«Оптика атмосферы», т. **4**, № 10 (1991)

АТМОСФЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

УДК 535.317.25

В.И. Солодушкин, В.А. Удод

ОПТИМАЛЬНАЯ ПО РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОДНОМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В одномерном варианте решена задача оптимальной фильтрации изображений по критерию максимума разрешающей способности. Показана применимость полученного решения для улучшения изображений наблюдаемых объектов в оптической системе, работающей в турбулентной атмосфере в условиях случайной рефракции.

Введение

Известно [1—3], что мерой совершенства оптических систем, как впрочем и любых других изображающих систем (ИС) — телевизионных, рентгеновских, фотографических, — является разрешающая способность (РС) по Фуко. Вопросы анализа скрытых возможностей ИС, позволяющих повысить (или регулировать, управлять) их РС, являются предметом постоянных исследований как в СССР [4—6], так и за рубежом [7—9]. Между тем, насколько нам известно, в литературе отсутствует информация о теоретически предельно достижимых значениях РС ИС того или иного типа и соответствующем этому теоретическому пределу выбору функциональных характеристик ИС. В настоящей работе из-за высокой сложности задачи в целом приведено ее решение в одномерном варианте применительно к линейным ИС со следующей модельной структурой: исходное изображение — искажающий фильтр — аддитивный шум — корректирующий фильтр — выходное изображение.

Математическая постановка задачи

Разрешающую способность ИС будем определять следующим образом [10]:

$$R = \mu\{\bar{\nu} \geqslant 0 \,|\, k_0 G(\nu) \geqslant K(\nu),\ G(\nu) > 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\},$$

где μ — мера Лебега; ν, ν' — пространственные частоты; k_0 — исходный контраст (контраст разрешаемых элементов на входе ИС); G — суммарная частотно-контрастная характеристика (ЧКХ) ИС; K — пороговый контраст.

В дальнейшем по аналогии с [11] примем, что пороговый контраст обусловлен лишь наличием шумов на выходе ИС, т. е.

$$K(\nu) \equiv K = M_{\text{пор}}\delta,$$

где $M_{\text{пор}}$ — пороговое отношение сигнал-шум; δ — относительное среднее квадратическое значение шума на выходе ИС.

После простых преобразований рассматриваемая нами задача преобразуется к нахождению максимума функционала

$$R(\Phi) = \mu\{\bar{\nu} \geqslant 0 \,|\, H(\nu)\Phi(\nu) \geqslant c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)\,d\nu,\ H(\nu)\Phi(\nu) > 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\} \qquad (1)$$

по всевозможным Φ при условиях: 1) $c \geq 0$; 2) H, Φ, S — неотрицательные четные функции на всей оси; 3) S, H — непрерывные в нуле;4) $S(0) \geq S(\nu)$; 5) $S(0) < \infty$; 6) $H(0) = \Phi(0) = 1$. Здесь $H = \left|\tilde{h}\right|^2$, $\Phi = \left|\tilde{\varphi}\right|^2$ — квадраты ЧКХ искажающего и корректирующего фильтров соответственно; $\tilde{h}$, $\tilde{\varphi}$ — оптическая передаточная функция (ОПФ) искажающего и корректирующего фильтров соответственно; $c = [M_{\text{пор}}/(k_0B)]^2$; B — яркость фона входного изображения; S — спектральная плотность шума.

Прежде чем перейти к решению задачи, введем ряд вспомогательных обозначений и замечаний: $P_Q = \{\bar{\nu} \geq 0 | Q(\nu) > 0,\ 0 \leq \nu \leq \bar{\nu}\}$; A_Φ — множество в фигурных скобках в правой части (1);

$D = \left\{\Phi \middle| c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu \le 1\right\}$; $\eta(\bar{\nu}) = 2c\int\limits_0^{\bar{\nu}} \frac{S(\nu)}{H(\nu)}d\nu$; $\bar{B} = \{\bar{\nu} \ge 0 | \eta(\bar{\nu}) \le 1\}$; $\varnothing$ — пустое множество.

