«Оптика атмосферы», т. 4, № 10 (1991)

УДК 551.521.535.31:535.36

Т.А. Сушкевич

ОПТИЧЕСКИЙ ПЕРЕДАТОЧНЫЙ ОПЕРАТОР СИСТЕМЫ АТМОСФЕРА—НЕОРТОТРОПНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Метод пространственно-частотных характеристик и функций влияния развит для решения задач переноса излучения в системе атмосфера—неортотропная поверхность. Построен оптический передаточный оператор, ядром которого являются линейные функции влияния и пространственно-частотные характеристики.

В проблемах экологического исследования и контроля состояния окружающей среды особый интерес представляют задачи дистанционного зондирования, в том числе из космоса, параметров системы атмосфера—подстилающая поверхность (суша, водоем, облака).

В данной статье сформулированы математические модели, позволяющие достаточно детально изучать процессы формирования полей излучения в системе атмосфера—неортотропная поверхность (САНП) и как частный случай в системе атмосфера—ламбертовская поверхность (САЛП) на основе вычислительных экспериментов. Метод пространственно-частотных характеристик (ПЧХ) и функций влияния (ФВ) обобщен и развит применительно к задачам с неортотропными однородными и неоднородными границами [1—3].

В основе математического аппарата построения моделей ПЧХ и ФВ лежат ряды теорий возмущений и теория обобщенных решений кинетических уравнений [1; 4—6]. Полное решение задачи с учетом нелинейных приближений по кратности переотражения от поверхности сводится к нахождению фундаментального решения линеаризованной задачи и вычислению нелинейных функционалов, ядром которых являются соответствующие ПЧХ или ФВ. В итоге устанавливается явная связь между измеряемыми радиационными характеристиками и параметрами зондируемой поверхности, которая определяет оптический передаточный оператор (ОПО) системы.

Постановка задач

Распространение солнечного излучения в системе атмосфера—поверхность (САП) описывается двумя классами задач:

1) задачей с ламбертовской границей, когда суша описывается как изотропно отражающая подложка (САЛП);

2) задачей с неортотропной границей, когда суша или поверхность океана описываются как анизотропно отражающая подложка (САНП).

Направление распространения излучения определяется вектором $\mathbf{s} = \{\mu, \varphi\}$, $\mu = \cos\vartheta$, $\mu \in [-1, 1]$ на единичной сфере $\Omega = [-1, 1]\times[0, 2\pi]$, где $\vartheta \in [0, 180°]$ — зенитный угол, отсчитываемый от положительного направления оси z, $\varphi \in [0, 2\pi]$ — азимут. Значение $\varphi = 0$ предполагается в плоскости солнечного вертикала, т. е. солнечный поток падает на границу слоя $z = 0$ в направлении $s_0 = \{\mu_0, \varphi_0\}$ с зенитным углом $\vartheta_0 \in [0, 90°]$, $\mu_0 = \cos\vartheta_0$, и азимутом $\varphi_0 = 0$. Для нисходящего, пропущенного излучения вводится полусфера направлений $\Omega^+ = \{(\mu, \varphi)\colon \mu > 0\}$, а для восходящего, отраженного излучения — полусфера $\Omega^- = ((\mu, \varphi);\ \mu < 0\}$; $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Для наглядности иногда ставятся метки «+» и «—» у функций, заданных на полусферах Ω^+ и Ω^- соответственно.

Пространственные координаты в плоском слое описываются радиусом-вектором $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$. В горизонтальной плоскости $r_\perp = \{x, y\}$.Проекция вектора направления $\mathbf{s}$ на горизонтальную плоскость $s_\perp = \{\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi\}$, при этом азимут φ отсчитывается от положительного направления оси x.

Граничные условия записываем с помощью следующих множеств:

$$\Gamma_0 = \{(r, s) : z = 0,\ s \in \Omega^+\};\ \Gamma_H = \{(r, s) : z = H,\ s \in \Omega^-\};$$

На нижней границе системы ($z = H$) закон отражения задается оператором

$$\hat{R}\Phi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega^+} \Phi(r_\perp,\ z = H,\ s')\,\mu' ds'$$

при ламбертовской, ортотропной поверхности или оператором при неортотропной (например френелевской) поверхности.

