

В.В. Веретенников, Ю.Ю. Трапезников

**ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ
ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ «ЗАТМЕННЫХ»
ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙНОВ**

В работе представлены результаты численных исследований пространственного разрешения метода «затменного» зондирования при восстановлении «тонкой» структуры вертикальных профилей ослабления оптически активных компонент атмосферы. Приводятся данные по оценке точностных характеристик алгоритмов интерпретации «затменных» экспериментов, основанных на обращении уравнения Абеля без дифференцирования правой части при использовании интерполяционных и сглаживающих сплайнов.

Одним из перспективных методов определения пространственного распределения оптически активных компонент атмосферы является метод, основанный на измерении спектрального пропускания излучения внеатмосферных источников на скользящих трассах («затменное» зондирование), обладающий достаточно богатым информационным содержанием при относительной простоте экспериментальной реализации и математической обработки измеряемых сигналов. Вопросы информационного обеспечения «затменных» экспериментов, вычислительные аспекты решения соответствующих обратных задач, а также методики реализации экспериментов являлись предметом обсуждения во многих работах [1–3].

Вместе с тем важный вопрос о разрешающей способности метода «затменного» зондирования к настоящему времени остается недостаточно изученным. Решение этой задачи в значительной мере определяется выбором алгоритмов математической обработки измеряемых сигналов.

В настоящей работе приводятся результаты численных исследований по оценке возможностей восстановления «тонкой» структуры вертикальных профилей коэффициента ослабления при затменном зондировании атмосферы. При этом расчетный анализ основывался на применении аппарата метода сплайнов, обеспечивающем высокие точностные характеристики при решении уравнения Абеля [4, 6], к которому, как известно, сводится задача «затменного» зондирования.

При описании экспериментов по зондированию атмосферы на скользящих трассах будем исходить из соотношения

$$\tau(h) = \int_L \alpha(h, l) dl, \quad (1)$$

в котором оптическая толщина $\tau(h)$ определяется интегрированием вдоль линии визирования L с тангенциальной высотой h , а $\alpha(h, l)$ — объемный коэффициент ослабления. Если предположить, что коэффициент ослабления $\alpha(r)$ зависит только от радиальной координаты r (сферически симметричная атмосфера), то с учетом рефракции света уравнение (1) можно привести к виду

$$\tau[h(s)] = 2 \int_s^{R+H} \frac{\alpha(r) r m(r) dr}{[r^2 m^2(r) - s^2 m^2(s)]^{1/2}}, \quad (2)$$

где s — перигейная высота, определяющая минимальное удаление линии визирования от поверхности Земли; R — радиус Земли; H — высота, до которой фиксируется содержание оптически активных компонент атмосферы; $m(r)$ вертикальный профиль показателя преломления воздуха. Тангенциальная высота h выражается через перигейную высоту s линии визирования по формуле $h = sm(s)$. Задача состоит в том, чтобы по измерениям оптической толщи на касательных трассах $\tau(h)$ из уравнения (2) восстановить вертикальный профиль коэффициента ослабления $\alpha(r)$. С этой целью перейдем в уравнении (2) к новой переменной

$$y = \varphi(r) \equiv rm(r). \quad (3)$$

В результате будем иметь

$$\tau(h) = 2 \int_h^{R+H} \frac{A(y) y dy}{[y^2 - h^2]^{1/2}}, \quad (4)$$

где

$$A(y) = \alpha[\psi(y)] \frac{d\psi}{dy}, \quad (5)$$

а $\psi(y) = \varphi^{-1}(y)$ – функция, обратная функции $\varphi(r)$. Соотношение (5) можно преобразовать к виду

$$\alpha(r) = \frac{d\varphi}{dr} A[\varphi(r)], \quad (6)$$

определяющему искомый профиль $\alpha(r)$, через решение интегрального уравнения Абеля $A(y)$ (4), а также через функцию $\varphi(r)$ (3) и ее производную. Очевидно, что функция $A(y)$ описывает профиль коэффициента ослабления, восстанавливаемый по данным «затменного» зондирования в случае, когда рефракцией пренебрегают. При этом выражение (6) можно рассматривать как коррекцию решения с учетом рефракции.

