вычислений, нежели то решение, которое приводится в [2]. При использовании этого решения не нужно делать никаких математических приближений при проведении выкладок. Согласно работе [3] общее решение волнового уравнения (1) можно представить в следующей форме:

$$p_1(r,t) = v^2\beta\rho_0\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\infty}r'dr'\int_0^{\infty}kdk\left[\frac{\partial}{\partial t'}T_1(r',t')\right]\times$$
$$\times\cos kv(t-t')J_0(kr)J_0(kr') -$$
$$-v^2\frac{\gamma^e}{2nc}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\infty}r'dr'\int_0^{\infty}kdk\left[\int_{-\infty}^{t'}dt''\nabla^2 I(r',t'')\right]\times$$
$$\times\cos kv(t-t')J_0(kr)J_0(kr'), \tag{6}$$

где через J_0 обозначена бесселева (цилиндрическая) функция нулевого порядка первого рода [4]. Это решение базируется на интеграле Фурье–Бесселя [5], а не на преобразовании Фурье, как в работе [2].

Второе отличие от работы [2] связано с тем, что существует точное аналитическое решение уравнения (5) и поэтому в общем случае можно не пренебрегать теплопроводностью поглощающей жидкости (тепловой диффузией молекул) при решении задачи о формировании оптико-акустического сигнала. Пользуясь [6], можно записать общее решение задачи типа Коши для уравнения (5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}T_1(r,t) = \frac{1}{\rho_0 C_p}\int_{-\infty}^{t}d\zeta\int_0^{\infty}d\xi G(r,\xi,t-\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}S_t(\xi,\zeta), \tag{7}$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{\xi}{2Kt}\exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4Kt}\right)I_0\left(\frac{r\xi}{2Kt}\right),$$

$K = \kappa/(\rho_0 C_p)$ — коэффициент тепловой диффузии жидкости [1] (эта величина будет использована и в окончательном выражении для сокращения записи полученной формулы), а через I_0 обозначена модифицированная функция Бесселя.

После подстановки (7) в (6) с использованием (3) и (4), проведя несложные вычисления и взяв несколько табличных интегралов [4], можно получить окончательное выражение для избыточного давления оптико-акустического сигнала на расстоянии r от оптической оси лазера в момент времени t:

$$p_1(r,t) = \frac{E}{4\pi}\frac{\alpha\beta}{C_p}v^2\int_0^{\infty}kdkJ_0(kr)\exp\left(-t^2/\tau^2 - k^2w_0^2/8\right)\times$$
$$\times\left\{\mathrm{Re}\left(\exp\left(-z^2\right)\mathrm{erfc}(-iz)\Big|_{z=\frac{kv\tau}{2}-i\frac{t}{\tau}}\right) -\right.$$
$$-\frac{k^2K}{\left(k^2K\right)^2+(kv)^2}\left[-\left(k^2K\right)\left(\exp\left(x^2\right)\mathrm{erfc}(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}\tau k^2K-\frac{t}{\tau}}\right)+\right.$$
$$+\left(k^2K\right)\mathrm{Re}\left(\exp\left(-z^2\right)\mathrm{erfc}(-iz)\Big|_{z=\frac{kv\tau}{2}-i\frac{t}{\tau}}\right)+$$
$$\left.\left.+kv\,\mathrm{Im}\left(\exp\left(-z^2\right)\mathrm{erfc}(-iz)\Big|_{z=\frac{kv\tau}{2}-i\frac{t}{\tau}}\right)\right]\right\}+$$
$$+\frac{E}{4\pi}\frac{\gamma^e}{2nc}\int_0^{\infty}kdkJ_0(kr)\exp\left(-t^2/\tau^2 - k^2w_0^2/8\right)\times$$
$$\times kv\,\mathrm{Im}\left(\exp\left(-z^2\right)\mathrm{erfc}(-iz)\Big|_{z=\frac{kv\tau}{2}-i\frac{t}{\tau}}\right).$$

Здесь и далее через i обозначена мнимая единица, посредством $\mathrm{erf}(x)$ обозначен интеграл вероятностей, а посредством $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$ — дополнительный интеграл вероятностей [4, 6], так что выполняются равенства:

$$\exp(-z^2)\mathrm{erfc}(-iz) = -i\exp(-z^2)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty \exp(t^2)dt =$$

$$= \exp(-z^2)\left(1 + i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(t^2)dt\right).$$

Цилиндрически симметричное решение для оптико-акустического сигнала в газовых средах с немгновенной релаксацией возбужденных молекул и учетом их диффузии

В этом разделе рассматривается генерация оптико-акустического сигнала при прохождении лазерного импульса в газе, находящемся при низком давлении. В этом случае необходимо учитывать протяженность во времени процессов релаксации возбужденных молекул, а также то обстоятельство, что возбужденные молекулы при достаточно медленной релаксации успевают уходить из освещенной области посредством их диффузии. Результаты этого раздела будут опираться в основном на волновое уравнение, представленное в работе [3]. Для полноты изложения будут повторены некоторые моменты, представленные в предыдущем разделе.

