«Оптика атмосферы», т. 4. № 10 (1991)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

УДК 621.373.826:(535:530.182)

А.П. Сухоруков, Э.Н. Шумилов

ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АБЕРРАЦИЙ ПРИ САМОВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ С НЕКРУГОВЫМ СЕЧЕНИЕМ

В переменных Лагранжа, связанных в пространстве с неплоскими траекториями световых лучей, построено аналитическое решение уравнения переноса излучения. С его помощью параболическое уравнение для эйконала волны сведено к системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей самые низкие по порядку аберрационные искажения некруговых пучков с осевой симметрией в средах с произвольным механизмом нелинейности.

С целью конкретизации полученной системы рассчитана нелинейная часть диэлектрической проницаемости сред с керровской и тепловой нелинейностями. Проведено сопоставление отличий в развитии волновых аберраций осесимметричных пучков в нелинейных средах обоих типов.

Распространение в нелинейных средах световых пучков сопровождается их аберрационными искажениями. В так называемом безаберрационном приближении нелинейные искажения сводятся к самовоздействию пучков, при котором сохраняется параболическая форма волнового фронта [1—3]. Аберрации четвертого порядка, в частности сферические, а также аберрации более высоких порядков могут существенно изменить характер распространения пучка, придавая ему такие специфические особенности, как образование аберрационных колец, ограничение поперечных размеров пучков, подобных гауссовским, перераспределение поля в прифокальной области и др. [4—8].

Еще больший спектр проявлений нелинейных аберраций связан с самовоздействиями некруговых пучков, в частности эллиптических [4—5]. Математический аппарат, позволявший бы исследовать аберрации подобных пучков, до настоящего времени не был разработан, что затрудняло самостоятельное изучение нелинейных аберраций даже самого низкого порядка. Тем более не представлялось возможным исследовать подавление или индуцированное развитие в нелинейных средах аберраций, изначально привнесённых в волновой фронт пучка. Это препятствовало решению широкого круга задач оптики нелинейных сред.

В данной статье развивается аберрационная теория самовоздействий световых пучков с вырожденной центральной симметрией сечения — осесимметричных, в частности эллиптических, — в средах с произвольным механизмом нелинейности. Аберрационные искажения четвертого порядка описываются самосогласованно системой обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью трёх дополнительно введенных аберрационных функций. Теория согласуется с ранее развитыми упрощенными ее модификациями [6—7] и представляет собой их естественное обобщение. Используемая методология может быть применена для описания аберрационных искажений и других четных порядков, присущих некруговым пучкам.

Для описания нелинейных аберраций пучков с осевой симметрией, поле которых при независимой (одновременной или нет) замене поперечных координат x, y координатами противоположных знаков не изменяется, выясним прежде всего присущую им форму волнового фронта. С этой целью обратимся к характеристическому уравнению траекторий лучей

$$d\boldsymbol{\rho}/dz = \nabla_\perp s, \tag{1}$$

связывающему изменение вдоль продольной координаты z поперечного вектора $\boldsymbol{\rho} = \{x, y\}$ текущей точки траектории луча с добавкой к эйконалу плоской волны $s(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$; $\nabla_\perp = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ — поперечный гамильтониан.

В отсутствие аберраций в так называемом безаберрационном приближении траектории лучей (1) эллиптического пучка полностью определяются векторной функцией $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2\}$

$$\xi_1 = x/a_{10}f_1(z), \ \xi_2 = y/a_{20}f_2(z), \tag{2}$$

сохраняющейся вдоль каждой траектории; a_{10}, a_{20} — характерные начальные и $f_{1,2}(z)$ — текущие безразмерные главные полуоси эллипса сечения пучка [4—5]. В соответствии с (1) и (2)

$$\partial s/\partial \xi_i = a_{i0} f_i \left(a_{i0} f_i' \xi_i + a_{i0} f_i \, d\xi_i/dz\right) \ (i = 1,\ 2), \tag{3}$$

так что интегрирование (3) дает

$$s(\mathbf{r}) = s_0(z) + \sum_{i=1}^{2} a_{i0}^2 f_i^2 \left(\frac{f_i' \xi_i^2}{2 f_i} + \int_{(\xi=0)}^{(\xi)} \frac{d\xi_i}{dz} d\xi_i\right), \tag{4}$$

где $s_0(z)$ — дополнительный набег фазы за счет изменения скорости распространения волны.