Остановимся подробнее на вопросах обращения уравнения (4) применительно к задаче «затменного» зондирования. К настоящему времени разработано достаточно много численных методов решения уравнения Абеля (4), подробный обзор которых можно найти в работах [4, 5]. Как показано в [6], эффективные алгоритмы обращения уравнения Абеля можно разработать, используя методы сплайн-аппроксимации функций. Непосредственное применение известной формулы обращения Абеля предполагает выполнение операции дифференцирования функций, заданных с ошибкой, что является некорректной задачей, обуславливающей необходимость использования регуляризирующих алгоритмов. В настоящей работе реализован регуляризирующий алгоритм обращения уравнения Абеля без дифференцирования правой части, который предложен в [6] и основан на применении кубических сплайнов. Согласно [6] решение уравнения (4) можно записать в виде

$$A(y) = \frac{\tau(y)}{\pi[(R+H)^2 - y^2]^{1/2}} - \frac{1}{\pi} \int_y^{R+H} \frac{h[\tau(h) - \tau(y)]dh}{(h^2 - y^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Для значений оптической толщины $\tau(h)$, заданных в дискретном наборе узлов h_i , $i = 1, \dots, n$, можно построить кубический сплайн

$$S_n(h) = \sum_{i=0}^3 c_{im} (h - h_m)^i, \quad h_m \leq h \leq h_{m+1}, \quad (8)$$

где c_{im} – коэффициенты интерполяционного или сглаживающего сплайна. При замене в выражении (7) функции $\tau(h)$ сплайном $S_n(h)$ интеграл в правой части вычисляется аналитически. При этом погрешность вычисления функции $A(y)$ будет складываться из погрешностей, обусловленных, с одной стороны, заменой функции $\tau(h)$ кубическим сплайном $S_n(h)$ (погрешность метода), а с другой стороны – присутствием ошибок в задании оптической толщины $\tau(h)$. Как показывают результаты численного моделирования, сплайн-аппроксимация профиля $\tau(h)$ обеспечивает высокую точность вычисления интеграла в правой части (7) для оптических характеристик атмосферы, рекомендуемых в качестве модельных [7]. Например, для узлов h_i , заданных с равномерным шагом 1 км, погрешность метода составляет около 0,1% и является пренебрежимо малой по сравнению с погрешностью, обусловленной ошибками в исходных данных.

Влияние ошибок в исходных данных на точность решения обратной задачи «затменного» зондирования с использованием описанного алгоритма исследовалось в численных экспериментах. При этом прямая задача решалась для профилей коэффициента ослабления, заданных в интервале высот от 5 до 30 км, а при обращении измерения задавались на равномерной по высоте сетке с шагом 0,5 и 1 км.

Типичные зависимости относительной среднеквадратической погрешности восстановления профиля $\alpha(h)$ от ошибок исходных данных изображены на рис. 1. Кривая 1 на рис. 1 соответствует результатам решения обратной задачи с использованием интерполяционных сплайнов. Коэффициент усиления ошибки оказывается в этом случае достаточно высоким и составляет величину 2,5÷3. Значительный выигрыш в точности достигается при замене интерполяционного сплайна сглаживающим (рис. 1, кривая 2). Ошибка восстановления при такой замене уменьшается в 4–5 раз. Для сравнения обратная задача решалась с помощью итерационного алгоритма, который применяется для обработки данных в экспериментах [3]. Точность восстановления профиля коэффициента ослабления при этом была на том же уровне, что и при использовании интерполяционных сплайнов.

