

В.В. Веретенников

# Лидарное уравнение в приближении второго порядка для сред с сильно вытянутой индикатрисой рассеяния

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 17.09.2001 г.

В рамках теории лазерного зондирования с учетом многократного рассеяния в малоугловом приближении выделена составляющая лидарного сигнала, обусловленная рассеянием первых двух кратностей. Для сред с сильно вытянутой индикатрисой рассеяния получены простые формулы, определяющие сигнал двукратного рассеяния с учетом геометрических параметров лидара. Исследована роль дифракционной и геометрооптической составляющих индикатрисы рассеяния в двукратно рассеянном сигнале. Получены оценки точности рассмотренного приближения в зависимости от угла поля зрения приемника при различной оптической толщине рассеивающего слоя.

## Введение

Первым шагом на пути обобщения теории лазерного зондирования атмосферы для условий повышенной замутненности было приближение двукратного рассеяния [1–3]. Несмотря на прогресс, достигнутый к настоящему времени в решении задач лазерного зондирования оптически плотных сред с учетом многократного рассеяния, объектом внимания специалистов по-прежнему остается изучение эффектов, в том числе поляризационных, рассеяния невысоких кратностей при распространении лидарных сигналов [4, 5]. Благодаря простоте аналитического описания, получаемое при этом лидарное уравнение находит применение для определения оптико-микрофизических параметров сред [6–8] в условиях относительно невысокой замутненности атмосферы. Для грубодисперсных сред с сильно вытянутой индикатрисой рассеяния успешно развивается подход, позволяющий учитывать многократное рассеяние в аналитическом виде при незначительном отклонении излучения от первоначального направления распространения зондирующего пучка (малоугловое приближение [9–12]).

В зависимости от дисперсного состава и плотности среды в [11, 13] получены численные соотношения между компонентами малоуглового многократно рассеянного и однократно рассеянного излучения в лидарном сигнале с переменным углом поля зрения приема. Представленные в [11] данные позволяют количественно оценить условия проведения лидарного эксперимента, при которых уровень фона многократного рассеяния будет незначительным, и, следовательно, можно ожидать, что преобладающим в нем будет рассеяние невысоких кратностей. Для таких условий формализм малоуглового приближения теории переноса является удобной базой для дальнейшего упрощения лидарного уравнения, позволяя непосредственно проводить разделение лидарного сигнала по

кратностям рассеяния. Для полноты и завершенности развитой в [11, 13] теории целесообразно специально рассмотреть в малоугловом приближении случай учета малых кратностей рассеяния. Полученные результаты в этом направлении представляют предмет обсуждения в настоящей статье.

## 1. Геометрия эксперимента и исходное лидарное уравнение

Предположим, что среда, обладающая высокой анизотропией рассеяния, занимает полупространство  $z > 0$ , источник и приемник излучения лидара расположены на плоскости  $z = 0$  на расстоянии  $d$ , их оптические оси параллельны и зондирование проводится в положительном направлении оси  $Oz$ . Предположим также, что источник излучения является точечным и мононаправленным, а функция чувствительности приемника имеет ступенчатый вид и круговую симметрию по угловым и пространственным координатам. Для рассматриваемой геометрии эксперимента мощность лидарного сигнала при посылке в атмосферу  $\delta(t)$ -импульса с энергией  $W$  определяется следующим соотношением:

$$P(z, d, \gamma_r, R_r) = \pi c W \frac{R_r \gamma_r}{z} \beta_\pi(z) \times \int_0^\infty Q(v, d, z\gamma_r, R_r) \Phi(v) dv, \quad (1)$$

в котором ядро интегрального преобразования

$$Q(v, d, z\gamma_r, R_r) = v^{-1} J_0(vd) J_1(vz\gamma_r) J_1(vR_r) \quad (2)$$

задано в виде произведения трех функций Бесселя первого рода нулевого  $J_0(\cdot)$  и первого  $J_1(\cdot)$  порядка;  $\Phi(v) = F^2(v)$ :

$$F(v) = \exp[-\tau(z) + g(v)], \quad \tau(z) = \int_0^z \varepsilon(s) ds; \quad (3)$$

$$g(v) = \int_0^z \sigma(z-s) \tilde{x}(vs) ds, \quad (4)$$

$F(v)$  – оптическая передаточная функция среды (ОПФ);  $\varepsilon(z)$ ,  $\sigma(z)$ ,  $\beta_\pi(z)$  – коэффициенты ослабления, рассеяния и обратного рассеяния, которые зависят только от одной пространственной координаты  $z$ ;  $\tilde{x}(p)$  – преобразование Ганкеля малоугловой индикатрисы рассеяния. Параметрами лидара являются радиус входного зрачка  $R_r$  и угол поля зрения  $\gamma_r$  приемной системы. Вывод уравнения (1) и допущения, при которых оно справедливо, подробно обсуждаются в [9, 13]. Здесь лишь отметим, что уравнение (1) получено при учете многократного рассеяния на малые углы и однократного рассеяния на большие углы, в том числе в направлении назад.

