

П.А. Бакут, Д.В. Макаров, А.Д. Ряхин, К.Н. Свиридов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АСТРОНОМИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЕГО ДВУМ ИСКАЖЕННЫМ АТМОСФЕРОЙ РЕАЛИЗАЦИЯМ

Рассматривается проблема восстановления астрономического изображения по двум его реализациям, искаженным турбулентной атмосферой. В случае большого отношения сигнал-шум разработан оптимальный алгоритм обработки изображений. Приведены результаты машинного моделирования.

Введение

Турбулентная атмосфера Земли, вызывая случайные искажения волнового фронта принимаемого светового излучения, приводит к тому, что разрешение при классических методах формирования изображения наблюдаемого астрономического объекта не превышает в среднем 1–3 угл. с.

До недавнего времени были известны два основных подхода к решению проблемы видения через турбулентную атмосферу. Первый подход основан на преддетекторной адаптивной компенсации фазовых искажений за время их «замороженности», а второй — на последетекторной обработке серии искаженных атмосферой изображений. К недостаткам первого подхода относятся техническая сложность и высокая стоимость создания быстродействующей многоканальной адаптивной системы, а второго — необходимость регистрации и обработки большого (~100) числа изображений.

Недавно был предложен новый подход к проблеме восстановления дифракционно-ограниченного изображения астрономического объекта [1, 2], который объединяет основные идеи известных методов и свободен от их недостатков. Он заключается в управляемом формировании двух изображений, искажения волновых фронтов в которых отличаются заданным образом, и в их совместной последетекторной обработке.

Одна из возможных его реализаций сводится к разделению по интенсивности принимаемого потока излучения на два одинаковых субпотока, к внесению в один из них дополнительных (по отношению к случайным атмосферным) детерминированных (постоянных во времени, известных наблюдателю) амплитудно-фазовых искажений волнового фронта и к одновременной регистрации изображения объекта по каждому субпотоку [2]. Из-за существенно нелинейной связи искажений изображения с искажениями волнового фронта восстановление распределения этих изображений можно рассматривать как решение системы независимых нелинейных уравнений относительно неизвестных распределений объекта и распределений атмосферных искажений. Как показали экспериментальные исследования [2], система имеет единственное решение.

В настоящей статье разработан оптимальный алгоритм обработки зарегистрированных изображений, показана целесообразность использования при управляемом формировании искаженных изображений телескопов с малоизбыточными апертурами, приведены результаты машинного моделирования.

Оптимальный алгоритм обработки

Для распределения интенсивности $J(\mathbf{r})$ зарегистрированного изображения справедливо выражение вида

$$J(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}) + N(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $N(\mathbf{r})$ — шум регистрации; $I(\mathbf{r}) = \int O(\mathbf{r}_1) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$ — распределение формируемого изображения; $O(\mathbf{r})$ — истинное распределение интенсивности некогерентного объекта;

$$H(\mathbf{r}) = \left| \int W(\mathbf{v}) \exp \left\{ i \left(\chi(\mathbf{v}) - \frac{2\pi}{\lambda F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \right) \right\} d\mathbf{v} \right|^2$$

— импульсный отклик системы атмосфера—телескоп; $W(\mathbf{v})$ —апертурная функция, равная единице в пределах зрачка телескопа и нулю вне его; $\chi(\mathbf{v})$ —функция искажений волнового фронта; λ — длина волны; F — фокусное расстояние.

Преобразуя (1) по Фурье, получаем его описание в области пространственных частот \mathbf{f} вида

$$\tilde{J}(\mathbf{f}) = \tilde{I}(\mathbf{f}) + \tilde{N}(\mathbf{f}),$$

где $\tilde{I}(\mathbf{f}) = \tilde{O}(\mathbf{f}) \tilde{H}(\mathbf{f})$, и символами с тильдой обозначены соответствующие пространственные спектры, причем

$$\tilde{H}(f) = \int W(\mathbf{v}) W(\mathbf{v} - \lambda F f) \exp \{i(\chi(\mathbf{v}) - \chi(\mathbf{v} - \lambda F f))\} d\mathbf{v} \quad (2)$$

получила специальное название оптической передаточной функции (ОПФ).