При наличии аберрационных искажений вектор $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ уже не сохраняется и при учете аберраций, описываемых в эйконале произведениями различных четных степеней поперечных координат x, y, вплоть до слагаемых с суммарной степенью $2(N+1)$ ($N = 1,\ 2,\ \ldots$), характеризуется, как легко подсчитать, $n = N(N+5)/2$ безразмерными аберрационными функциями. В частности, в рассматриваемом далее случае аберраций четвертого порядка ($N = 1$) количество необходимых аберрационных функций составляет $n = 3$.

Обозначая аберрационные функции через $A_{1,2}(z)$ и $A_{12}(z)$, подынтегральные функции в (4), удовлетворяющие условию интегрируемости

$$\frac{a_{i0} f_i}{a_{3-i,\,0} f_{3-i}} \frac{\partial}{\partial \xi_{3-i}} \left(\frac{d\xi_i}{dz}\right) = \frac{a_{3-i,\,0} f_{3-i}}{a_{i0} f_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{d\xi_{3-i}}{dz}\right) (i = 1,\ 2),$$

можно записать следующим образом:

$$\frac{d\xi_i}{dz} = \frac{\xi_i^3}{2} \frac{dA_i}{dz} + \frac{a_{3-i,\,0} f_{3-i}}{2 a_{i0} f_i} \xi_i \xi_{3-i}^2 \frac{dA_{12}}{dz} \ (i = 1,\ 2), \tag{5}$$

так что сам эйконал осесимметричного пучка представляется в виде

$$s(\boldsymbol{\xi},\ z) = s_0(z) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} a_{i0}^2 f_i^2 \left(\frac{f_i'}{f_i} + \frac{1}{4} A_i' \xi_i^2\right) \xi_i^2 + \frac{1}{4} a_{10} a_{20} f_1 f_2 A'_{12} \xi_1^2 \xi_2^2. \tag{6}$$

Закон распределения интенсивности в аберрационно-искаженном пучке установим из параболического уравнения переноса излучения

$$\partial I/\partial z + \nabla_\perp (I \nabla_\perp s) + \delta I = 0, \tag{7}$$

где I — интенсивность излучения, δ — коэффициент поглощения среды.

Решение уравнения (7), удовлетворяющее на границе нелинейной среды $z = 0$, где $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\rho},\ 0) = \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\rho})$, условию

$$I(\boldsymbol{\rho},\ 0) = I_0(\boldsymbol{\xi}_0), \tag{8}$$

будем искать в следующем виде:

$$I(\mathbf{r}) = I_0(\boldsymbol{\Xi})\, e^{-\delta z} |J(\boldsymbol{\Xi})|, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1,\ \Xi_2\}$ — некоторый непрерывный поперечный вектор, совпадающий с $\boldsymbol{\xi}_0$ при $z = 0$, причем преобразование от переменных $\Xi_{1,2}(\boldsymbol{\xi},\ z)$ к переменным $\xi_{10} = x/a_{10}$, $\xi_{20} = y/a_{20}$ ($f_{1,2}(0) = 1$) или к переменным $\xi_{1,2}$ осуществляется с помощью якобиана

$$J(\boldsymbol{\Xi}) = \partial(\Xi_1,\ \Xi_2)/\partial(\xi_{10},\ \xi_{20}) = (f_1 f_2)^{-1} \partial(\Xi_1,\ \Xi_2)/\partial(\xi_1,\ \xi_2). \tag{10}$$

Представление (9) и (10), как легко убедиться, обеспечивает выполнение вытекающего из (7) закона сохранения полной мощности излучения интенсивностью $f(\mathbf{r})\exp(\delta z)$, а подстановка (9) и (10) в уравнение (7) обращает последнее в тождество при удовлетворении уравнений

$$\partial \Xi_i/\partial z + \nabla_\perp \Xi_i \nabla_\perp s = 0 \ (i = 1,\ 2), \tag{11}$$

$$\partial J/\partial z + \nabla_\perp (J \nabla_\perp s) = 0. \tag{12}$$

При учете уравнения (1) из (11) следует, что функции $\Xi_{1,2}(\xi, z)$ сохраняются вдоль траекторий лучей и поэтому представляют собой переменные Лагранжа, служащие для обозначения текущей точки (координата z выполняет роль времени), выделенной в пространстве лучевой траектории с началом в точке $\Xi(\xi_0, 0) = \xi_0$. Интегралы же уравнения траекторий лучей (1), из которых определяются переменные $\Xi_{1,2}$, представимы в общем случае рекуррентным образом