## 2. Приближения малых кратностей рассеяния

Выделим в функции  $\Phi(v)$  множитель  $\exp[-2\tau(z)]$  и представим оставшуюся часть в виде ряда по степеням  $2g(v)$ :

$$\Phi(v) = e^{-2\tau(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2g(v)]^n}{n!}. \quad (5)$$

При этом нулевой член ряда (5)  $\Phi_0 = e^{-2\tau(z)}$  будет определять лидарный сигнал в приближении однократного рассеяния, а рассеянию второй кратности соответствует компонента

$$\Phi_1(v) = 2e^{-2\tau(z)} g(v). \quad (6)$$

В общем случае рассеянию кратности  $n + 1$  соответствует компонента

$$\Phi_n(v) = e^{-2\tau(z)} \frac{[2g(v)]^n}{n!}. \quad (7)$$

Суммарный вклад в лидарном сигнале рассеяния кратности выше первой определяется разностью  $\Phi_{sc}(v) = \Phi(v) - \Phi_0$ . Далее рассмотрим уравнение, полученное при подстановке в (1) первых двух членов разложения (5) функции  $\Phi(v)$ . Это уравнение описывает ситуацию, когда на участке между лидаром и тем объемом, в котором сигнал испытывает однократное рассеяние в направлении назад, произойдет не более одного рассеяния на малые углы.

При подстановке  $\Phi_0 = e^{-2\tau(z)}$  вместо  $\Phi(v)$  в (1) получаем

$$P_1(z, d, \gamma_r, R_r) = \pi c W \frac{R_r \gamma_r}{z} \beta_\pi(z) e^{-2\tau(z)} \times \int_0^{\infty} Q(v, d, z\gamma_r, R_r) dv. \quad (8)$$

Это обычное лидарное уравнение в приближении однократного рассеяния с учетом геометрии эксперимента. Интеграл от произведения бесселевых функций

$$B(d, z\gamma_r, R_r) = \int_0^{\infty} Q(v, d, z\gamma_r, R_r) dv \quad (9)$$

определяет геометрический фактор лидара и выражается через элементарные функции. Как показано в [14], интеграл  $B(d, z\gamma_r, R_r)$  (9) пропорционален двумерной свертке кругов с радиусами  $R_r$  и  $z\gamma_r$ :

$$B(r, z\gamma_r, R_r) = \frac{1}{2\pi R_r z\gamma_r} U_{z\gamma_r}(r) ** U_{R_r}(r), \quad (10)$$

где  $U_a(r)$  – единичная ступенчатая функция на плоскости  $xOy$ ;

$$U_a(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (11)$$

Поскольку свертка кругов равна площади их пересечения, то из геометрических соображений можно показать, что

$$U_a(r) ** U_b(r) = \begin{cases} 0, & r > a + b, \\ \pi a^2, & 0 \leq r < |a - b|, \quad a < b, \\ \pi b^2, & 0 \leq r < |a - b|, \quad a > b, \\ a^2\beta + b^2\alpha - ab \sin\gamma, & |a - b| < r < a + b, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – углы в треугольнике, противолежащие сторонам  $a$ ,  $b$  и  $r$  соответственно. Из формул (10), (12) следует, что при

$$z > (R_r + d)/\gamma_r \quad (13)$$

мощность сигнала однократного рассеяния определяется известным выражением

$$P_1(z) = W \frac{c}{2} z^{-2} S_r \beta_\pi(z) e^{-2\tau(z)}, \quad (14)$$

где  $S_r = \pi R_r^2$  – площадь приемной апертуры. Условие (13) определяет дальнюю зону приема.

Рассеяние второй кратности в малоугловом приближении будет учитываться добавочным членом, который получим из общей формулы (1) при замене  $\Phi(v)$  на  $\Phi_1(v)$  (6):

$$P_2(z, d, \gamma_r, R_r) = 2\pi c W \frac{R_r \gamma_r}{z} \beta_\pi(z) e^{-2\tau(z)} \times G(d, \gamma_r, R_r), \quad (15)$$

где

$$G(d, \gamma_r, R_r) = \int_0^{\infty} Q(v, d, z\gamma_r, R_r) g(v) dv. \quad (16)$$

Подставим в (16) функцию  $g(v)$ , выразив предварительно трансформанту  $\tilde{x}(\cdot)$  через индикатрису рассеяния  $x(\gamma)$ . Это приводит к следующему интегральному представлению функции  $G(d, \gamma_r, R_r)$ :

$$G(d, \gamma_r, R_r) = 2\pi \int_0^z \sigma(z-s) ds \times \int_0^\infty D(d, s\gamma, R_r, z\gamma_r) x(\gamma) \gamma d\gamma. \quad (17)$$

Остановимся подробнее на обсуждении свойств весовой функции  $D(\cdot)$  в подынтегральном выражении формулы (17). Эта функция определяет несобственный интеграл от произведения четырех функций Бесселя первого рода:

$$D(d, a, b, c) = \int_0^\infty v^{-1} J_0(dv) J_0(av) J_1(bv) J_1(cv) dv. \quad (18)$$

