

Расчет изгиба круглой тонкой пластины с заземленным краем

Д.А. Маракасов, Д.С. Рычков*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 6.04.2012 г.

Рассмотрена задача расчета прогиба зеркала при произвольном воздействии. Получено строгое решение статической задачи для круглой пластины с заземленным краем. Проведен анализ влияния положения точки воздействия на параметры отклика пластины.

Ключевые слова: адаптивная оптика, гибкое зеркало, механика сплошной среды, функция Грина; adaptive optics, deformable mirror, application of continuum mechanics, Green function.

Введение

Адаптивные зеркала используются для компенсации аберраций в различных оптических системах, например для оптимизации параметров излучения, управления выходной мощностью [1–6]. Очевидно, основными задачами адаптивной атмосферной оптики являются поиск взаимосвязей между флуктуациями характеристик атмосферы и искажениями волнового фронта и компенсация последних при помощи управляемых элементов оптической системы [6, 7]. Использование гибких зеркал в составе адаптивных оптических устройств требует проведения первоначальных численных исследований, в том числе откликов гибкого зеркала для оценки погрешности, вносимой им в контур управления, что определяется конструкцией корректора, числом и расположением исполняющих приводов [3, 4, 7–13]. В частности, такие численные модели деформируемых зеркал требуются при анализе эффективности работы систем компенсации начальных искажений волнового фронта частично когерентных пучков, замыкаемых по сигналу обратного атмосферного рассеяния [14–19].

Рассмотрим модели зеркал, построенные на основе методики, изложенной в работах [1, 4, 8, 10], где полагалось, что зеркало, форма поверхности которого задается системой дискретных актюаторов, может быть представлено как тонкая пластина, деформируемая силами, приложенными в определенных точках. Модель пластины была выполнена с использованием метода конечных элементов [20–22], который при большом количестве актюаторов приводит к трудоемким вычислениям обратной матрицы жесткости, задающей отклик тонкой пластины на точечные воздействия. Например, в работе [23] рассмотрена за-

дача расчета отклика круглого зеркала с несколькими сотнями приводов, когда обратная матрица жесткости имеет размер 100×100 . Анализ этой статьи и других работ [3, 8, 9, 11–13] показывает, что обычно вместо сложносоставного зеркала рассматривается именно круглое сплошное зеркало, для расчета деформаций которого использование метода конечных элементов, по всей видимости, является излишним в силу простых граничных условий [1, 23]. В настоящей статье представлено решение такой задачи методом функции Грина и дан анализ влияния положения точки воздействия на параметры и форму функции отклика.

1. Функция Грина круглой пластины с заземленным краем

При малых смещениях можно рассматривать задачу определения отклика тонкой круглой пластины на единичное точечное воздействие в статике, тогда решение задачи, которая формально сводится к бигармоническому уравнению [21, 22]:

$$\Delta^2 F(\mathbf{r}) = D^{-1}f(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ — координаты в плоскости пластины;

$$\Delta^2 = \nabla^4, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y; \quad D = Eh^3 / (12(1 - \sigma^2))$$

— цилиндрическая жесткость; σ — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; h — толщина пластины; $F(\mathbf{r})$ — функция поверхности зеркала; $f(\mathbf{r})$ — поперечная распределенная нагрузка [22], можно найти, используя метод функции Грина.

Поиск прогиба пластины начнем с того, что рассмотрим решение уравнения (1) при воздействии в правой части одного точечного источника, в виде

* Дмитрий Анатольевич Маракасов (mda@iao.ru); Дмитрий Сергеевич Рычков (dsr@iao.ru).

дельта-функции. Без ограничения общности можно считать, что источник расположен в начале координат:

$$\Delta^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Удобно перейти к системе уравнений второго порядка, последовательно решая которые, найдем функцию Грина для (2):

$$\Delta G(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \Delta g(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Функция Грина для второго уравнения в (3) имеет вид

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad (4)$$

($r_0 = \text{const}$ — вещественная константа). Тогда первое уравнение в системе (3) имеет решение в виде интеграла

$$G(\mathbf{r}) = \int_{S_0} d\mathbf{r}' g(\mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = (r, \varphi)$, $\mathbf{r}' = (r', \varphi') \in S_0$ — координаты точек наблюдения и источника в полярной системе координат; S_0 — поверхность интегрирования. Интегрирование (5) по кругу S_0 достаточно большого радиуса с подстановкой (4) дает нам функцию Грина уравнения (2):

$$G(\mathbf{r}) = C_1 + C_2 r^2 + \frac{r^2}{8\pi} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (6)$$

Здесь C_1, C_2 — некоторые константы. Имея в виду, что $\Delta^2(C_1 + C_2 r^2) \equiv 0$, положим в (6) $C_{1,2} = 0$.