$$C_i = M_i(\xi_i, \Phi_i, z) \quad (i = 1, 2) \tag{13}$$

с помощью одноименных по индексу интегральных функций $\Phi_i(\mathbf{C}, z)$, в аргументах которых вектор $\mathbf{C} = \{C_1, C_2\}$ обозначает совокупность тех же интегралов (13). Так как интегральная функция Φ_i входит в (13) всегда аддитивно, простым переобозначением константы C, можно обеспечить начальное значение $\Phi_i(\mathbf{C}, 0) = 0$.

Выражая из интегралов (13) переменные

$$\xi_i = M_i^{-1}(C_i, \Phi_i, z) \quad (i = 1, 2) \tag{14}$$

через функции M_i^{-1}, обратные функциям в правых частях (13), находим при $z = 0$ переменные Лагранжа

$$\Xi_i = M_{i0}^{-1}(C_i) \equiv M_i^{-1}(C_i, 0, 0) \quad (i = 1, 2), \tag{15}$$

приобретающие следующую связь с переменными $\xi_{1,2}$, z (или с Эйлеровыми переменными x, y, z) после подстановки в (15) констант (13):

$$\Xi_i = M_{i0}^{-1}(M_i(\xi_i, \Phi_i, z)) \quad (i = 1, 2), \tag{16}$$

где $\mathbf{C}$ в аргументе Φ_i также выражается через ξ и z после рекуррентной подстановки (13).

Интегрирование функции $J(\Xi)$ в (12), производимое также вдоль траекторий лучей (1) при начальном условии $J(\xi_0) = 1$, даёт

$$J(\Xi) = \exp\left\{-\int_0^z [\Delta_\perp s(\rho, \zeta)]_{\rho = \rho(\zeta)}\, d\zeta\right\}, \tag{17}$$

где в соответствии с (2) и (14)

$$\rho(\zeta) = \{a_{10} f_1 M_1^{-1}(C_1, \Phi_1, \zeta),\ a_{20} f_2\ M_2^{-1}(C_2, \Phi_2, \zeta)\}, \tag{18}$$

причем здесь функции $f_{1,2}(\zeta)$ и $\Phi_{1,2}(\mathbf{C}, \zeta)$ берутся от аргумента ζ и

$$C_i = M_{i0}(\Xi_i) \equiv M_i(\Xi_i, 0, 0) \quad (i = 1, 2)$$

согласно (13) при $z = 0$, что и определяет функциональную зависимость якобиана.

Используя полученные результаты (9)—(17) для некруговых пучков с волновым фронтом (6), интегралы (13) уравнения (1) найдем в виде

$$C_i = \xi_i^{-2} + A_i + \Phi_i \quad (i = 1, 2), \tag{13'}$$

где интегральные функции

$$\Phi_i(\mathbf{C}, z) = \frac{a_{3-i,\,0}}{a_{i0}} \int_0^z \frac{f_{3-i}(\zeta)}{f_i(\zeta)}\, \frac{C_i - A_i(\zeta) - \Phi_i(\mathbf{C}, \zeta)}{C_{3-i} - A_{3-i}(\zeta) - \Phi_{3-i}(\mathbf{C}\ , \zeta)}\, A'_{12}(\zeta)\, d\zeta \quad (i = 1, 2).$$

В соответствии с (16) переменные Лагранжа определятся из (13') формулами

$$\Xi_i = \xi_i\{1 + [\alpha_i(z, 0) + \varphi_i(\xi, z, 0)]\, \xi_i^2\}^{-1/2} \quad (i = 1, 2), \tag{16'}$$