Зависимость избыточного давления оптико-акустического сигнала от радиуса возбуждаемой области принято получать на основе решения линеаризованного уравнения для давления p_1 [3]:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \upsilon^2\nabla^2 p_1 = (\gamma - 1)\frac{\partial}{\partial t}W, \tag{8}$$

где W — скорость тепловыделения в единице объема; γ — отношение теплоемкостей. Данное уравнение является упрощением одного из уравнений системы, описывающей формирование оптико-акустического сигнала в газе [1], в предположении, что можно пренебречь членом, содержащим производную по времени от избыточной температуры газа.

Снова рассмотрим простую геометрическую модель, обладающую цилиндрической симметрией. В этой модели возбуждающий пучок лазерного излучения, проходя через газовую среду, порождает волну избыточного давления, которая детектируется на некотором расстоянии r от центра пучка в момент времени t. Так же, как и раньше, предполагается, что влиянием стенок ячейки ОАД можно пренебречь и решать задачу во всем пространстве. Опять считается, что скорость тепловыделения в единице объема не зависит от координаты z в цилиндрической системе координат, т.е. она постоянна вдоль пути лазерного луча. Это стандартное для таких задач предположение, и оно верно, когда поглощение невелико. Тогда волновое уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial^2 p_1(r,t)}{\partial t^2} - \upsilon^2\left(\frac{\partial^2 p_1(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_1(r,t)}{\partial r}\right) =$$

$$= (\gamma - 1)\frac{\partial}{\partial t}W(r,t) \tag{9}$$

и его решением, согласно [3], будет

$$p_1(r,t) = (\gamma - 1)\int_{-\infty}^t dt'\int_0^\infty r'dr'\int_0^\infty kdkW(r',t')\times$$

$$\times\cos k\upsilon(t - t')J_0(kr)J_0(kr'). \tag{10}$$

В цилиндрически симметричном случае при наличии источника генерации возбужденных молекул мощности $\Phi(r, t)$ (эта величина, пропорциональная произведению коэффициента поглощения света α и интенсивности лазерного излучения I [7]) уравнение, описывающее временную зависимость плотности возбужденных молекул $N_1(r,t)$ с учетом их диффузии, имеет вид [7]:

$$\frac{\partial N_1(r,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 N_1(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_1(r,t)}{\partial r}\right) -$$

$$-\omega_{VT}N_1(r,t) + \Phi(r,t), \tag{11}$$

где D — коэффициент диффузии возбужденных молекул; ω_{VT} — скорость гомогенной релаксации. Согласно [1, 7] скорость тепловыделения в единице объема $W(r, t)$ пропорциональна произведению $N_1(r,\ t)\omega_{VT}$.

Пользуясь [6], несложно выписать общее решение задачи типа Коши ($t_0 \le t,\ 0 \le r \le \infty$) для уравнения (11):

$$N_1(r,t) = \exp\left(-\omega_{VT}(t - t_0)\right)\int_0^\infty G(r,\xi,t - t_0)N_1(\xi,t_0)d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^t dt'\exp\left(-\omega_{VT}(t - t')\right)\int_0^\infty d\xi G(r,\xi,t - t')\Phi(\xi,t'), \tag{12}$$

где

$$G(r,\xi,t) = \frac{\xi}{2Dt}\exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right)I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right).$$

Поскольку в начальный момент времени t_0 до начала воздействия лазерного излучения плотность возбужденных молекул была равна нулю ($N_1(r, t_0) = 0$), то первое слагаемое в правой части выражения (12) нужно опустить. В дальнейшем, ссылаясь на выражение (12), всегда будет предполагаться, что первого слагаемого в этой формуле нет.