Обращая внимание на конструкции деформируемых зеркал [9, 11–13], можно заключить, что наиболее подходящими граничными условиями задачи статического изгиба тонкой гибкой пластины являются условия заземленного края. Переход к круглой пластине радиуса R_0 с произвольно расположенным на ее поверхности точечным источником определяется системой с граничными условиями на окружности:

$$\Delta^2 W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r=R_0} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0.$$

Решение $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ уравнения (7) будем искать с использованием функции Грина (6) в виде суммы функций:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + w(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (8)$$

первое слагаемое есть решение (6) с произвольным положением точки воздействия, второе и третье отвечают за вклад в отклик реакции опоры (край зеркала не смещается). Для разности $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ на краю зеркала выполняется первое граничное условие (7):

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad r = R_0, \quad (9)$$

а функция $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$\Delta^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad r < R_0, \quad r' \leq R_0, \quad (10)$$

т.е.

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{8\pi} \ln \frac{r' \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}{R_0 r_0}, \quad \mathbf{r}_s = (R_0^2/r', \varphi'). \quad (11)$$

Здесь \mathbf{r}_s — радиус-вектор отображения точки \mathbf{r}' источника внутри зеркала ($|\mathbf{r}'| \leq R_0$) на область $r > R_0$. Третье слагаемое в (8) удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta^2 w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (12)$$

с граничными условиями, согласно (7):

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r=R_0} = 0,$$

$$\frac{\partial w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = -\frac{\partial}{\partial r} (G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \frac{R_0^2 - r'^2}{R_0}. \quad (13)$$

Из (12), (13) очевидно, что функция $w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ не зависит от полярных углов векторов \mathbf{r}, \mathbf{r}' . С учетом этого решение системы уравнений (12), (13) симметрично относительно этих векторов:

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{16\pi} \frac{(R_0^2 - r^2)(R_0^2 - r'^2)}{R_0^2}. \quad (14)$$

Собирая найденные слагаемые (6), (11), (14), получим искомого решение $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ уравнения (7), которое удобно представить в нормированном на коэффициент $W_0 = R_0^2/(16\pi)$ виде:

$$\frac{W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{W_0} = (1 - \rho^2)(1 - \rho'^2) + 2|\rho - \rho'|^2 \ln \frac{|\rho - \rho'|}{\rho'|\rho - \rho_s|}, \quad (15)$$

где $\rho = \mathbf{r}/R_0$, $\rho' = \mathbf{r}'/R_0$, $\rho_s = \mathbf{r}_s/R_0$. Отметим, что в частном случае центральной нагрузки ($\rho' = 0$) полученное решение совпадает с известным выражением [24].

Важно отметить асимметричную форму отклика при смещении точки воздействия от центра зеркала, а также ее зависимость от угла между векторами точки источника ρ' и точки наблюдения ρ , т.е. от $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$. Для анализа прогиба зеркала под действием точечного источника удобно выбрать систему координат таким образом, чтобы $\varphi' = 0$, а положение точки наблюдения характеризовать полярным углом $\psi = \begin{cases} \varphi, & 0 \leq \varphi < \pi \\ \varphi - \pi, & \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ и величиной $\xi = \rho \cdot \mathbf{e}_\psi$,

где $\mathbf{e}_\psi = \mathbf{e}_x \cos \psi + \mathbf{e}_y \sin \psi$ — единичный вектор, ориентированный под углом ψ к оси x .