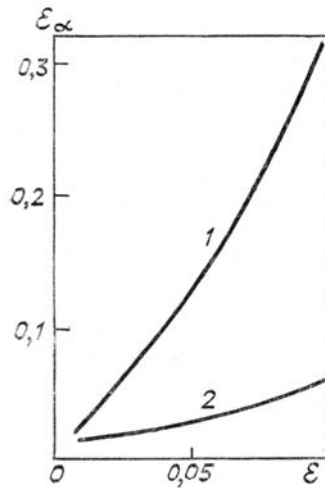


Рис. 1. Зависимость относительной среднеквадратичной погрешности восстановления коэффициента ослабления $\alpha(h)$ от ошибок в исходных данных при решении задачи «затменного» зондирования с использованием интерполяционных (1) и сглаживающих (2) сплайнов

Применение сглаживающих сплайнов с целью снижения влияния шумовой составляющей в исходных данных может привести к ухудшению разрешающей способности алгоритма и, как следствие, к невозможности восстановления «тонкой» структуры решения. На практике этот вопрос связан, в частности, с возможностью локализации аэрозольных слоев повышенной концентрации достаточно малой толщины. Были проведены специальные численные эксперименты для оценки разрешающей способности рассмотренного алгоритма в задачах «затменного» зондирования. При этом в качестве модельного задавался профиль вида

$$\alpha(h) = \alpha_0(h) [1 + Ag(h)], \quad (9)$$

где $\alpha_0(h)$ — определяет экспоненциальное убывание коэффициента ослабления с высотой по закону $\alpha_0(h) = c \exp(-kh)$ с параметрами $c = 0,1$, $k = 0,31$, а функция

$$g(h) = \begin{cases} \frac{4(h-h_1)(h_2-h)}{(h_2-h_1)^2}, & h_1 \leq h \leq h_2, \\ 0, & h < h_1, h > h_2 \end{cases} \quad (10)$$

описывает параболическую модель слоя с повышенной замутненностью в интервале высот от h_1 до h_2 и единичной амплитудой; A — весовой коэффициент. Значение $A = 1$ соответствует 100%-ному превышению модального значения $\alpha(h)$ в слое над фоновым уровнем $\alpha_0(h)$. При численном моделировании варьировалась толщина слоя $D = h_2 - h_1$ и его амплитуда A . На рис. 2, а приведен пример модельного профиля $\alpha(h)$, рассчитанного по формулам (9), (10), при $A = 2$ и $D = 2$ км (кривая 1). Профили 2 и 3 на рис. 2, а восстановлены при обращении по формуле (7) с использованием интерполяционного (2) и сглаживающего (3) сплайнов при 5%-ной ошибке в исходных данных. Из рис. 2, а видно, что рассматриваемый слой может быть локализован с использованием обоих методов. Однако в решении, восстановленном при сплайн-интерполяции исходных данных, напрямую проявляются случайные осцилляции, обусловленные ошибками исходных данных, что приводит к возникновению в решении ложных стратификации. Напротив, профиль 3 лишен отмеченных недостатков и дает более достоверное представление об искомом решении. По этой причине в дальнейшем ограничимся анализом результатов, полученных только с использованием сглаживающих сплайнов. При уменьшении толщины модельного слоя происходит возрастание ошибок в оценке как амплитуды слоя, так и его пространственной протяженности. Этот факт иллюстрирует результаты, представленные в таблице и на рис. 2, б.

D, км	A		
	0,5	1	2
1	14	25	39
2	8,3	8,2	8,4

В таблице представлены среднеквадратические погрешности восстановления (в процентах) $\alpha(h)$ в слое повышенной замутненности протяженностью 1 и 2 км при различных амплитудах A . Как видно

из таблицы, при переходе к однокилометровому модельному слою наибольшие искажения наблюдаются для больших значений A . Случай максимальных искажений при $D = 1$ км и $A = 2$ ($\varepsilon_\alpha = 39\%$) представлен на рис. 2, б, где кривые 1 и 2 описывают модельный и восстановленный профили $\alpha(h)$. Сопоставляя данные, представленные на рис. 2, а, б, можно заметить, что при уменьшении толщины модельного слоя с 2-х до 1 км эффективная ширина восстановленного слоя осталась без изменений при одновременном уменьшении модального значения $\alpha(h)$ в слое. Это свидетельствует о том, что метод не позволяет выявить «тонкую» структуру слоев, масштаб которых менее 1 км. Поэтому пространственное разрешение рассмотренного алгоритма составляет 1÷2 км, что для задачи «затненного» зондирования можно считать вполне удовлетворительным.