В работе [15] получено представление функции  $D(d, a, b, c)$  (18) в виде, более удобном для практических расчетов. Согласно [15] эквивалентное формуле (18) представление функции  $D(d, a, b, c)$  имеет форму интеграла в конечных пределах

$$D(d, a, b, c) = \int_0^{b+c} A(d, r, b) A(r, a, c) r dr \quad (19)$$

от произведения функций вида

$$A(r, a, c) = \int_0^\infty J_0(rt) J_0(at) J_1(ct) dt. \quad (20)$$

Как видно из сравнения формул (18) и (20), задача вычисления интеграла от произведения четырех функций Бесселя сводится к вычислению интегралов  $A(r, a, c)$  (20) от произведения трех функций Бесселя. Так же как и функции  $B(r, a, b)$  (10), интегралу  $A(r, a, c)$  (20) можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Как показано в [14], величина  $A(r, a, c)$  пропорциональна двумерной свертке функций:

$$A(r, a, c) = \frac{1}{2\pi ac} U_c(r) ** \delta(r-a), \quad (21)$$

где  $\delta(r)$  – дельта-функция Дирака. Применяя технику интегрирования выражений в двумерной области, содержащих  $\delta$ -функцию [16], свертку в (21) можно представить через элементарные функции и записать следующую окончательную формулу для интеграла  $A(r, a, c)$ :

$$cA(r, a, c) = \begin{cases} 0, & r \geq a+c, \\ 0, & r \leq |a-c|, & a > c, \\ 1, & r \leq |a-c|, & c > a, \\ \alpha/\pi, & 0 < |a-c| \leq r \leq a+c, \end{cases} \quad (22)$$

где  $\alpha$  – угол в треугольнике со сторонами  $r$ ,  $a$  и  $c$ , противолежащий стороне  $c$ :

$$\alpha = \arccos \frac{a^2 + r^2 - c^2}{2ar}. \quad (23)$$

Нетрудно заметить, что поведение интеграла  $A(r, a, c)$  (20) определяется зависимостью угла  $\alpha$  (23) от отношений параметров  $a/c$  и  $r/c$ . В работе [15]

приведены результаты расчета зависимостей  $\alpha(\xi, \eta)/\pi$  как функций отношения  $\xi = r/c$  для набора различных значений  $\eta = a/c$ .

Представленные соотношения (19), (22) и (23) дают полное решение задачи расчета весовой функции  $D(d, s\gamma, R_r, z\gamma_r)$  в формуле (17) для учета в лидарном сигнале вклада рассеяния второй кратности. Рассмотрим некоторые характерные случаи, позволяющие оценить роль и значение параметров, определяющих функцию  $D(d, s\gamma, R_r, z\gamma_r)$ .

### 2.1. Схема с совмещенными осями передатчика и приемника

Для такой схемы  $d = 0$  и на основании формул (19), (22) интеграл  $D(d, a, b, c)$  (18) существенно упрощается и приобретает следующий вид:

$$D(d=0, a, b, c) = \frac{1}{b} \int_0^b A(r, a, c) r dr = B(b, a, c), \quad (24)$$

где  $B(b, a, c)$  – функция, ранее встречавшаяся при рассмотрении приближения однократного рассеяния (см. (10) – (12)). Так же как и в случае однократного рассеяния, ограничимся рассмотрением дальней зоны приема (13). Тогда для отношения  $m_2 = P_2/P_1$  двукратно рассеянного сигнала к однократно рассеянному на основании выражений (14), (15), (17) можно получить следующую простую формулу:

$$m_2 = 4\pi \int_0^z \sigma(z-s) ds \times \left[ \int_0^{r_1/s} x(\gamma) \gamma d\gamma + \int_{r_1/s}^{r_2/s} \Omega(s\gamma) x(\gamma) \gamma d\gamma \right], \quad (25)$$

где

$$r_1 = z\gamma_r - R_r, \quad r_2 = z\gamma_r + R_r,$$

$$\Omega(r) = [U_{z\gamma_r}(r) ** U_{R_r}(r)]/S_r, \quad (26)$$

$\Omega(r)$  – нормированная свертка кругов на плоскости, определяемая по формулам (12),  $S_r = \pi R_r^2$ . Функция  $\Omega(r)$  монотонно убывает от единицы до нуля при изменении  $r$  от  $r_1$  до  $r_2$ . Разбиению области интегрирования по  $\gamma$  на две части в квадратных скобках формулы (25) соответствует представление отношения  $m_2$  в виде двух слагаемых:

$$m_2 = m_2' + m_2''. \quad (27)$$

В результате изменения порядка интегрирования в (25) слагаемые формулы (27) можно записать в следующем виде:

$$m_2' = 4\pi \left[ \tau_{sc}(z) \int_0^{\gamma_1} x(\gamma) \gamma d\gamma + \int_{\gamma_1}^\infty \tau_{sc}(r_1/\gamma) x(\gamma) \gamma d\gamma \right], \quad (28)$$

$$m_2'' = 4\pi \left[ \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} x(\gamma) \gamma d\gamma \int_{r_1/\gamma}^z \Omega(\gamma s) \sigma(z-s) ds + \int_{\gamma_2}^{\infty} x(\gamma) \gamma d\gamma \int_{r_1/\gamma}^{r_2/\gamma} \Omega(\gamma s) \sigma(z-s) ds \right], \quad (29)$$