Рассмотрим подробнее форму отклика при различных условиях. На рис. 1–3 приведены примеры нормированных на величину W_0 откликов (15) при

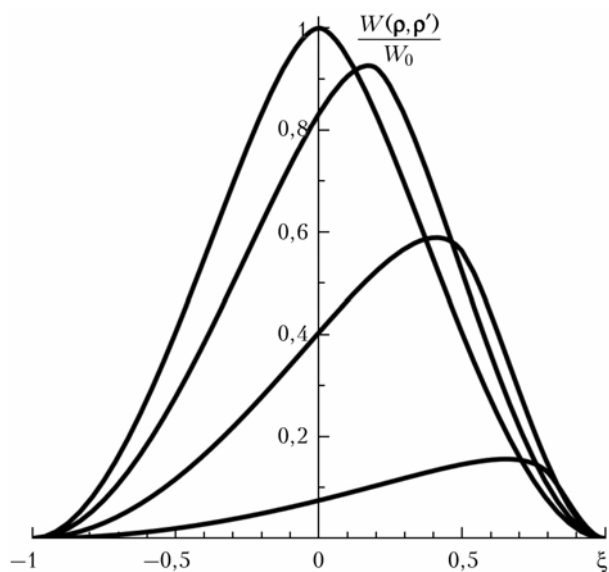


Рис. 1. Нормированный прогиб пластины $W(\rho, \rho')/W_0$ при различных положениях $\rho' = 0; 0,2; 0,5; 0,8$ актюаторов в сечении $\psi = 0$

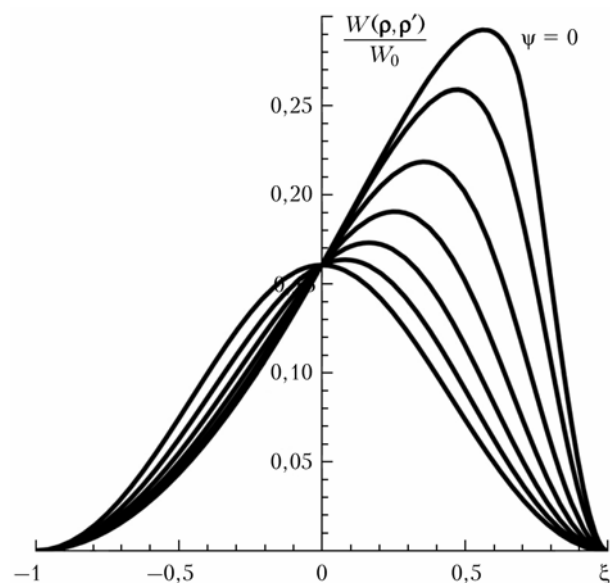


Рис. 3. Нормированный отклик пластины для $\rho' = 0,7$ и при различных углах $\psi = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12, \pi/2$

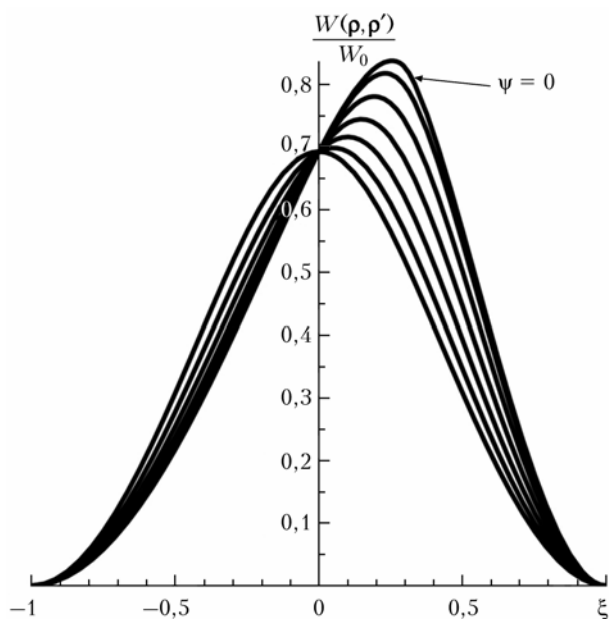


Рис. 2. Нормированный отклик пластины для $\rho' = 0,3$ и при различных углах $\psi = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12, \pi/2$

различной величине смещения актюатора ρ' из центра пластины в сечении $\psi = 0$ (рис. 1), и их трансформация при переходе к сечениям с другими значениями ψ (рис. 2 и 3).

Видно, что при центральном положении точки источника отклик пластины имеет симметричную форму, однако при смещении точки источника к краю форма отклика становится все более асимметричной. Максимум $\max(W(\rho, \rho'))$ функции отклика достигается при центральном положении точки источника ρ' , что очевидно в силу наибольшего расстояния точки воздействия от зажатого края пластины (рис. 4).