в которых $\alpha_i(z, 0) = A_i(z) - A_{i0}$, $A_{i0} = A_i(0)$. Якобиан же преобразования (10) в функции Эйлеровых переменных согласно (17) и (18) оказывается равным

$$J = (f_1 f_2)^{-1} \exp[-\Sigma(\xi_1^2, \xi_2^2)], \tag{10'}$$

где

$$\Sigma(\xi_1^2, \xi_2^2) = \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \int_0^z \frac{H_i'(\zeta)}{1 + [\alpha_i(z, \zeta) + \varphi_i(\xi, z, \zeta)]\xi_i^2} d\zeta, \tag{19}$$

$$H_i(z) = \frac{1}{2}[3\alpha_i(z, 0) + F_i(z)],$$

$$F_i(z) = \frac{a_{i0}}{a_{3-i,0}} \int_0^z \frac{f_i(\zeta)}{f_{3-i}(\zeta)} A'_{12}(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\alpha_i(z, \zeta) = \alpha_i(z) - \alpha_i(\zeta), \quad \varphi_i(\xi, z, \zeta) = \Phi_i(\mathrm{C}, z) - \Phi_i(\mathrm{C}, \zeta) \quad (i = 1, 2).$$

Причем функции $\varphi_{1,2}(\xi, z, \zeta)$, отражающие пространственную (неплоскую) форму лучевых траекторий (16'), представимы с учетом (13') рекуррентной зависимостью

$$\varphi_i(\xi, z, \zeta) = \int_\zeta^z \frac{\xi_i^{-2} + \alpha_i(z, \gamma) + \varphi_i(\xi, z, \gamma)}{\xi_{3-i}^{-2} + \alpha_{3-i}(z, \gamma) + \varphi_{3-i}(\xi, z, \gamma)} F'_{3-i}(\gamma)\, d\gamma \quad (i = 1, 2) \tag{20}$$

Таким образом, распределение интенсивности в сечении некругового пучка с осевой интенсивностью I_0 при симметричном относительно координатных осей начальном профиле (8)

$$I_0(\xi_0) = I_0 \mathscr{P}(\xi_{10}^2, \xi_{20}^2)/\mathscr{P}(0, 0),$$

записываемом в наиболее общем случае гипергауссовой функцией

$$\mathscr{P}(\xi_{10}^2, \xi_{20}^2) = \exp\left(-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \xi_{10}^{2m} \xi_{20}^{2n}\right), \tag{21}$$

описывается, после подстановки (10′) в (9), также гипергауссовым законом

$$I(\mathbf{r}) = I_0 \exp\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_{mn}(z) \xi_1^{2m} \xi_2^{2n}\right], \tag{22}$$

в котором

$$l_{mn}(z) = -\delta_{s0}(\delta z + \ln f_1 f_2) - (1 - \delta_{s0})[b_{mn}(z) + h_{mn}(z)] \tag{23}$$

($s = m + n$, δ_{st} – символ Кронекера) представляются через коэффициенты разложения, по переменным $\xi_{1,2}^2$ двойного ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \Xi_1^{2m} \Xi_2^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{mn}(z) \xi_1^{2m} \xi_2^{2n}, \tag{24}$$

образованного из выражений (16′), ,и разложения функции (19):

$$\Sigma(\xi_1^2, \xi_2^2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h_{mn}(z) \xi_1^{2m} \xi_2^{2n}. \tag{19'}$$

Необходимо отметить, что представление (21), для начального профиля пучка универсально в том отношении, что числа

$$B_{mn} = -\delta_{s0} \ln \mathscr{P}_{00} - \frac{1 - \delta_{s0}}{\mathscr{P}_{00}} \left[\mathscr{P}_{mn} + \frac{1}{s + \delta_{s0}} \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} (p + q)(1 - \delta_{mp}\delta_{nq}) \mathscr{P}_{m-p,\, n-q} B_{pq}\right]$$

($0 \le s = m + n < \infty$) всегда могут быть определены рекуррентно по коэффициентам $\mathscr{P}_{mn}(\mathscr{P}_{00} = \mathscr{P}(0, 0))$ разложения в двойной ряд произвольной непрерывной функции

$$\mathscr{P}(\xi_{10}^2,\ \xi_{20}^2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{P}_{mn}\,\xi_{10}^{2m}\,\xi_{20}^{2n}.$$

При расчете коэффициентов $b_{mn}(z)$ достаточно ограничиться в разложениях квадратов переменных Лагранжа (16′) по произведениям степеней квадратов $\xi_{1,2}$ слагаемыми вплоть до шестой суммарной степени, т. е.

$$\Xi_i^2 = \xi_i^2 \sum_{m=0}^{2}\sum_{n=0}^{2-m}\eta_i^{(m,\ n)}(z)\,\xi_1^{2m}\,\xi_2^{2n}\ \ (i = 1,\ 2),$$