где

$$\tau_{sc}(z) = \int_0^z \sigma(s) ds; \quad \gamma_1 = \gamma_r - R_r/z, \quad \gamma_2 = \gamma_r + R_r/z. \quad (30)$$

Дальнейшие упрощения формулы (25) могут быть получены, если оценить влияние размера приемной апертуры. При  $R_r \rightarrow 0$  область интегрирования во втором интеграле в квадратных скобках формулы (25) сжимается в точку. Поэтому можно ожидать, что при достаточно малом радиусе приемной апертуры  $R_r$  слагаемым  $m_2''$  в (27) можно пренебречь и полагать  $m_2 \approx m_2'$ . Численные оценки, приводимые в разд. 3, показывают обоснованность данного упрощения для типичных в практике лидарного зондирования размеров приемных апертур. В заключение перепишем формулы (28) и (29) для ситуации, когда рассеивающая среда представляет собой однородный слой, удаленный на расстояние  $H$  от лидара, с постоянным коэффициентом рассеяния  $\sigma_0$ :

$$m_2' = 4\pi\sigma_0 (z-H) \left[ \int_0^{\omega_1} x(\gamma) \gamma d\gamma + \omega_1 \int_{\omega_1}^{\infty} x(\gamma) d\gamma \right], \quad (31)$$

$$m_2'' = 4\pi\sigma_0 \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} x(\gamma) d\gamma \int_{r_1}^{(z-H)\gamma} \Omega(r) dr + \int_{\omega_2}^{\infty} x(\gamma) d\gamma \int_{r_1}^{r_2} \Omega(r) dr \right], \quad (32)$$

где  $\omega_1 = r_1/(z-H)$ ,  $\omega_2 = r_2/(z-H)$ , а величины  $r_1$  и  $r_2$  находятся из формул (26).

## 2.2. Бистатистическая схема в приближении малых $R_r$

В предыдущем разделе уже обсуждался случай малых размеров входной апертуры приемной системы при совмещении осей источника и приемника лидара, т.е. при  $d = 0$ . Здесь будет дано обобщение решения для функции  $m_2$  при  $d \neq 0$ . Будем исходить из общей формулы (17). Для бистатистической схемы зондирования при  $d \neq 0$  и малых  $R_r$  функция  $D(d, s\gamma, R_r, z\gamma_r)$ , так же как и в предыдущем разделе, приобретает более простой вид

$$D(d, s\gamma, R_r, z\gamma_r) = \frac{R_r}{2} A(d, s\gamma, z\gamma_r). \quad (33)$$

Это можно доказать, например, путем разложения функции Бесселя  $J_1(bv)$  в формуле (18) в ряд Тейлора и сохранения в нем только первого члена. Тогда с учетом определения функции  $A(d, s\gamma, z\gamma_r)$  (22) нетрудно получить следующее выражение для функции  $m_2$ :

$$m_2 = 4\pi \int_0^z \sigma(z-s) ds \times \left[ \int_0^{\rho_1/s} x(\gamma) \gamma d\gamma + \frac{1}{\pi} \int_{\rho_1/s}^{\rho_2/s} \Psi(s\gamma) x(\gamma) \gamma d\gamma \right], \quad (34)$$

где

$$\rho_1 = z\gamma_r - d, \quad \rho_2 = z\gamma_r + d; \\ \Psi(s\gamma) = \arccos \frac{(s\gamma)^2 + d^2 - (z\gamma_r)^2}{2ds\gamma}. \quad (35)$$

Весовая функция  $\Psi(\rho)/\pi$  в формуле (34) монотонно убывает от единицы до нуля при изменении  $\rho$  в пределах от  $\rho_1$  до  $\rho_2$ . Структура (34) аналогична структуре (25). Поэтому дальнейшие модификации формулы (34) следуют из формул (27) – (29) и (31), (32) для функции  $m_2$  (25) при подстановке в них величин  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и функции  $\Psi(\rho)/\pi$  вместо  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\Omega(r)$  соответственно. В частности, при  $d = 0$

$$m_2 = 4\pi \int_0^z \sigma(z-s) ds \left[ \int_0^{z\gamma_r/s} x(\gamma) \gamma d\gamma \right], \quad (36)$$

что полностью совпадает с результатом, полученным в предыдущем разделе.

## 3. Результаты численного анализа

В данном разделе приведены результаты расчетов функции  $m_2(\gamma_r)$  по формулам, полученным в предыдущем разделе, для оценки точности рассматриваемого приближения в зависимости от оптических свойств рассеивающей среды и геометрии эксперимента. В качестве модели рассеивающей среды рассматривался однородный слой с постоянными оптическими характеристиками, образованный частицами радиуса  $R = 10$  мкм. Длина волны излучения  $\lambda = 0,55$  мкм. Индикатриса рассеяния рассчитывалась в малоугловом приближении с отдельным учетом дифракционной (D) и геометрооптической (GO) компонент [13, 17]. Геометрия эксперимента была следующая: расстояние между лидаром и ближней границей слоя  $H = 1$  км, дальность  $z = 2$  км, расстояние между оптическими осями источника и приемника  $d = 0$ .