Далее будет предполагаться, что интенсивность излучения лазерного импульса может быть представлена в виде

$$I(r,t) = \frac{E}{2\pi}\psi(r)\varphi(t), \tag{13}$$

где

$$E = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\infty} r dr\, I(r,t);$$

функция

$$\psi(r) = \frac{2}{r_G^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_G^2}\right)$$

описывает пространственное распределение интенсивности (параметр r_G характеризует радиус гауссова пучка), а функция $\varphi(t)$ в (13) определяет временную зависимость интенсивности лазерного излучения. Будут рассмотрены три вида этой временной зависимости:

1) мгновенный импульс

$$\varphi(t) = \delta(t), \tag{14}$$

где посредством $\delta(t)$ обозначена дельта-функция Дирака [6];

2) импульс прямоугольной формы

$$\varphi(t) = \frac{\vartheta(t)\vartheta(\tau - t)}{\tau}. \tag{15}$$

Здесь и далее посредством $\vartheta(t)$ обозначена единичная функция Хевисайда [6], определяемая как

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0; \end{cases}$$

3) импульс гауссовой формы

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right). \tag{16}$$

Рассмотрим линейное поглощение. В этом случае, поскольку коэффициент поглощения света α постоянен, мощность источника генерации возбужденных молекул $\Phi(r, t)$ будет прямо пропорциональна интенсивности лазерного излучения $I(r, t)$:

$$\frac{\Phi(r,t)}{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_0^{\infty} r' dr'\, \Phi(r',t')} = \frac{I(r,t)}{E}.$$

Теплота, выделившаяся на единице длины пути лазерного луча за все время действия теплового источника, равна

$$\Theta = \pi r_G^2 Q = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\infty} r dr\, W(r,t),$$

где Q — плотность энергии, выделившейся в центре пучка [3]. Несложно увидеть, что во всех трех рассматриваемых случаях выполняется равенство

$$W(r,t) = \omega_{VT}\Theta \frac{N_1(r,t)}{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_0^{\infty} r' dr'\, \Phi(r',t')}.$$

Тогда, используя общий вид решения (12), можно с помощью [4] получить выражение для скорости тепловыделения в единице объема в форме

$$W(r,t) = \frac{\omega_{VT}\Theta}{2\pi} \int_{t_0}^{t} \frac{2}{4D(t - t'') + r_G^2} \times$$
$$\times \exp\left(-\omega_{VT}(t - t'') - \frac{r^2}{4D(t - t'') + r_G^2}\right) \varphi(t'') dt''. \tag{17}$$

Далее, используя это выражение, можно опять с помощью [4] вычислить интеграл:

$$\int_0^{\infty} r' dr' W(r',t') J_0(kr') = \frac{\omega_{VT}\Theta}{2\pi} \exp\left(-k^2 r_G^2/4\right) \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t'} \exp\left(-(t' - t'')\left(\omega_{VT} + k^2 D\right)\right) \varphi(t'') dt''. \tag{18}$$

Для всех трех рассматриваемых случаев значение t_0 в формуле (12), а также и в формулах (17) и (18) можно положить равным $-\infty$ (для первых двух случаев в качестве t_0 можно взять любое число меньше нуля).

Вначале остановимся на случае мгновенного возбуждения молекул. После подстановки (14) в (18), а затем — (18) в (10) с использованием значений табличных интегралов из [4] получим окончательное выражение для избыточного давления оптико-акустического сигнала в случае мгновенного возбуждения молекул (мгновенного импульса) с учетом их диффузии. При $t \geq 0$

$$p_1(r,t) = (\gamma - 1)\frac{\omega_{VT}\Theta}{2\pi} \int_0^{\infty} k dk \exp(-k^2 r_G^2/4) J_0(kr) \times$$
$$\times \frac{1}{(\omega_{VT} + k^2 D)^2 + (kv)^2} \Big\{(\omega_{VT} + k^2 D) \times$$
$$\times \left[\cos kvt - \exp\left(-t(\omega_{VT} + k^2 D)\right)\right] + kv \sin kvt\Big\},$$

при $t < 0$ оптико-акустический сигнал отсутствует ($p_1(r, t) = 0$).