где функции

$$\eta_i^{(m,\ n)}(z) = \theta(i)\begin{cases}\delta_{m0} - \delta_{m1}\int\limits_0^z [A_i'(\zeta) - F_i'(\zeta)]\,F_{3-i}(\zeta)\,d\zeta + 2\delta_{m1}\,\alpha_i(z,\ 0)\,F_{3-i}(z), & m = n,\\[2ex] \Theta_i^{(m,\ n)}[-\alpha_i(z,\ 0)]^s + \dfrac{\Theta_i^{(n,\ m)}}{s}[-F_{3-i}(z)]^s + \\ \quad + (\delta_{i1}\,\delta_{n2} + \delta_{i2}\,\delta_{m2})\int\limits_0^z A_{3-i}'(\zeta)\,F_{3-i}(\zeta)\,d\zeta, & m \neq n\end{cases} \tag{25}$$

определены для $0 \le (i,\ s) \le 2$, $s = m + n$, $\theta(p)$ — единичная функция Хевисайда, равная нулю при $p \le 0$,

$$\Theta_i^{(m,\ n)} = \delta_{i1}\,\theta(m) + \delta_{i2}\,\theta(n)\ \ (i = 1,\ 2).$$

В использованных обозначениях из (24) находим

$$b_{mn}(z) = B_{mn} + \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} p!q!\,(1 - \delta_{mp}\,\delta_{nq})\,B_{pq}\,[\eta_{1\theta(p)}^{(m-p,\ n-q)}(z) + \eta_{2\theta(q)}^{(m-p\ ,n-q)}(z)] \tag{26}$$

в интервале индексов $0 \le m + n \le 3$.

Коэффициенты $h_{mn}(z)$ разложения функции (19) в ряд (19′) в том же интервале индексов $0 \le m + n \le 3$ оказываются равными

$$h_{mn}(z) = (-1)^{s+1}(1 - \delta_{s0})\,C_s^m\,H_{1(m),\ 2(n)}^{(s)}(z), \tag{27}$$

где $s = m + n$, C_s^m — биномиальные коэффициенты, а запись $k(l)$ означает индекс k ($k = 1,\ 2$), повторенный l раз ($l = m,\ n$) при воспроизведении функций

$$H_{i(p)}^{(p)}(z,\ \zeta) = \int\limits_0^{\zeta} \alpha_i^{p-1}(z,\ \gamma)\,H_i'(\gamma)\,d\gamma\ \ (p = 1,\ 2,\ 3;\ i = 1,\ 2),$$

$$H_{12}^{(p)}(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^z [H_1(\gamma)\,F_2'(\gamma) + (-1)^p H_2(\gamma)\,F_1'(\gamma)]\,d\gamma,$$

$$H_{1i2}^{(3)}(z) = \frac{2}{3}\int\limits_0^z [(-1)^i\,\alpha_i(z,\ \gamma)\,H_{12}^{(1)\prime}(\gamma) + H_{12}^{(2)}(\gamma)\,F_i'(\gamma) + H_{ii}^{(2)}(z,\ \gamma)\,F_{3-i}'(\gamma)]\,d\gamma, \tag{28}$$

причем в (27) принимается $H_{i(p)}^{(p)}(z,\ z) = H_{i(p)}^{(p)}(z)$ и, как это видно из (28), $H_i^{(1)}(z,\ z) = H_i(z)$ ($i = 1,\ 2$).

Профилю интенсивности пучка (22) в используемом приближении (27) теперь удобно придать следующий вид, произведя интегрирование в показателе экспоненты (19) якобиана (10′):

$$I(\mathbf{r}) = I_0\,\frac{\mathscr{P}(\Xi_1^2,\ \Xi_2^2)}{\mathscr{P}(0,\ 0)}\,\frac{\mathrm{e}^{-\delta z}}{f_1 f_2}\left(\frac{\Xi_1\Xi_2}{\xi_1\xi_2}\right)^2 \exp\left[-\sum_{m=0}^{3}\sum_{n=0}^{3-m} h_{mn}^{(-)}(z)\,\xi_1^{2m}\,\xi_2^{2n}\right], \tag{22′}$$