### 3.1. Влияние радиуса приемной апертуры

Влияние радиуса приемной апертуры  $R_r$  на поведение функции  $m_2(\gamma_r)$  иллюстрируется рис. 1 и 2. Для представленных зависимостей оптическая толщина была равна единице. На рис. 1 показано пове-

дение функции  $m_{2D}(\gamma_r)$ , рассчитанной в дифракционном приближении. Зависимость 1 на рис. 1 изображает поведение функции  $m_{2D}(\gamma_r)$  при  $R_r = 0$ , а кривые 2 и 3

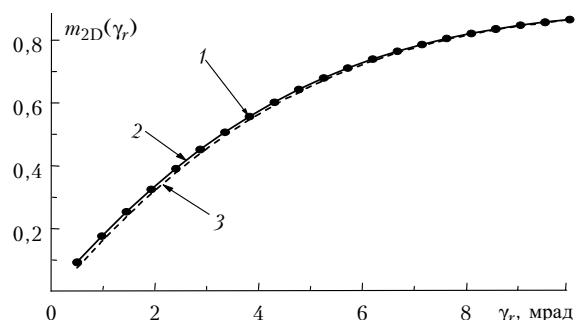


Рис. 1. Зависимости функций  $m_{2D}(\gamma_r)$  (сплошная линия) и  $m'_{2D}(\gamma_r)$  (штриховая линия) от угла поля зрения приемника  $\gamma_r$  при  $R_r = 0,2$  м и  $R_r = 0$  (кружки) для однородного слоя с оптической толщиной  $\tau = 1$

описывают функцию  $m_{2D}(\gamma_r)$  и ее составляющую  $m'_{2D}(\gamma_r)$  (31) для приемной апертуры радиуса  $R_r = 0,2$  м. Заметим, что для рассматриваемых значений  $z$ ,  $d$  и  $R_r$  условие дальней зоны (13) удовлетворяется при  $\gamma_r > 0,2$  мрад. Зависимости 1 и 2 на рис. 1 практически совпадают, а преобладающий вклад в  $m_{2D}(\gamma_r)$  вносит ее составляющая  $m'_{2D}(\gamma_r)$ .

Рис. 2 позволяет сравнить зависимости  $m_{2D}(\gamma_r)$  и  $m'_{2D}(\gamma_r)$  (кривые 1, 1'), полученные в дифракционном приближении при  $R_r = 0$  и  $R_r = 0,2$  м соответственно с аналогичными зависимостями  $m_2(\gamma_r)$  и  $m'_2(\gamma_r)$  (кривые 2, 2') при дополнительном учете в индикатрисе рассеяния GO-компоненты.

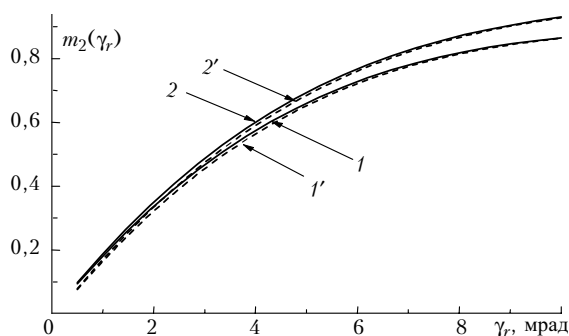


Рис. 2. Влияние размера приемной апертуры на зависимость  $m_2(\gamma_r)$  без учета (кривые 1 и 1') и с учетом (кривые 2 и 2') геометрооптической части индикатрисы рассеяния; 1, 2 – функции  $m_{2D}(\gamma_r)$  и  $m_2(\gamma_r)$  при  $R_r = 0$ ; 1', 2' – функции  $m'_{2D}(\gamma_r)$  и  $m'_2(\gamma_r)$  при  $R_r = 0,2$  м

Из представленных на рис. 2 данных видно, что выбор модели индикатрисы рассеяния оказывает на точность расчета функции  $m_2(\gamma_r)$  гораздо более существенное влияние, чем величина размера приемной апертуры. Поэтому все последующие расчеты будут выполнены для  $R_r = 0$ . Учитывая отмеченное в предыдущем разделе сходство в аналитическом описании функции  $m_2(\gamma_r)$  при  $R_r \neq 0$  и при  $d \neq 0$  в случае малых  $R_r$ , небольшим отклонением от  $d = 0$  можно также пренебречь.