С математической точки зрения задачу восстановления изображения $O(\mathbf{r})$ можно сформулировать следующим образом. Заданы два распределения $\tilde{J}_1(f)$ и $\tilde{J}_2(f)$ при фиксированном $\tilde{O}(f)$, случайных и независимых $\tilde{N}_1(f)$ и $\tilde{N}_2(f)$, случайных ОПФ $\tilde{H}_1(f)$ и $\tilde{H}_2(f)$, функции искажений волновых фронтов в которых отличаются на детерминированную функцию $\chi_d(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \chi_1(\mathbf{v}) &= \chi_A(\mathbf{v}); \\ \chi_2(\mathbf{v}) &= \chi_A(\mathbf{v}) + \chi_d(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\chi_A(\mathbf{v})$ — функция атмосферных искажений. Необходимо найти наиболее правдоподобную оценку $\hat{\tilde{O}}(f)$, максимизирующую функционал плотности вероятности

$$\begin{aligned} P[\tilde{J}_1(f), \tilde{J}_2(f)/\tilde{O}(f)] &= \int P[\tilde{J}_1(f), \tilde{J}_2(f)/\tilde{O}(f), \\ &\chi_A(\mathbf{v})] P[\chi_A(\mathbf{v})] d\chi_A(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4)$$

В оптической астрономии диаметр апертуры телескопа D , как правило, существенно превышает размер области корреляции атмосферных искажений поля светового излучения r_0 [3]. В результате при статистическом анализе флуктуации ОПФ $\tilde{H}(f)$ можно ограничиться только фазовыми искажениями поля и считать, что апертура телескопа состоит из $N = (D/r_0) \gg 1$ независимых ячеек, в пределах которых атмосферная фаза постоянна по пространству, но случайно распределена во времени по равномерному закону в интервале $(-\pi, \pi)$, т.е.

$$P[\chi_A(\mathbf{v})] d\chi_A(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \prod_{n=1}^N d\chi_A^n.$$

Что касается статистического распределения шума, то, следуя обычно используемым предположениям [4], его можно считать белым со спектральной плотностью N_{O_0} . В этом случае согласно [5] условный функционал плотности вероятности $P[\tilde{J}_1(f), \tilde{J}_2(f)/\tilde{O}(f), \chi_A(\mathbf{v})]$ определяется как

$$C \exp \left\{ -\frac{1}{2N_{O_0}} \int (|\tilde{J}_1(f) - \tilde{I}_1(f)|^2 + |\tilde{J}_2(f) - \tilde{I}_2(f)|^2) df \right\}, \quad (5)$$

где C — несущественная для данного анализа константа.

В общем случае нахождение максимума функционала (4) представляет сложную задачу. Однако в практически важном случае большого отношения сигнал-шум ($N_{O_0} \rightarrow 0$) положения максимумов (4) и (5) совпадают.

В результате получаем, что оптимальная обработка сводится к выбору оценок $\hat{\tilde{O}}(f)$ и $\hat{\chi}_A(\mathbf{v})$, минимизирующих функцию

$$S = \sum_{i=1}^2 \int |\tilde{J}_i(f) - \hat{\tilde{O}}(f) \hat{H}_i(f)|^2 df, \quad (6)$$

где $\hat{H}_1(f)$ и $\hat{H}_2(f)$ — ОПФ, соответствующие искажениям $\hat{\chi}_A(\mathbf{v})$ и $\hat{\chi}_A(\mathbf{v}) + \hat{\chi}_d(\mathbf{v})$. К сожалению, в общем случае аналитическое решение уравнения $S = \min$ получить не удается. Исключая из (6) оценку $\hat{\tilde{O}}(f)$, получаем что минимум S достигается при

$$\hat{O}(f) = \frac{|\tilde{J}_1(f) \tilde{H}_1^*(f) + \tilde{J}_2(f) \tilde{H}_2^*(f)|^2}{|\hat{H}_1(f)|^2 + |\hat{H}_2(f)|^2} \quad (7)$$

и равен

$$S = \int \frac{|\tilde{J}_1(f) \hat{H}_2(f) - \tilde{J}_2(f) \hat{H}_1(f)|^2}{|\hat{H}_1(f)|^2 + |\hat{H}_2(f)|^2} df. \quad (8)$$

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм восстановления по зарегистрированным изображениям $J_1(\mathbf{r})$ и $J_2(\mathbf{r})$ оптимальной оценки $\hat{O}(\mathbf{r})$:

1. Выбирают начальную оценку $\{\hat{\chi}_A^n\}$ (например, $\hat{\chi}_A^n = 0$).
2. Формируют по ней в соответствии с (3) оценки $\{\chi_1^n\}$ и $\{\chi_2^n\}$.
3. Рассчитывают по формуле (2) распределения ОПФ $\hat{H}_1(f)$ и $\hat{H}_2(f)$.
4. Определяют по формуле (8) значение функции $S = S(\hat{\chi}_A^n)$.
5. Повторяя шаги 1–4, изменяют в соответствии с одним из методов хорошо развитой математической теории оптимизации [6] оценку $\{\hat{\chi}_A^h\}$ в направлении минимума S .
6. После нахождения точки минимума по формуле (7) рассчитывают оптимальную оценку спектра $\hat{O}(f)$ и, преобразуя ее по Фурье, получают $\tilde{O}(\mathbf{r})$.