где $\Xi_{1,2}$ даются (16′), а функции $h_{mn}^{(-)}(z)$ определяются формулами (27) и (28), в которых $H_{1,2}(z) \equiv H_{1,2}^{(+)}(z)$ заменяется $H_{1,2}^{(-)}(z)$, причем

$$H_i^{(\pm)}(z) = \alpha_i(z,\ 0) \pm \frac{1}{2}[\alpha_i(z,\ 0) + F_i(z)] \ \ (i = 1,\ 2).$$

В последней форме выражение для интенсивности пучка, как можно убедиться, обобщает аналогичное выражение в теории [6], учитывающей сферические аберрации аксиально-симметричных пучков, и преобразуется при удержании в (22) всех членов ряда по одному из индексов и нулевом другом (или после интегрирования в (19) при $a_{3-i,0} \to \infty$, $f_{3-i} = 1$, $A_{3-i} = A_{12} = 0$) в распределение интенсивности для одномерного пучка

$$I(\mathbf{r}) = I_0 \frac{\delta_{i1}\mathscr{P}(\Xi_i^2,\ 0) + \delta_{i2}\mathscr{P}(0,\ \Xi_i^2)}{\mathscr{P}(0,\ 0)} \frac{\exp(-\delta z)}{f_i[1 + \alpha_i(z,\ 0)\xi_i^2]^{3/2}} \ (i = 1,\ 2). \tag{22''}$$

Полученные выражения позволяют установить уравнения, описывающие поведение искомых аберрационных функций $A_{1,2}(z)$ и $A_{12}(z)$. С этой целью используем параболическое уравнение для эйконала волны

$$2\frac{\partial s}{\partial z} + (\nabla_\perp s)^2 = \frac{\varepsilon'_{\text{нл}}[I]}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2k^2}\left[\Delta_\perp \ln I + \frac{1}{2}(\nabla_\perp \ \ln I)^2\right], \tag{29}$$

в котором действительная нелинейная добавка $\varepsilon'_{\text{нл}}[I]$ к диэлектрической проницаемости среды (ε_0 — ее невозмущенное значение) является вообще некоторым функционалом интенсивности пучка; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

В приближении аберраций четвертого порядка достаточно ограничиться в разложении нелинейной добавки по четным степеням $\xi_{1,2}$ (или по степеням x, y) слагаемыми с суммарной степенью, не превышающей четырёх, т. е.

$$\varepsilon'_{\text{нл}}[I] = \sum_{m=0}^{2}\sum_{n=0}^{2-m} \varepsilon'_{2m,\,2n}(z)\,\xi_1^{2m}\xi_2^{2n}, \tag{30}$$

причем коэффициенты разложения $\varepsilon'_{2m,2n}(z)$ определяются с учетом конкретного механизма нелинейности среды. Например, в случае среды с кубичной нелинейностью, когда $\varepsilon'_{\text{нл}}[I] = \varepsilon^{(2)}I$, находим

$$\varepsilon'_{2m,\,2n}(z) = \varepsilon^{(2)} I_{mn}(z),$$

где

$$I_{mn}(z) = I_0 (f_1 f_2)^{-1} \exp(-\delta z)\, D^{(m,\,n)}(z)$$

характеризуют разложение в двойной ряд интенсивности пучка и могут быть выражены через коэффициенты (23) по рекуррентным формулам

$$D^{(m,\,n)}(z) = \delta_{s0} + \frac{1-\delta_{s0}}{s+\delta_{s0}} \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} (s-p-q)\, l_{m-p,\ n-q}(z)\, D^{(p,\,q)}(z)$$

($s = m + n$). В интервале индексов $0 \le s = m + n \le 2$ получаем

$$\varepsilon'_{2m,\,2n}(z) = \varepsilon^{(2)} I_0 (f_1 f_2)^{-1} \mathrm{e}^{-\delta z}\left\{\delta_{s0} + (1-\delta_{s0})\left[\frac{1-\theta(m)\theta(n)}{s+\delta_{s0}}(\theta(m)\, l_{10} + \theta(n)\, l_{01})^s + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (\theta(m-1) + \theta(n-1))\, l_{mn} + \theta(m)\,\theta(n)\, l_{10}\, l_{01}\right]\right\}, \tag{30'}$$

где $l_{mn}(z)$ вычисляются по формуле (23) с учетом (26) и (27).