Очевидно, что множества A_Φ, P_Q выпуклы для $\forall\Phi$, Q, а из условий 1 и 2 следует, что и множество $\bar{B}$ выпукло. Поэтому $\forall A \in \{\bar{B}, P_Q, A_\Phi | Q, \Phi$ — любые$\}$ выпукло (если непусто, то состоит из неотрицательных чисел) и согласно [12, 13] может быть только одним из множеств вида

$$A = [0, p] \text{ либо } A = [0, q),$$

где p, q — некоторые неотрицательные числа (возможно бесконечные).

Если $A = \varnothing$, $\Rightarrow q = 0$. Если же А $\ne \varnothing$, то очевидно, что

$$A = [0, a] \text{ либо } A = [0, a), \; a = \mu(A) = \sup(A).$$

Из вышеизложенного и условий 3 и 6 $\Rightarrow P_H \ne \varnothing$ и $\alpha = \mu(P_H) = \sup(P_H) > 0$. Легко видеть, что $R(\Phi) \le \mu(P_{H\Phi}) \le \mu(P_H)$, $\mu(P_\Phi)$. Из условий 1—6 $\Rightarrow D \ne \varnothing$. Из условий 3, 5, 6 $\Rightarrow S/H$ непрерывна в некоторой замкнутой окрестности нуля $W(0) \Rightarrow \eta$ непрерывна на $W(0)$ и $\eta(0) = 0 \Rightarrow \bar{B} \ne \varnothing$ и согласно [14] $\exists!\ 0 < \bar{\nu} \in W(0)$ такое, что $\eta(\bar{\nu}) \le 1 \Rightarrow \beta = \mu(\bar{B}) = \sup(\bar{B}) > 0$.

Перейдем к решению задачи.

Случай 1. $S = 0$ почти всюду (п. в.). Тогда $S\Phi = 0$ п. в. для $\forall\Phi$. Отсюда по следствию из известной теоремы [12]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu = 0 \text{ для } \forall\Phi \Rightarrow R(\Phi) = \mu(P_{H\Phi}).$$

Откуда получаем, что $R_{\max} = \alpha$ и достигается на $\forall\Phi$, для которой $\mu(P_\Phi) \ge \alpha$, иными словами, на $\forall\Phi$, которая на множестве $(-\alpha, \alpha)$ положительна, а вне его произвольна, и $\Phi(0) = 1$.

Случай 2. $S \ne 0$ п. в.

Случай 2.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu = 0$. Тогда из условия 2 и согласно известной теореме [15] $S\Phi = 0$ п. в. Поскольку $S \ne 0$ п. в. согласно условиям 2, 4 будем иметь $S(0) > 0$. А из условия 3 следует, что существует окрестность нуля $\Omega(0)$, на которой $S > 0$. Отсюда получаем $\Phi = 0$ п. в. на $\Omega(0) \Rightarrow \mu(P_\Phi) = 0 \Rightarrow R(\Phi) = 0$.

Случай 2.2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu > 0$. Из условия 6 вытекает, что если $c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu > 1$, то $R(\Phi) = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае 2 максимум функционала (1) может достигаться только на $\Phi \in D$. Из условия 6 и свойства множества D следует, что $A_\Phi \ne \varnothing$ для $\forall\Phi \in D \Rightarrow R(\Phi) = \mu(A_\Phi) = \sup(A_\Phi)$.