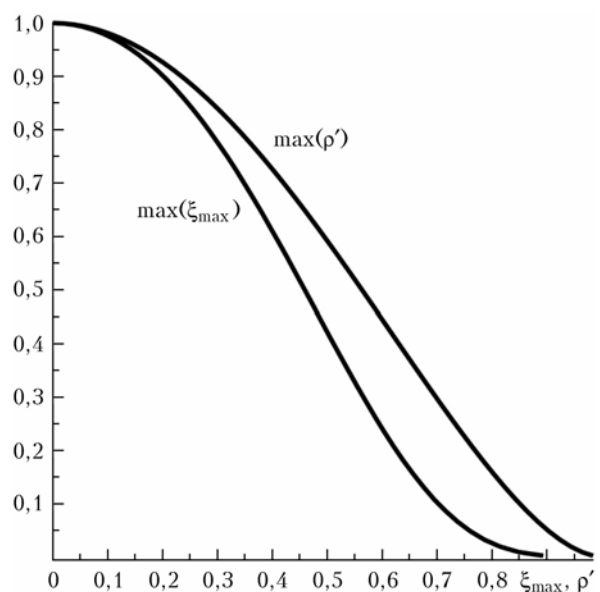


Рис. 4. Максимальная амплитуда отклика $W(\rho, \rho')/W_0$ в зависимости от положения точки приложения силы $\max(\rho') = \max(W(\rho, \rho')/W_0)$ в сечении $\psi = 0$. Линия $\max(\xi_{\max}) : \{\xi_{\max}(\rho'), \max(\rho')\}$ показывает отставание точки максимума от точки приложения силы

При этом положение $\xi_{\max}(\rho')$ максимума функции отклика отстает от точки ρ' приложения силы, находясь всегда левее нее, $\Delta\xi(\rho') = \rho' - \xi_{\max}(\rho') \geq 0$ (рис. 4, 5).

Также изменяется ширина отклика, $d(\rho')$, определенная по уровню $e^{-1} \max(W(\rho, \rho'))$. Сначала она увеличивается при смещении точки источника ρ' от центра и затем быстро уменьшается с приближением к краю зеркала (рис. 6).

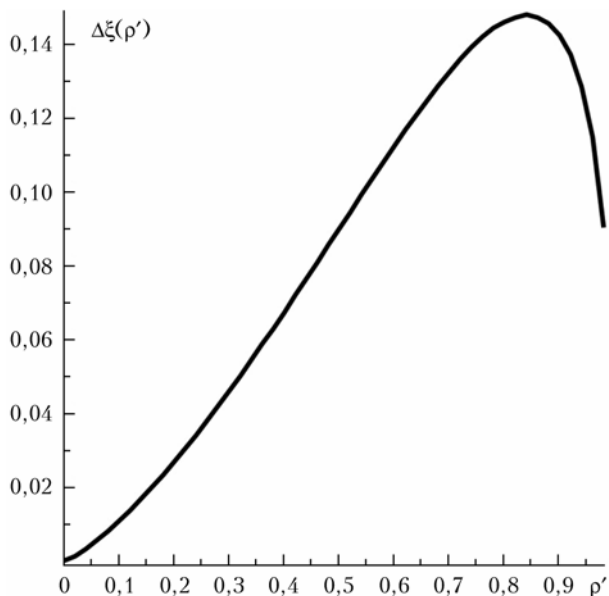


Рис. 5. Смещение $\Delta\xi = \rho' - \xi_{\max}(\rho')$ положения максимума при изменении положения ρ' актюатора при условии $\psi = 0$

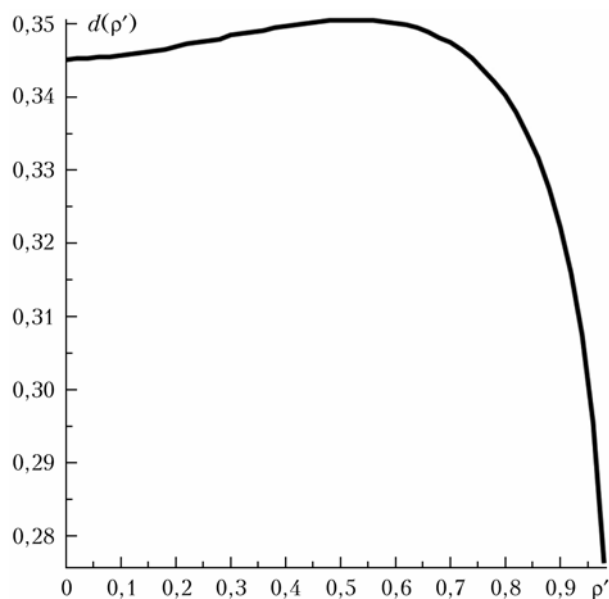


Рис. 6. Зависимость ширины отклика $d(\rho')$ от положения ρ' актюатора в сечении $\psi = 0$