Формирование малоизбыточных изображений

Как показало проведенное авторами математическое моделирование процессов формирования и восстановления изображений данным методом, в общем случае последетекторная минимизация функции S , гарантируя получение однозначной оценки $\hat{O}(\mathbf{r})$ (при отсутствии шумов совпадающей с истинной $O(\mathbf{r})$), является сложной операцией, требующей больших временных и вычислительных затрат.

Это связано с большим числом N подстраиваемых переменных $\{\hat{\chi}_A^n\}$ и сложной зависимостью ОПФ $\tilde{H}(f)$ от $\chi_A(\mathbf{v})$. В связи с этим многообещающим представляется использование при управляемом формировании искаженных изображений малоизбыточных апертурных масок.

Анализируя выражение (2) для ОПФ обычного телескопа, несложно убедиться, что его апертура является существенно избыточной. Действительно, на большинстве пространственных частот f ОПФ представляет собой сумму многих некоррелированных вкладов, обусловленных взаимодействием излучения от различных пар атмосферных ячеек, разнесенных на векторы $\lambda F f$. Это позволяет значительно уменьшить число используемых элементарных ячеек, оставив на апертуре их минимальный набор, обеспечивающий получение полной информации во всей дифракционной области пространственных частот ($|f| \leq D/\lambda F$).

Общих правил для построения минимально избыточных апертурных масок не существует, каждый раз нужно исходить из конкретного вида апертуры. Тем не менее в [7] изложены правила построения прямоугольных малоизбыточных масок, приближающихся к минимально избыточным. Авторами разработан способ построения правильных шестиугольных малоизбыточных масок, более подходящих к круглым и кольцевым апертурам обычных телескопов. Кроме того, этот способ допускает создание вложенной системы масок, практически полностью использующей сплошную шестиугольную апертуру (рис. 1).

Применение малоизбыточных масок при формировании искаженных турбулентной атмосферой изображений астрономического объекта приводит к сокращению количества атмосферных фазовых ячеек апертуры телескопа примерно до $3\sqrt{N}$. Это во многих случаях при отсутствии шумов позволяет находить аналитическое решение для оценок $\{\hat{\chi}_A^n\}$ и $\hat{O}(\mathbf{r})$, а также существенно упрощает и ускоряет решение задачи прямой минимизации функции S .

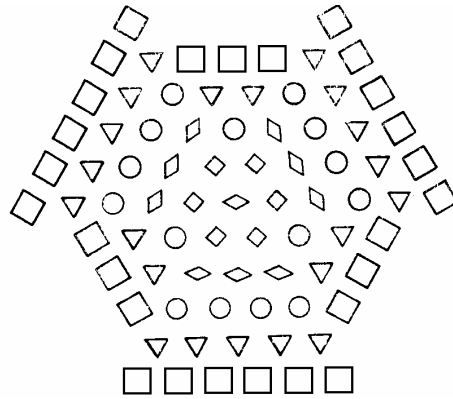


Рис. 1. Вложенная система малоизбыточных шестиугольных апертурных масок. Элементы разных масок обозначены различными геометрическими фигурами

Результаты моделирования разработанного алгоритма

Математическое моделирование проводилось для квадратной апертуры со стороной D при $D/r_0 = 6$. Таким образом, количество элементарных ячеек (переменных, по которым осуществлялась минимизация функции S) для полной апертуры было равно 36. Дополнительные детерминированные искажения вносились во второе изображение путем осуществления известного фазового сдвига на различных ячейках апертуры, либо блокированием некоторых ячеек.

Для минимизации функции S был использован градиентный метод с адаптивным подбором шага на каждой итерации.

Моделирование осуществлялось для различных объектов при различных реализациях атмосферных искажений, которые удовлетворяли модели турбулентной атмосферы Колмогорова – Обухова [8].

В качестве критерия точности полученной оценки распределения интенсивности объекта $\hat{O}(\mathbf{r})$ была принята относительная среднеквадратическая ошибка, которая выражается следующим образом:

$$\frac{\int |\hat{O}(\mathbf{r}) - O(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}{\int |O(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}$$

Результаты моделирования для полной апертуры показали, что для восстановления распределения интенсивности объекта с относительной среднеквадратической ошибкой около 10% необходимо более 60 итераций и более 6 часов машинного времени на ЭВМ СМ–1420.