Отметим здесь, что в случае, когда источник генерации возбужденных молекул начинает действовать в какой-то конечный момент времени, как, например, в первом и во втором рассматриваемых случаях, можно использовать также и другой вид решения волнового уравнения (9), который легко получить, исходя из формул, приведенных в [8]. Так, несложно увидеть, что когда действие источника генерации возбужденных молекул начинается в момент времени $t = 0$, то при $t \geq 0$ решение уравнения (9) будет иметь вид

$$p_1(r,t) = (\gamma - 1)\frac{1}{2\pi v} \int_0^{t} dt' \int_0^{v(t-t')} r' dr' \frac{1}{\sqrt{v^2(t - t')^2 - r'^2}} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial t'} W(\sqrt{r'^2 + r^2 + 2r'r\cos\varphi}, t'). \tag{19}$$

Скорость тепловыделения в единице объема $W(r, t)$ дается выражением (17), и, например, в первом случае (мгновенный импульс) согласно (14) принимает вид

$$W(r,t) = \frac{\omega_{VT}\Theta}{2\pi}\left[\frac{2}{4Dt + r_G^2}\exp\left(-\omega_{VT}t - \frac{r^2}{4Dt + r_G^2}\right)\right]\vartheta(t).$$

При подстановке этого выражения в формулу, определяющую избыточное давление оптико-акустического сигнала (19), и при последующем дифференцировании его по времени в момент времени $t = 0$ возникнет дельта-функция Дирака. Поэтому нижний предел интегрирования по времени нужно рассматривать как предел слева.

Теперь остановимся на случае, когда лазерный импульс имеет прямоугольную форму. После подстановки (15) в (18) в формуле (18) в качестве t_0 можно взять любое значение меньше нуля. Окончательные выражения для давления оптико-акустического сигнала, порожденного лазерным импульсом прямоугольной формы с учетом диффузии возбужденных молекул, получаются после подстановки (18) в (10) и вычисления табличных интегралов из [4] и будут иметь вид

при $t < 0$

$$p_1(r,t) = 0;$$

при $0 \le t \le \tau$

$$p_1(r,t) = (\gamma-1)\frac{\omega_{VT}\Theta}{2\pi}\frac{1}{v\tau}\int_0^\infty dk\exp(-k^2r_G^2/4)J_0(kr)\times$$

$$\times\frac{1}{(\omega_{VT}+k^2D)^2+(kv)^2}\Big\{kv\Big[\exp\Big(-t(\omega_{VT}+k^2D)\Big)-\cos kvt\Big]+$$

$$+(\omega_{VT}+k^2D)\sin kvt\Big\};$$

при $t > \tau$

$$p_1(r,t) = (\gamma-1)\frac{\omega_{VT}\Theta}{2\pi}\frac{1}{v\tau}\int_0^\infty dk\exp(-k^2r_G^2/4)J_0(kr)\times$$

$$\times\frac{1}{(\omega_{VT}+k^2D)^2+(kv)^2}\Big\{kv\Big[\cos kv(t-\tau)-\cos kvt+$$

$$+\exp\Big(-t(\omega_{VT}+k^2D)\Big)-\exp\Big(-(t-\tau)(\omega_{VT}+k^2D)\Big)\Big]+$$

$$+(\omega_{VT}+k^2D)\Big[\sin kvt-\sin kv(t-\tau)\Big]\Big\}.$$

Наконец, обратимся к случаю лазерного импульса гауссовой формы. В этом случае в формуле (18) в качестве t_0 нужно взять значение, равное $-\infty$. После подстановки (16) в (18) и после последующей подстановки (18) в (10) с использованием значений табличных интегралов из [4] окончательное выражение для избыточного давления оптико-акустического сигнала, порожденного лазерным импульсом гауссовой формы с учетом диффузии возбужденных молекул, примет вид

$$p_1(r,t) = (\gamma-1)\frac{\omega_{VT}\Theta}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^\infty kdk\exp(-k^2r_G^2/4)\times$$

$$\times\exp(-t^2/\tau^2)J_0(kr)\frac{1}{(\omega_{VT}+k^2D)^2+(kv)^2}\times$$

$$\times\left\{(\omega_{VT}+k^2D)\left[\mathrm{Re}\left(\exp(-z^2)\mathrm{erfc}(-iz)\Big|_{z=\frac{kv\tau}{2}-i\frac{t}{\tau}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\exp(x^2)\mathrm{erfc}(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}\tau(\omega_{VT}+k^2D)-\frac{t}{\tau}}\right]+$$

$$\left.+kv\,\mathrm{Im}\left(\exp(-z^2)\mathrm{erfc}(-iz)\Big|_{z=\frac{kv\tau}{2}-i\frac{t}{\tau}}\right)\right\}.$$

Легко убедиться, что в пределе, когда длительность лазерного импульса стремится к нулю ($\tau \to 0$ во втором и в третьем случаях), решения, полученные для лазерных импульсов прямоугольной и гауссовой форм, переходят в решение, полученное для мгновенного возбуждения. В пределе, когда скорость гомогенной релаксации неограниченно возрастает ($\omega_{VT} \to \infty$), выражение для скорости тепловыделения в единице объема для рассмотренных здесь лазерных импульсов прямоугольной и гауссовой форм принимает вид [3]:

$$W(r,t) = \Theta\frac{I(r,t)}{E} = \frac{\Theta}{2\pi}\psi(r)\varphi(t),$$

поэтому решения уравнения (9) для случая мгновенной релаксации могут быть получены из приведенных здесь решений с помощью предельного перехода при $\omega_{VT} \to \infty$.