2. Расчет отклика гибкого зеркала

Чтобы использовать решение (15) для определения отклика гибкого зеркала из материала с известными параметрами (коэффициент D) и заданными положениями N актюаторов, преобразуем уравнение (1) к виду

$$\Delta^2 F(\mathbf{r}) = D^{-1} \sum_{j=1}^N U_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (16)$$

где U_j — амплитуда воздействия (величина, пропорциональная напряжению (силам) на актюаторе). Решение уравнения (16) представляет собой сумму

решений вида (15) с известными весовыми коэффициентами:

$$F(\mathbf{r}) = D^{-1} \sum_{j=1}^N W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) U_j. \quad (17)$$

Таким образом, функция (17) представляет собой статическую модель прогиба тонкой круглой пластины с защемленным краем.

Поскольку во многих практических случаях корректор волнового фронта представляет собой круглое зеркало, деформируемое при помощи дискретного набора актюаторов (точечных или распределенных), использование полученных выше результатов в численном моделировании может существенно упростить расчеты при использовании некоторых современных адаптивных алгоритмов [4, 8–10, 23]. Также важно отметить, что, имея в распоряжении аналитическое решение (17) уравнения (1) для тонкой пластины, становится возможным перейти от набора действующих на пластину сил к распределенной нагрузке. Это может быть полезным в задачах моделирования работы гибких зеркал с пьезоэлементами [9, 11–13].

Выше рассмотрена задача вычисления отклика зеркала по заданным «напряжениям» в точках приложения силы. Если заданы положения \mathbf{r}_j актюаторов и смещения поверхности F_j в этих точках (значения фазы в точках приложения силы можно считать пропорциональными смещениям поверхности), то, построив матрицу реакций \mathbf{M} с элементами $M_{k,j} = W(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j)$ на воздействия с единичной амплитудой в соответствии с формулой (15), легко найти вектор сил \mathbf{U} для уравнения (17):

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad (18)$$

где \mathbf{F} — вектор смещений поверхности в точках актюаторов. Следует обратить внимание на то, что вычисление обратной матрицы \mathbf{M}^{-1} представляет собой не столь трудоемкую задачу, как, например, в [23], поскольку количество элементов в матрице \mathbf{M} определяется только количеством актюаторов, которое заметно меньше, чем число элементов в разбиении поверхности, определяющее размер матрицы жесткости.

Заключение

В настоящей статье построена функция Грина плоского круглого зеркала с защемленным краем. Показано, что имеются существенные вариации как амплитуды, так и формы откликов в зависимости от точки приложения внешнего воздействия. Асимметрия откликов позволяет говорить о возможном ухудшении качества компенсации искажений фазы вблизи края зеркала при работе в составе адаптивной оптической системы.

Предложенная схема расчета поверхности зеркала, возмущаемой набором точечных актюаторов, либо распределенной нагрузкой, выгодно отличается от применяющихся при расчете адаптивных систем с круглыми зеркалами способов на основе числен-

ного моделирования методом конечных элементов. Схема позволяет без громоздких и требующих значительных затрат времени и вычислительных ресурсов матричных операций (расчет обратной матрицы жесткости и т.д.) найти отклик зеркала на воздействие актюатора с любой требуемой точностью и разрешением. Также существенно упрощается расчет поверхности при распределенной нагрузке.

Авторы выражают признательность В.А. Бануху за предоставленную возможность ознакомиться с работой [19] до ее опубликования.