### 3.2. Соотношение вкладов, вносимых дифракционной и геометрооптической составляющими индикатрисы рассеяния

Рассмотрим детально соотношение вкладов, вносимых дифракционной и геометрооптической составляющими индикатрисы рассеяния в функцию  $m_2(\gamma_r)$ . Зависимость функции  $m_2(\gamma_r)$ , а также ее D- и GO-компоненты при  $\tau = 1$  изображены на рис. 3. В поведении

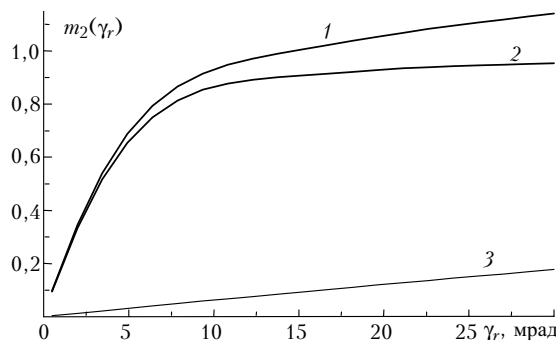


Рис. 3. Разделение функции  $m_2(\gamma_r)$  (1) на дифракционную  $m_{2D}(\gamma_r)$  (2) и геометрооптическую  $m_{2GO}(\gamma_r)$  (3) составляющие для однородного слоя с оптической толщиной  $\tau = 1$

составляющей  $m_{2D}(\gamma_r)$  (кривая 2) можно выделить область углов  $\gamma_r < 6 - 8$  мрад с быстрым возрастанием функции и последующим более медленным переходом к состоянию насыщения до асимптотического уровня  $m_{2D,\infty} = 1$ . Эта компонента вносит основной вклад в суммарную зависимость  $m_2(\gamma_r)$  (кривая 1) во всей области углов поля зрения приемника  $\gamma_r$ . При уменьшении  $\gamma_r$  расхождение между  $m_2(\gamma_r)$  (1) и  $m_{2D}(\gamma_r)$  (2) становится незначительным и уже, например, для угла  $\gamma_r = 10$  мрад составляет всего 6,5%. Поскольку D-компонента индикатрисы рассеяния несет информацию о размерах частиц, то можно рассчитывать на позитивное влияние данного факта при оценке размеров частиц из лидарных измерений (при соответствующем выборе углов поля зрения приемника). Роль компоненты  $m_{2GO}(\gamma_r)$  (3) становится существенной при больших значениях  $\gamma_r$ . Однако при этом, как будет показано ниже, возрастает влияние рассеяния высоких порядков кратности, так что для таких условий рассматриваемое приближение  $m_2(\gamma_r)$  оказывается уже неприменимо.

### 3.3. Оценка границ применимости в зависимости от плотности среды

Для практического применения рассмотренного приближения одним из наиболее важных является вопрос о величине ошибки, допускаемой при его использовании в зависимости от оптической плотности среды. Очевидно, что с увеличением замутненности среды влияние рассеяния высоких порядков будет возрастать, и тем больше, чем больше будет угол поля зрения приемника  $\gamma_r$ . Для количественной оценки этого влияния выполнено сравнение зависимостей  $m_2(\gamma_r)$ , полученных в приближении двукратного рассеяния,

с результатами расчета функции  $m(\gamma_r)$  по строгим формулам малоуглового приближения для двух значений оптической толщины  $\tau = 1$  и  $2$  (рис. 4 и 5).

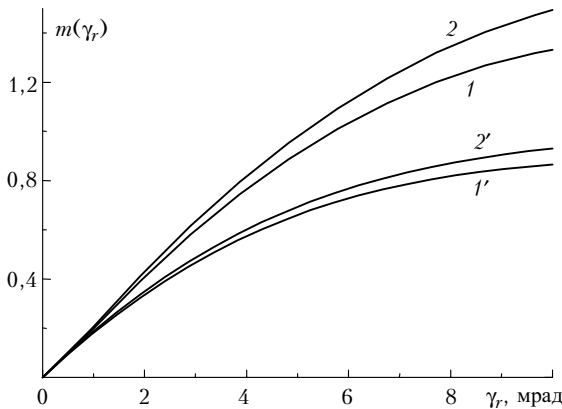


Рис. 4. Сравнение зависимостей  $m(\gamma_r)$  для оптической толщины  $\tau = 1$ , полученных в малоугловом приближении с учетом рассеяния всех кратностей (кривые 1, 2) и с учетом двух первых кратностей (кривые 1', 2'); 1, 1' – для индикатрисы рассеяния в дифракционном приближении; 2, 2' – при дополнительном учете в индикатрисе рассеяния геометрической части

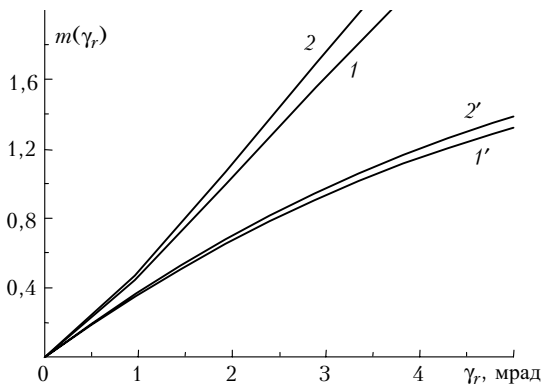


Рис. 5. Сравнение зависимостей  $m(\gamma_r)$  для оптической толщины  $\tau = 2$ , полученных в малоугловом приближении с учетом рассеяния всех кратностей (кривые 1, 2) и с учетом двух первых кратностей (кривые 1', 2'); 1, 1' – для индикатрисы рассеяния в дифракционном приближении; 2, 2' – при дополнительном учете в индикатрисе рассеяния геометрической части

Влияние рассеяния высоких кратностей показано в сопоставлении с влиянием выбора модели малоугловой индикатрисы.