Заключение

В данной статье представлено уточнение выражения для расчета избыточного давления оптико-акустического сигнала в слабо поглощающей жидкости, порождаемого лазерным импульсом гауссовой формы. Рассмотренная задача имела осевую симметрию. В отличие от работы [2] в данной статье не пренебрегается теплопроводностью среды, а остается в силе лишь предположение о том, что волна избыточного давления не влияет на температуру среды. Но, так же как и в [2], считается, что преобразование поглощенной световой энергии лазерного импульса в тепло происходит мгновенно.

Кроме того, представлены точные выражения для расчета оптико-акустического сигнала в слабо поглощающей газовой среде, порождаемого лазерным импульсом с пространственным распределением интенсивности, имеющим гауссову форму. Рассмотренная задача также имела осевую симметрию. Полученные выражения описывают немгновенную релаксацию теплового источника. Исследовались три случая временной зависимости лазерного импульса: мгновенное возбуждение, импульс прямоугольной формы и импульс гауссовой формы. Все полученные решения учитывают изменение размеров области генерации оптико-акустического сигнала, обусловленные диффузией возбужденных молекул.

Численные расчеты показали, что полученные формулы правильно воспроизводят форму оптико-акустического сигнала и его зависимость от давления газа. При больших давлениях с ростом давления наблюдаются увеличение длительности, уменьшение амплитуды и величины времени регистрации максимума давления импульса сжатия. Как и ожидалось, в случае коротких лазерных импульсов прямоугольной и гауссовой формы все три рассмотренных случая приводят практически к одинаковому результату.

Учет диффузии возбужденных молекул при низких давлениях приводит к увеличению размеров теплового источника и, как следствие, к увеличению длительности сжатия в звуковой волне, а также к уменьшению величины времени регистрации максимума давления звукового сигнала по сравнению с рассмотрением, когда диффузия не учитывается.

Результаты работы могут быть полезны при исследовании взаимодействия импульсного лазерного излучения с оптически прозрачным веществом, находящимся в газовом или жидком состоянии.

Автор выражает благодарность Б.А. Тихомирову за консультации, касающиеся физической стороны вопроса рассмотренных явлений, при работе над статьей.

1. *Жаров В.П., Летохов В.С.* Лазерная оптико-акустическая спектроскопия. М.: Наука, 1984. 320 с.
2. *Heritier J.M.* Electrostrictive limit and focusing effects in pulsed photoacoustic detection // Opt. Commun. 1983. V. 44, N 4. P. 267–272.
3. *Джиджоев М.С., Попов В.К., Платоненко В.Т., Чугунов А.В.* Зависимость параметров оптоакустического сигнала от радиуса возбуждаемой области // Квант. электрон. 1984. Т. 11, № 2. С. 414–416.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
6. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
7. *Пономарев Ю.Н., Агеев Б.Г., Зигрист М.В., Капитанов В.А., Куртуа Д., Никифорова О.Ю.* Лазерная оптико-акустическая спектроскопия межмолекулярных взаимодействий в газах / Под ред. Л.Н. Синицы. Томск: МГП «РАСКО», 2000. 200 с.
8. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1965. 608 с.

A.E. Protasevich. **Refinement of some analytical solutions for optical-acoustic signal in liquids and gases.**

Ignoring the acoustic wave influence on the absorbing liquid temperature, an accurate solution of equations is derived, which describe the formation of the cylindrically symmetrical optical-acoustic signal from the laser pulse of Gaussian shape for the case of instant transition of the absorbed light energy into the heat. The solution takes into account the variation of the excited liquid at the cost of the medium heat-conductivity. As well, an accurate solution of equations is derived, describing the formation of the cylindrically symmetrical optical-acoustic signal in gas media with not-instant relaxation of the excited molecules after the pass of the laser pulse with a spatial distribution of the intensity, having the Gaussian shape. The variation of sizes of the optical-acoustic signal generation region due to the diffusion of the excited molecules is taken into account.