Пусть теперь $\Phi \in D$, $\bar{\nu} \in A_\Phi$ выбраны произвольно. Для $\forall\,\bar{\nu} \in A$ согласно определению этого множества выполняется неравенство

$$H(\nu)\Phi(\nu) \geqslant c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}. \tag{2}$$

Из свойства монотонности определенного интеграла и условия 2 повторным использованием (2) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu \geqslant 2c\int\limits_0^{\bar{\nu}} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu \geqslant \eta(\bar{\nu})\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu.$$

Отсюда, с учетом условия 1 и вышеизложенного следует, что для $\forall\,\bar{\nu} \in A_\Phi$, $\forall\Phi \in D$ выполняется неравенство $\eta(\bar{\nu}) \le 1 \Rightarrow A_\Phi \subset \bar{B}$ для $\forall\Phi \in D \Rightarrow R(\Phi) \le \beta$ для $\forall\Phi \in D \Rightarrow R_{\max} \le \beta$.

С другой стороны, $R_{\max} \le \alpha$. Отсюда окончательно получаем $R_{\max} \le \gamma = \min(\alpha, \beta)$. Покажем теперь, что $R_{\max} = \gamma$ и достигается на функции

$$\Phi_{\text{opt}}(\nu) = \begin{cases} 1/H(\nu), & |\nu| < \gamma; \\ 0, & |\nu| \geqslant \gamma. \end{cases} \tag{3}$$

Для этого, очевидно, достаточно показать, что

$$2c\int\limits_0^{\gamma} S(\nu)\Phi_{\text{opt}}(\nu)d\nu \leqslant 1.$$

Из (3), условий 1, 2, 4—6 следует, что функция

$$\xi(\bar{\nu}) = 2c\int_0^{\bar{\nu}} S(\nu)\,\Phi_{\mathrm{opt}}(\nu)\,d\nu$$

всюду непрерывна, монотонно возрастает и совпадает с функцией η, по крайней мере, на множестве $[0, \gamma) \subset \bar{B}$. Поэтому

$$\sup_{0<\nu<\gamma} \xi(\nu) = \sup_{0<\nu<\gamma} \eta(\nu) \leqslant \sup_{\nu\in\bar{B}} \eta(\nu) \leqslant 1. \qquad (4)$$

Из того, что ξ всюду непрерывна и монотонно возрастает, следует [12]

$$\sup_{0<\nu<\gamma} \xi(\nu) = \xi(\gamma). \qquad (5)$$

Объединяя (4) и (5) воедино, получим требуемое.

Результаты решения задачи

Таким образом, при ограничениях достаточно общего характера теоретически предельно достижимое значение РС линейных ИС равно

$$R_{\max} = \min\ (\alpha,\ \beta) \qquad (6)$$

и достигается при

$$|\tilde{\varphi}_{\mathrm{opt}}(\nu)| = \begin{cases} \dfrac{1}{|\tilde{h}(\nu)|}, & |\nu| < R_{\max}; \\ 0, & |\nu| \geqslant R_{\max}, \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$\alpha = \sup\{\bar{\nu} \geqslant 0 \,|\, |\tilde{h}(\nu)| > 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\};$$

$$\beta = \sup\left\{\bar{\nu} \geqslant 0 \,\middle|\, 2c\int_0^{\bar{\nu}} \frac{S(\nu)}{|\tilde{h}(\nu)|^2}\,d\nu \leqslant 1\right\}. \qquad (8)$$

Заметим, что величина α для непрерывной ОПФ $\tilde{h}$ представляет собой ее первый положительный нуль, а «sup» в приведенных выражениях для α и β может быть заменен на «μ».

Обсуждение результатов

Выражение (7) для ОПФ оптимального, по РС, корректирующего фильтра с точностью до параметра $R_{\max}$ совпадает с приведенным в [17] выражением для ОПФ инверсного фильтра, используемого для реконструкции оптических изображений. Разница состоит в том, что в настоящей работе $R_{\max}$ выбирается из условия максимума РС системы в смысле Фуко и аналитически рассчитывается по формулам (6), (8), в то время как в: работе [17] данный параметр выбирается из условия минимума средней квадратической погрешности реконструкции исходного изображения и аналитически определяется как решение уравнения [17]

$$|\tilde{h}(\nu)|^2 = \frac{S(\nu)}{S_0(\nu)} \qquad (9)$$

относительно ν, где S_0 — спектральная плотность исходного изображения.