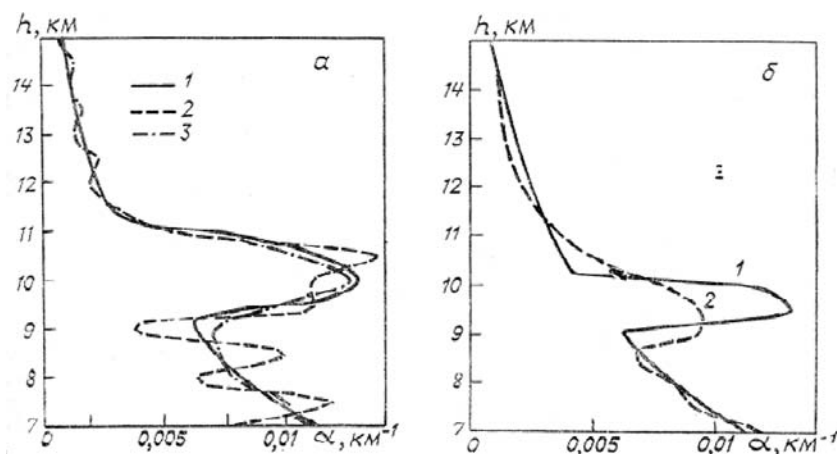


Рис. 2. Численный эксперимент по восстановлению профиля $\alpha(h)$ при наличии слоя повышенной замутненности толщиной D при $\varepsilon = 5\%$ (1 – модель; $A = 2$): а – с использованием интерполяционного (2) и сглаживающего (3) сплайнов; $D = 2$ км; б – с использованием сглаживающего сплайна (2); $D = 1$ км

Представляет интерес сопоставить результаты решения обратной задачи, полученные с помощью описанного алгоритма, с результатами обращения, полученными другими, ранее использованными методами. На рис. 3 дан пример такого сравнения. Кривая 2 получена на основе итерационного алгоритма [3], а 3 – при обращении по формуле (7) со сглаживающим сплайном. Модельный профиль 1 на рис. 3 включает слой такой же толщины ($D = 2$ км), что и на рис. 2, а, но с амплитудой, вдвое меньшей ($A = 1$). Как видно из рис. 3, характер решения, полученного с использованием алгоритма [3], качественно соответствует результатам, которые дает применение интерполяционных сплайнов (ср. с рис. 2, а, кривая 2). Интересно также отметить, что решение 2 на рис. 3 для модельного профиля при $D = 2$ км качественно повторяет решение для модельной задачи со слоем шириной 1 км (см. рис. 2, б). Это означает, что вследствие ограниченной разрешающей способности используемой вычислительной процедуры не удается различить неоднородности вертикального профиля $\alpha(h)$ с размерами менее 1 км.

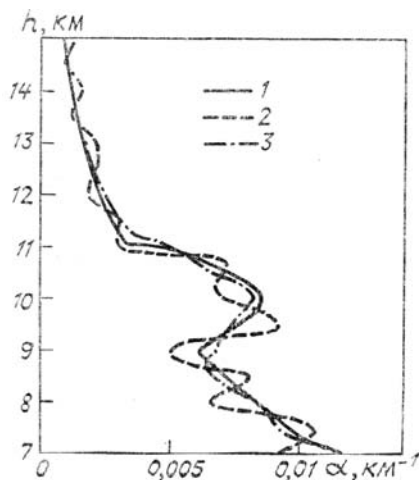


Рис. 3. Сравнение результатов обращения по итерационному алгоритму [3] (2) и рассматриваемому в статье (3); 1 – модель ($D = 2$ км; $A = 1$)