Для среды с тепловой нелинейностью величина $\varepsilon'_{\text{нл}}[I] = (d\varepsilon / dT)[T(\mathbf{r}) - T(0,\ z)]$ определяется температурным профилем $T(\mathbf{r})$ в сечении пучка, и коэффициенты $\varepsilon'_{2m,2n}(z)$ можно найти, решив уравнение теплопроводности. В предположении сохранения Гаусовой формы пучка, т.е. при $|l_{mn}| < (|l_{10}|, |l_{01}|)$ для $m + n > 1$, и умеренной эллиптичности его сечения, когда $|\mu(z)| < 1$,

$\mu(z) = (a_{20}^2 f_2^2 l_0 - a_{10}^2 f_1^2 l_{01}) / (a_{20}^2 f_2^2 l_0 + a_{10}^2 f_1^2 l_{01})$, расчет до слагаемых, содержащих $\mu(z)$ и $\mu^2(z)$, дает в том же интервале индексов $0 \le s = m + n \le 2$

$$\varepsilon'_{2m,\,2n}(z) = -\frac{a_{10}a_{20}\delta I_0 \exp(-\delta z)}{4\varkappa}\,\frac{d\varepsilon}{dT}\,\frac{(C_s^m + C_s^n)(a_{20}^2 f_2^2 l_{10} + a_{10}^2 f_1^2 l_{01})^{s-1}}{2^s s s!\,(a_{10} f_1)^{2n-1}(a_{20} f_2)^{2m-1}}\gamma_{mn}(z), \tag{30''}$$

где

$$\gamma_{mn}(z) = (1-\delta_{s0})\left\{\left[1 + \frac{\theta(m)-\theta(n)}{\theta(m)+\theta(n)}\,\frac{\mu(z)}{2}\right]^s + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\left[\theta(m-1) - \theta(n-1)\right]\mu(z) - \frac{3}{4}\theta(m)\,\theta(n)\,\mu^2(z)\right\},$$

$\varkappa$ — коэффициент теплопроводности среды, а $l_{10}(z)$, $l_{01}(z)$ задаются, как и ранее, в соответствии с (23), (26), (27).

Подстановка (6), (22) и (30) в уравнение (29) приводит (после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\xi_{1,2}^{2m}$ $(m = 0,\ 1,\ 2)$ и произведении $\xi_1^2 \cdot \xi_2^2$) к уравнениям для искомых функций s_0, $f_{1,2}$, $A_{1,2}$ и A_{12}:

$$s'_0 = \frac{\varepsilon'_{00}}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{a_{i0}^2 l_{10}^{(i)}}{R_{\text{д}i}^2 f_i^2},$$

$$f''_i = \frac{\varepsilon_{20}^{(i)}}{\varepsilon_0 a_{i0}^2 f_i} + \frac{1}{R_{\text{д}i} f_i}\left[\frac{(l_{10}^{(i)})^2 + 6 l_{20}^{(i)}}{R_{\text{д}i} f_i^2} + \frac{l_{11}}{R_{\text{д},\,3-i} f_{3-i}^2}\right],$$

$$(f_i^2 A'_i)' = \frac{4\varepsilon_{40}^{(i)}}{\varepsilon_0 a_{i0}^2} + \frac{4}{R_{\text{д}i}}\left[\frac{4 l_{10}^{(i)} l_{20}^{(i)} + 15 l_{30}^{(i)}}{R_{\text{д}i} f_i^2} + \frac{l_{21}^{(i)}}{R_{\text{д},\,3-i} f_{3-i}^2}\right] (i = 1,\ 2),$$

$$(f_1 f_2 A'_{12})' = \frac{2\varepsilon'_{22}}{\varepsilon_0 a_{10} a_{20}} + \frac{4}{R_{\text{д}1}^{1/2} R_{\text{д}2}^{1/2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{l_{10}^{(i)} l_{11} + 3 l_{21}^{(i)}}{R_{\text{д}i} f_i^2}, \tag{31}$$