Нетрудно увидеть, что в (6), (8), с одной стороны, и в (9), с другой — используется различная по характеру априорная информация об исходном изображении. В первом случае это контраст k_0 и яркость фона B, а во втором — спектральная плотность S_0 исходного изображения.

Полученные в настоящей работе результаты (6)—(8) могут быть, в частности, применимы для фильтрации сигналов в сканирующих оптических системах, работающих в турбулентной атмосфере в условиях случайной рефракции, если в соответствии с [1, 16, 18] принять

$$\widetilde{\Psi}_{opt}(\omega) = \widetilde{\varphi}_{opt}(\omega/v)$$

— передаточная функция временного фильтра; v — скорость сканирования изображения (для самолетных лидаров — скорость движения самолета); ω — временная частота;

$$\widetilde{h}(\nu) = L(\nu, 0),$$

где $L(\nu_x, \nu_y)$ — произведение ОПФ турбулентной атмосферы на ОПФ приемной апертуры оптической системы; ν_x, ν_y — пространственная частота по направлению сканирования изображения (направлению движения самолета) и соответственно перпендикулярном ему направлении;

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu, \nu_y)\, d\nu_y,$$

где F — спектральная плотность флуктуации показателя преломления среды (воздуха) — количественная модель случайной рефракции.

1. Вычислительная оптика /М.М. Русинов, А.П. Грамматик, П.Д. Иванов и др. /Под общ. ред. М.М. Русинова. Л: Машиностроение. Ленингр. отд. 1984. 423 с.
2. Вендровский К.В., Вейцман А.Ч. Фотографическая структурометрия. М.: Искусство, 1982. 270 с.
3. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979. 312 с.
4. Фивенский Ю.И. Методы повышения качества аэрокосмических фотоснимков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977. 158 с.
5. Вайнберг Э.И., Файнгойз М.Л. О повышении пространственного разрешения рентгеновской вычислительной томографии //ДАН СССР. .1986. Т. 286. № 4. С. 875—878.
6. Ершов А.В., Михеев П.А. Повышение разрешающей способности волоконно-оптических систем наблюдения методом сканирования входного изображения// ОМП. 1987. № 10. С. 2—5.
7. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Кн. 2. 480 с.
8. Henkelman R.M., Preis B.R. A Noniform Detector Aperture For C. T. //J. Comput. Assist. Tomogr. 1981. V. 5. № 3. P. 401—408.
9. Santis P., Gori F., Guattari G., Palma C. Emulation of superresolving pupils through image postprocessing //Opt. Commun. 1986. 60. № 1—2. P. 13—17.
10. Удод В.А. //'Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 2. С. 154—159.
11. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий: В 2-х кн. Кн. 1/Под ред. В.В. Клюева. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1986. 488 с.
12. Рудин У. Основы математического анализа/Пер. с англ. Хавина В.П. М.: Мир, 1966. 320 с.
13. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 832 с.
15. Колмогоров А.П., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 361 с.
16. Зуев В.Е., Кабанов М.В. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере (в условиях помех). М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
17. Обработка изображений и цифровая фильтрация/Под ред. Т. Хуанга: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 320 с.
18. Смирнов А.Я., Меньшиков Г.Г. Сканирующие приборы. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд. 1986. 145 с.

НИИ интроскопии при ТПИ,
Томск

Поступила в редакцию
8 февраля 1991 г.

V.I. Solodushkin, V.A Udod. **One-Dimensional Filtering of Images Providing Optimal Resolution.**

The problem of image optimum filtering according to the criterion of the maximum resolution has been solved for a one-dimensional case. The applicability of the obtained solution to improve the observed object images is shown for an optical system operating through the turbulent atmosphere under the conditions of random refraction.