Различие моделей индикатрисы рассеяния состояло в том, что в них либо учитывалась (кривые 2, 2'), либо не учитывалась (кривые 1, 1') ГО-составляющая. Как и следовало ожидать, вклад рассеяния высоких кратностей в лидарный сигнал существенно возрастает при увеличении угла поля зрения приемника  $\gamma_r$  даже при относительно невысокой плотности среды. Этот фактор оказывается более существенным по отношению к выбору модели индикатрисы рассеяния. Тем не менее, как видно из представленных рисунков, при достаточно малом угле поля зрения приемника  $\gamma_r$  приближение  $m_2(\gamma_r)$  может оказаться вполне удовлетворительным. Указанная ситуация наблюдается

как правило, при невысоком общем уровне многократного рассеяния в лидарном сигнале.

Полезно оценить условия, при которых вклад первых двух кратностей рассеяния в лидарном сигнале будет не ниже заданного уровня. Соответствующие зависимости отношения  $\delta_2(\gamma_r) = [P_1(\gamma_r) + P_2(\gamma_r)]/P(\gamma_r)$  мощности лидарного сигнала в приближении двукратного рассеяния к полному сигналу в малоугловом приближении приведены на рис. 6. Из рис. 6 следует, что

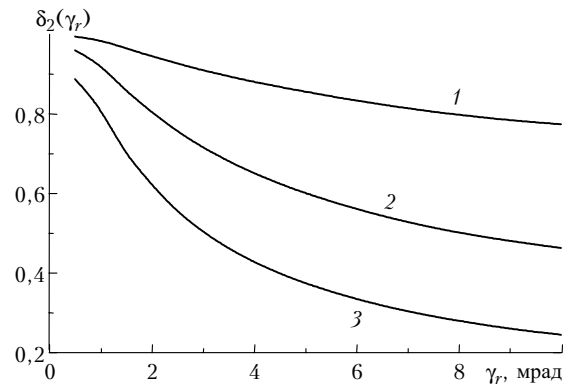


Рис. 6. Относительная доля рассеяния первой и второй кратностей в полном лидарном сигнале в малоугловом приближении при оптической толщине  $\tau = 1, 2$  и  $3$  (кривые 1 – 3)

при оптической толщине  $\tau \leq 1$  мощность сигнала двукратного рассеяния будет составлять более 90% при условии, что угол поля зрения приемника не будет превышать 3,4 мрад. При увеличении  $\gamma_r$  до 8 мрад доля сигнала двукратного рассеяния понижается до 80%. С ростом оптической толщины  $\tau$  до 2 тот же уровень  $\delta_2(\gamma_r)$  будет обеспечиваться при  $\gamma_r$  не более 2,06 мрад. Наконец, для максимальной рассмотренной величины  $\tau = 3$  и предельного уровня  $\delta_2(\gamma_r) = 0,8$  диапазон допустимых углов  $\gamma_r$  становится меньше 1,04 мрад. Приведенные оценки находятся в хорошем согласии с данными расчетов, полученными другими методами (см., например [18]).

Полученные нами численные оценки легко обобщаются для широкого круга ситуаций на основе функций подобия для характеристики  $m(\gamma_r)$  [11]. Для функции  $m_2(\gamma_r)$  величина

$$p = \frac{R}{\lambda} \frac{z}{z - H} \gamma_r \quad (37)$$

служит обобщенным параметром. При  $p = \text{const}$  функция  $m_2(\gamma_r)$  сохраняет постоянное значение. Поэтому, например, перемещение слоя при сохранении неизменными всех остальных параметров приводит к преобразованию  $m_2(\gamma_r)$  по следующему правилу:

$$m_2(z', \gamma_r) = m_2[z, (z'/z) \gamma_r]. \quad (38)$$

Аналогичные преобразования можно записать и для других параметров, входящих в формулу (37).

## Заключение

Исходя из общего лидарного уравнения, записываемого с учетом рассеяния всех порядков в малоуг-

ловом приближении, нами получено частное уравнение, описывающее поведение лидарного сигнала при учете рассеяния только первых двух кратностей. Это уравнение включает в себя простую аналитическую зависимость от малоугловой индикатрисы рассеяния в форме линейного интегрального преобразования. Ядро этого преобразования определяется геометрическими параметрами приемопередающей системы лидара, к числу которых относятся радиус входного зрачка и угол поля зрения приемной системы, расстояние между оптическими осями источника и приемника лидара. Более подробно рассмотрены моностатическая схема с совмещенными осями источника и приемника, а также бистатическая схема с параллельными осями источника и приемника при малых размерах приемной апертуры.