где $l_{mn}^{(i)} = \delta_{i1} l_{mn} + \delta_{i2} l_{nm}$, $\varepsilon_{2m,2n}^{(i)} = \delta_{i1}\varepsilon'_{2m,2n} + \delta_{i2}\varepsilon'_{2n,2m}$, величины $l_{mn}(z)$ и $\varepsilon'_{2m,2n}(z)$ даются выражениями (23) и (30′) или (30″) соответственно, $R_{\text{д}i} = k a_{i0}^2$ $(i = 1,\ 2)$ — дифракционные длины пучка. Как легко установить, в случае кругового пучка $(a_{10} = a_{20} = a_0)$ $\varepsilon'_{20} = \varepsilon'_{02}$, $\varepsilon'_{40} = \varepsilon'_{04} = \frac{1}{2}\varepsilon'_{22}$ и аналогично

$$L_{mn} = L_{nm},\ L_{m0} = L_{0m} = \frac{1}{m} L_{m-1,\,1} \equiv L_m\ (0 \leqslant n < m + n \leqslant 3),$$

где $L_{mn} = (B,\ b;,\ h,\ l)_{mn}$. При этом система (31) сводится к трем уравнениям для функций s_0, f и A_1 $(f = f_1 = f_2,\ A_1 = A_2 = A_{12})$, которые преобразуются с учетом (30′) или (30″) к полученным ранее уравнениям [7] после введения соответствующих нелинейных длин.

Анализ системы уравнений (31) показывает, что нелинейные аберрации неизбежно развиваются в поле произвольного светового пучка с ограниченными геометрическими размерами, но различным образом в средах с разными механизмами нелинейности. В среде с кубичной нелинейностью, например, аберрации индуцируются преимущественно по той координате, по которой размер пучка наименьший и наблюдается более сильная его рефракция. В среде же с тепловыми самовоздействиями, наоборот, аберрации более сильны в направлении наибольшей оси сечения пучка, рефракция вдоль которой в зависимости от соотношения обеих осей сечения почти до трёх раз слабее рефракции в перпендикулярной к ней плоскости. Причем усиление эллиптичности пучка приводит к возрастанию искажений его волнового фронта и сечения, приобретающих волнистый рельеф, так что эллиптичность не сохраняется.

Существенное различие состоит и в проявлении зависимости направления развития аберраций от геометрооптических характеристик пучка. В среде с кубичной нелинейностью того или иного знака вдоль главных осей сечения развиваются аберрации одинаковых или различных знаков в зависимости от формы начального профиля интенсивности пучка по тем же осям, но независимо от соотношения размеров самих осей. При тепловых же самовоздействиях знаки аберраций в тех же перпендикулярных плоскостях определяются, в первую очередь, именно соотношением размеров главных осей сечения пучка.

Обращает на себя внимание и тот факт, что волновые свойства также влияют на аберрационные искажения пучка, сдерживая или усиливая их развитие в зависимости от формы профиля интенсивности. При этом интересно отметить, что роль дифракции проявляется тем значительнее, чем существеннее становятся отличия пучка от Гауссова.

1. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. //УФН. 1967. Т. 93. Вып. 1. С. 19–70.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики: Пер. с англ. И.Л. Шумая /Под редакцией С.А. Ахманова. М.: Наука, 1989. 560 с.
4. Алешкевич В.А., Мигулин А.В., Сухоруков А.П.. Шумилов Э.Н. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. Вып. 2. С. 551–561.
5. Сухоруков А.П., Фельд С.Я., Хачатрян А.М., Шумилов Э.Н. // Квантовая электроника. 1972. 2(8). № 8. С. 53–60.
6. Иванов С.В., Сухоруков А.П., Шумилов Э.Н. //II совещание по атмосферной оптике. (Тез. докл., ч. III). Томск: ИОА СО АН СССР, 1980. С. 214–217.
7. Сухоруков А.П., Шумилов Э.Н. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 8. С. 851–859.
8. Распространение лазерного пучка в атмосфере /Под ред. Б. Стробена. М.: Мир, 1981. 416 с.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23 июля 1991 г.

A.P. Sukhorukov, E.N. Shumilov. **Description of Nonlinear Aberrations due to Self-Action of the Wave Beams of Noncircular Cross-Sections.**

An analytical solution of the radiation transfer equation is constructed in the space of Lagrarigian variables spatially related to three-dimensional trajectories of optical rays. Using this solution the parabolic equation for the wave eikonal is reduced to a system of five differential equations. This system of equations describes the lowest order aberrational distortions of noncircular beams with axial symmetry in media with an arbitrary nonlinearity mechanism. The system of equations was used to calculate nonlinear part of the dielectric constant of media with the Kerr and thermal types of nonlinearity. Evolutions of wave aberrations of axially symmetric beams in both types of nonlinear media are compared.