1. Канев Ф.Ю., Чесноков С.С. Упругое зеркало в задаче компенсации стационарного теплового самовоздействия // Оптика атмосф. 1989. Т. 2, № 3. С. 302–307.
2. Икрамов А.В., Роцупкин И.М., Сафронов А.Г. Охлаждаемые биморфные зеркала адаптивные зеркала для лазерной оптики // Квант. электрон. 1994. Т. 21, № 7. С. 665–669.
3. Икрамов А.В., Роцупкин И.М., Сафронов А.Г. Крупногабаритное биморфное адаптивное зеркало: расчет эффективности применения // Оптика атмосф. и океана. 1993. Т. 6, № 9. С. 1115–1123.
4. Канев Ф.Ю., Лукин В.П., Ершов А.В. Динамическое адаптивное зеркало в алгоритме фазового сопряжения // Тезисы докл. II Межреспубл. симпози. «Оптика атмосферы и океана». Томск, 1995. С. 377–378.
5. Агафонов В.В., Сафронов А.Г. Управляемый объектив с деформируемыми зеркалами // Квант. электрон. 2004. Т. 34, № 3. С. 272–276.
6. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
7. Лукин В.П., Фортес Б.В. Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере // Под общ. ред. Г.Г. Матвиенко. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 214 с.
8. Канев Ф.Ю., Лукин В.П., Лавринова Л.Н. Зависимость качества воспроизведения адаптивным зеркалом заданной фазовой поверхности от числа сервоприводов и конфигурации их размещения // Оптика атмосф. и океана. 1993. Т. 6, № 12. С. 962–969.
9. Икрамов А.В., Роцупкин И.М., Сафронов А.Г. Крупногабаритное биморфное адаптивное зеркало: компьютерное моделирование конструкции // Оптика атмосф. и океана. 1994. Т. 7, № 1. С. 43–50.
10. Kanev F.Yu., Lukin V.P., Lavrinova L.N. Four-dimensional computer dynamic model of atmospheric optical system «Atmospheric propagation and remote sensing III»: Proc. of the conference. Orlando, USA, 1994. P. 57–58.
11. Beresnev L.A. Wavefront correctors based on semi-passive bimorph elements for adaptive optics application; new designs // Proc. SPIE. V. 6708. Atmos. Optics: Models, Measurements and Target-in-the-Loop Propagation / Ed. by S.M. Hammel, J. van Eijk, M.T. Valley, M.A. Vorontsov, 2007. 67080S.
12. Verpoort S., Wittrock U. Actuator patterns for unimorph and bimorph deformable mirrors // Appl. Opt. 2010. V. 49, N 31. P. G37–G46.
13. Odlund E., Raynaud H.-F., Kulcsar C., Harms F., Levecq X., Martins F., Chateau N., Podoleanu A.Gh. Control of an electromagnetic deformable mirror using high speed dynamics characterization and identification // Appl. Opt. 2010. V. 49, N 31. P. G120–G128.
14. Банух В.А., Жмылевский В.В., Игнатьев А.Б., Морозов В.В., Смалихо И.Н. Компенсация искажений волнового фронта частично когерентного лазерного пучка по обратному атмосферному рассеянию // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 7. С. 549–554.
15. Сазанович В.М., Цык Р.Ш., Шестернин А.Н. Управление положением лазерного пучка по обратному аэрозольному рассеянию. Модельный эксперимент // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 12. С. 1056–1060.
16. Смалихо И.Н. Флуктуации мощности эхосигнала импульсного когерентного лидара, вызываемые атмосферной турбулентностью // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 9. С. 799–804.
17. Банух В.А., Смалихо И.Н. Определение оптической турбулентности по обратному атмосферному рассеянию лазерного излучения // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 4. С. 300–307.
18. Смалихо И.Н. Расчет коэффициента усиления обратного рассеяния лазерного излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, с использованием численного моделирования // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 28, № 9. С. 796–800.
19. Банух В.А. Усиление средней мощности рассеянного в атмосфере излучения в режиме сильной оптической турбулентности // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 10. С. 857–862.
20. Кандидов В.П., Чесноков С.С., Выслоух В.А. Метод конечных элементов в задачах механики. М.: Изд-во МГУ, 1976. 178 с.
21. Огибалов П.М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. М.: Изд-во МГУ, 1958. 168 с.
22. Огден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
23. Канев Ф.Ю., Рычков Д.С. Анализ компенсации искажений по сигналу обратного рассеяния, проводимый с учетом ограничений, вносимых адаптивным зеркалом // Изв. Том. политехн. ун-та. 2009. Т. 315, № 4. С. 90–95.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

D.A. Marakasov, D.S. Rychkov. Modeling of deformation of jammed-edge thin circular plate.

The problem of modeling a deformable mirror with arbitrary distribution of the actuating force is considered. The strict solution of the problem of deformation of the jammed edge thin circular plate is obtained. The behavior of the mirror response as a function of point force position is analyzed.