Последний вопрос, который предлагается рассмотреть в настоящей работе, связан с исследованием возможностей идентификации двух близко расположенных тонких слоев. При численном моделировании двухслойная стратификация высотного профиля $\alpha(h)$ задавалась аналогично (9), (10). Толщина нижнего слоя $D_1 = 2$ км, а верхнего — $D_2 = 1$ км. Весовые коэффициенты были выбраны соответственно $A_1 = 1$ и $A_2 = 2$. В численных экспериментах варьировалось расстояние ρ между слоями от 4 до 0 км. Расчеты показывают, что с помощью рассмотренного алгоритма можно выявлять двухслойные структуры, если расстояние между слоями превышает по крайней мере 1 км. Причем в этих условиях присутствие одного слоя слабо сказывается на качестве восстановления другого слоя. Пример решения модельной обратной задачи для $\rho = 1$ км представлен на рис. 4. Сплошной кривой (1) здесь изображен исходный профиль $\alpha(h)$, а пунктиром (2) — результат восстановления при $\epsilon = 5\%$. На рис. 4 наблюдается «замывание» провала между отдельными слоями, составляющее около 26%, обусловленное сглаживающим действием при применении сплайнов.

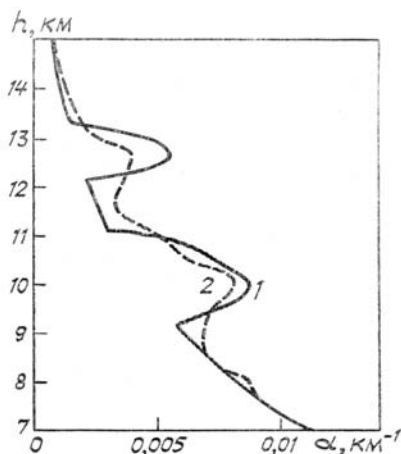


Рис. 4. Модельный эксперимент по идентификации двухслойной структуры вертикального профиля $\alpha(h)$: 1 — модель ($D_1 = 2$ км; $D_2 = 1$ км; $A_1 = 1$, $A_2 = 2$); 2 — результат обращения при $\epsilon = 5\%$

Таким образом, в работе исследованы точностные характеристики алгоритмов интерпретации данных затененного зондирования атмосферы, основанных на обращении уравнения Абеля без дифференцирования правой части с использованием интерполяционных и сглаживающих сплайнов. Установлено, что точность решения обратной задачи с использованием интерполяционных сплайнов не хуже чем в итерационном алгоритме [3], а применение сглаживающих сплайнов позволяет повысить точность восстановления вертикальных профилей коэффициента ослабления в 4÷5 раз. Применение сглаживающих сплайнов при интерпретации затененных экспериментов позволяет выявить положение и амплитуду аэрозольных слоев повышенной замутненности с пространственным разрешением не хуже чем 1÷2 км.

1. Кондратьев К.Я., Григорьев А.Л., Покровский О.М., Шалина Е.В. Космическое дистанционное зондирование атмосферного аэрозоля. Л.: Гидрометеиздат. 1983. 216 с.
2. Тимофеев Ю.М., Розанов В.В., Поберовский А.В., Поляков А.В. // Метеорология и гидрология. 1986. № 8. С. 66.
3. Chu W.P., McCormick M.P. // Appl. Opt. 1979. V. 18. P. 1404.
4. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука. 1982. 238 с.
5. Hansen E.W., Law P.-L. // J. Opt. Soc. Amer. 1985. A2. № 4. P. 510.
6. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седелников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука. 1984. 240 с.
7. Креков Г.М., Рахимов Р.Ф. Оптико-локационная модель континентального аэрозоля. Новосибирск: Наука. 1982. 199 с.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР, Томск

Поступила в редакцию
24 июня 1988 г.

V.V. Veretennikov, Yu.Yu. Trapeznikov. **Vertical Resolution of Solar Occultation Technique Using Spline Functions for Data Interpretation.**

Space resolution of the solar occultation technique was studied numerically aimed at the retrieval of the fine structure of the vertical extinction profiles for optically active atmospheric constituents. The accuracy of the data interpretation algorithm based on the inversion of the Abel equation using the interpolation and smoothing spline approximations was estimated. The results obtained are discussed.