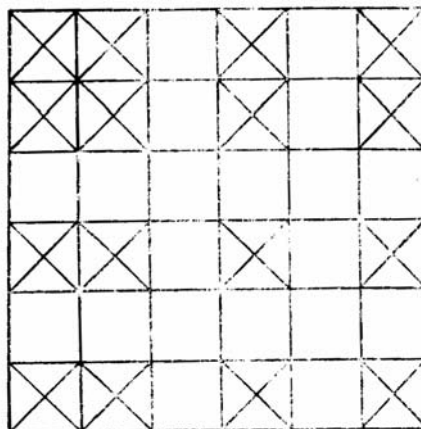


Рис. 2. Квадратная апертурная маска с элементами малоизбыточного набора

Применение апертурной маски (рис. 2, крестами выделены ячейки малоизбыточного набора), построенной по правилам, изложенным в [7], сокращает количество переменных, по которым осуществляется минимизация, до 16. Это приводит к значительному упрощению поиска минимума функции S . Для достижения 10%-ного уровня ошибки в этом случае достаточно, как правило, 10 итераций и 30 мин ма-

шинного времени, а 5%-ного — 20 итераций, 1 ч машинного времени.

Следует заметить, что сходимость алгоритма практически не зависит от вида детерминированных искажений. На практике проще всего осуществлять блокировку некоторых ячеек, что делает этот вид искажений наиболее привлекательным.

Машинное моделирование позволило также исследовать влияние шумов на точность получаемой оценки $\tilde{O}(\mathbf{r})$. Исследование проводилось для трех видов встречающихся на практике шумов: а) аддитивного шума, дисперсия которого σ_N^2 не зависит от интенсивности изображения $I(\mathbf{r})$; б) шума, дисперсия которого $\sigma_N^2(\mathbf{r})$ пропорциональна квадрату интенсивности $I^2(\mathbf{r})$; в) „квантового” шума, у которого $\sigma_N^2(\mathbf{r}) \sim I(\mathbf{r})$. Уровень шумов определялся отношением сигнал — шум в зарегистрированном изображении

$$q = \sqrt{\frac{\int dr |I(\mathbf{r})|^2}{\int dr \sigma_N^2(\mathbf{r})}}$$

Моделирование проводилось для различных значений q из диапазона 5–25. Для всех трех видов шумов результаты моделирования оказались одинаковыми. Относительная среднеквадратическая ошибка получаемой оценки распределения интенсивности объекта примерно равна отношению сигнал—шум в зарегистрированных изображениях. На рис. 3 приведены результаты моделирования.

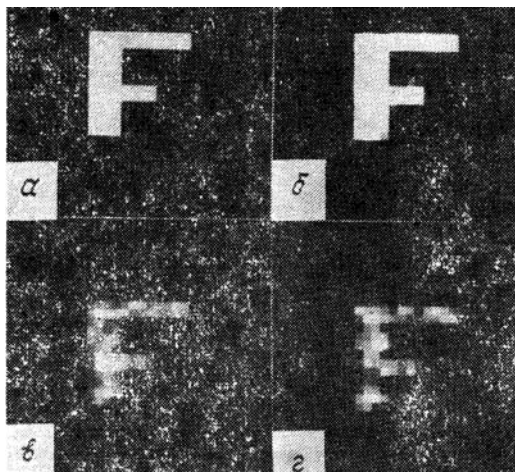


Рис. 3. Результаты моделирования: а — исходное изображение; б — изображение, восстановленное после 20 итераций в отсутствие шума; в — восстановленное изображение при отношении сигнал-шум $q = 15$ (20 итераций); г — восстановленное изображение при отношении сигнал-шум $q = 10$ (20 итераций)

В заключение отметим, что при разбиении шестиугольной апертуры на набор неперекрывающихся малоизбыточных субапертур (см. рис. 1), независимое формирование по каждой такой субапертуре своей пары искаженных изображений и восстановление своей оценки изображения с последующим усреднением полученных оценок позволяет значительно повысить результирующую точность метода.

1. Huiser A. M. J. //Optics Comm. 1982. V. 42. №4. P. 226.
2. Бакут П.А., Грецкий А.М., Макаров Д.В. и др. //В сб.: Тезисы докл. 2 Всес. конференции «Формирование оптического изображения и методы его обработки». Кишинев. 1985. Т. 1. С. 169.
3. Бакут П.А., Ряхин А.Д., Свиридов К.Н., Устинов Н.Д. //Известия вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. №3. С. 274.
4. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир. 1982. Т. 2.
5. Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов Б.М. и др. Вопросы статистической теории радиолокации. М.: Сов. радио. 1963. Т. 1.
6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир. 1985.
7. Korilovich L. E. //Optica Acta. 1984. V. 31. №12. P. 1409.
8. McGlamery B. L. //SPIE. 1976. V. 74. P. 225.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 23 мая 1988 г.

P.A. Bakut, D.V. Makarov, A.D. Ryakhin, K.N. Sviridov. **Astronomic Image Restoration from Two Realizations Degraded by Atmosphere.**

The problem of astronomic image restoration from two realizations degraded by the turbulent atmosphere is considered. For high signal-to-noise ratios, an optimal algorithm for image processing is synthesized. Computer simulation results are presented.