Для полученного уравнения выполнены количественные оценки влияния различных факторов и определены границы его применимости. Как показывают результаты модельных расчетов, ведущим геометрическим фактором в формировании рассеянного сигнала второй кратности является угол поля зрения приемника, а размером входной апертуры в большинстве типичных случаев можно пренебречь. По результатам сравнения с данными расчетов лидарного сигнала по строгим формулам в малоугловом приближении показана применимость приближения двукратного рассеяния вплоть до оптической толщины, равной трем, при достаточно малом угле поля зрения приемника. Причем понятие малости угла поля зрения приемника является относительным и связано соотношениями подобия с размерами рассеивающих частиц, расстоянием до слоя и глубиной проникновения в слой. При малых углах поля зрения приемника, для которых рассмотренное приближение дает достоверные результаты, основное влияние на лидарный сигнал в малоугловой индикатрисе рассеяния оказывает ее дифракционная часть.

1. *Eloranta E.W.* The calculation of double scattered lidar returns from homogeneous clouds // IV Conference on Laser Radar Studies of the Atmosphere: Abstracts. Tucson, 1972. P. 25–27.
2. *Кауль Б.В., Самохвалов И.В.* Уравнение лазерной локации атмосферы с учетом двукратного рассеяния // Изв. вузов. Радиофиз. 1975. № 8. С. 109–113.
3. *Cohen A., Graber M.* Double-scattering calculations and laboratory dye-laser multiple scattering measurements //

- Optical and Quantum Electronic. 1975. V. 7. P. 221–228.
4. *Bryukhanova V.V., Samokhvalov I.V.* Lidar signal structure from remote aerosol formation considering double scattering // Proc. of SPIE. 2000. V. 4341. P. 358–361.
5. *Самойлова С.В.* Теория кратного рассеяния и ее приложения к задачам лазерного зондирования аэрозолей // Оптика атмосф. и океана. 2001. Т. 14. № 3. С. 180–186.
6. *Benayahu Y., Ben-David A., Fastig S., Cohen A.* Cloud-droplet size distribution from lidar multiple-scattering measurements // Appl. Opt. 1995. V. 34. № 9. P. 1569–1578.
7. *Maby C., Lado-Bordowsky O.* Droplet size distribution measurements in water clouds from double scattering with a 532 nm lidar // Proc. of MUSCLE10. 1999. Florence, Italy. P. 227–236.
8. *Roy G., Bissonnette L., Bastille C., Vallee G.* Retrieval of droplet-size density distribution from multiple-field-of-view cross-polarized lidar signals: theory and experimental validation // Appl. Opt. 1999. V. 38. № 24. P. 5202–5211.
9. *Долин Л.С., Савельев В.А.* О характеристиках сигнала обратного рассеяния при импульсном облучении мутной среды узким направленным световым пучком // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1971. Т. 7. № 5. С. 505–510.
10. *Зега Э.П., Кацев И.Л., Полонский И.Н.* Учет многократного рассеяния при лазерном зондировании стратифицированной рассеивающей среды. 1. Общая теория // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1998. Т. 34. № 1. С. 45–50.
11. *Веретенников В.В.* Структура лидарного сигнала при многократном рассеянии в малоугловом приближении // Оптика атмосф. и океана. 1999. Т. 12. № 5. С. 385–391.
12. *Веретенников В.В.* Метод асимптотического сигнала в теории лидарного зондирования при многократном рассеянии // Оптика атмосф. и океана. 2001. Т. 14. № 1. С. 42–48.
13. *Зуев В.Е., Белов В.В., Веретенников В.В.* Теория систем в оптике дисперсных сред. Томск: изд-во «Спектр» ИОА СО РАН, 1997. 402 с.
14. *Веретенников В.В.* Геометрический фактор лидара в малоугловом приближении // Оптика атмосф. и океана. 1998. Т. 11. № 9. С. 1002–1007.
15. *Веретенников В.В.* Определение аппаратной функции при измерении малоугловых индикатрис рассеяния // Оптика атмосф. и океана. 1998. Т. 11. № 10. С. 1039–1044.
16. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
17. *Zege E.P., Kokhanovsky A.A.* Analytical solution to the optical transfer function of a scattering medium with large particles // Appl. Opt. 1994. V. 33. № 27. P. 6547–6554.
18. *Кауль Б.В., Креков Г.М., Крекова М.М.* Об использовании двукратного рассеяния в оптической локации // Квант. электрон. 1977. Т. 4. № 11. С. 2408–2413.

**V.V. Veretennikov. Lidar equation in the second order approximation for media with strongly extended phase function.**

In the framework of laser sensing with accounting for multiple scattering in the small-angle approximation, the lidar signal component stipulated by two first orders of scattering is separated. Simple formulae are obtained for media with strongly peaked phase function, which define the doubly-scattered signal taking into account geometric parameters of the lidar. The role of the diffraction and geometrical-optical components of the scattering phase function in the doubly-scattered signal is studied. Estimates of the accuracy of the considered approximation are obtained depending on the receiver's field-of-view angle at various optical thicknesses of the scattering layer.