Оптические свойства атмосферы описываются высотными распределениями коэффициентов экстинкции $\sigma_t(z) = \sigma_s(z) + \sigma_{abs}(z)$, поглощения $\sigma_{abs}(z)$, суммарного рассеяния $\sigma_s(z) = \sigma_a(z) + \sigma_m(z)$, включающих аэрозольную $\sigma_a(z)$ и молекулярную $\sigma_m(z)$ компоненты, а также суммарной индикатрисой рассеяния

$$\gamma(z, \chi) = \frac{\sigma_a(z)}{\sigma_s(z)} \gamma_a(z, \chi) + \frac{\sigma_m(z)}{\sigma_s(z)} \gamma_m(\chi),$$

в общем случае содержащей аэрозольную $\gamma_a(z, \chi)$ и молекулярную $\gamma_m(\chi) = 3(1-\cos^2\chi)/(16\pi)$ составляющие.

Интегродифференциальный оператор кинетического уравнения $\hat{K} \equiv \hat{D} - \hat{S}$ содержит оператор переноса $\hat{D} \equiv (s, \mathrm{grad}) + \sigma_t(z)$ и интеграл столкновений $\hat{S}\Phi \equiv \sigma_s(z)\int\limits_{\Omega} \Phi\gamma ds'$.

В случае трехмерной плоской задачи (при наличии неоднородностей в горизонтальных плоскостях) оператор переноса

$$\hat{D} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_t(z).$$

В пространственно-одномерной плоской задаче (при горизонтальной однородности) оператор переноса $\hat{D}$ упрощается:

$$\hat{D}_z \equiv \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_t(z); \ \hat{K}_z \equiv \hat{D}_z - \hat{S}.$$

Интегральное преобразование Фурье по горизонтальным координатам вводим по правилу

$$F[\Phi](p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(r_\perp) \exp[i(p, r_\perp)]\, dr_\perp = \check{\Phi}(p),$$

помечая «галочкой» фурье-образы. Преобразование Фурье, примененное к трехмерному плоскому уравнению переноса, приводит к комплексному одномерному параметрическому уравнению переноса

$$F[\hat{K}\Phi](p) = \hat{L}(p)\check{\Phi}(z, p, s),$$

где

$$\hat{L}(p) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_t(z) - i(p, s_\perp) - \hat{S},$$

$$(p, s_\perp) = p_x \sin\vartheta \cos\varphi + p_y \sin\vartheta \sin\varphi,$$

$p = \{p_x, p_y\}$ — действительный параметр, пространственная частота.

Краевая задача для моделирования распространения солнечного излучения ($f_0 \equiv \pi S_\lambda \delta(s - s_0)$) в САП может быть записана в виде

$$\{\hat{K}\Phi = 0, \ \Phi|_{\Gamma_0} = f_0, \ \Phi|_{\Gamma_H} = q(r_\perp)\hat{R}_H\Phi \qquad (1)$$

с альбедо (или излучательной способностью)

а) $q = \mathrm{const}$, б) $q(r_\perp) \neq \mathrm{const}$.

Эту задачу можно обобщить на случай источников излучения, отличных от солнечного потока, вводя функции F, f_0, f_H:

$$\{\hat{K}\Phi = F(r, s), \ \Phi|_{\Gamma_0} = f_0(r_\perp, s), \ \Phi|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H\Phi + f_H(r_\perp, s). \qquad (2)$$

О разделении вкладов фона атмосферы и подсветки от поверхности

Воспользуемся линейными свойствами краевой задачи (2) относительно источников. Представим суммарное поле излучения в системе в виде суперпозиции $\Phi = \Phi^0 + \Phi_a + \Phi_{aR}$ компоненты которой удовлетворяют следующим задачам.

Прямое, ослабленное солнечное излучение Φ^0 находится из задачи

$$\{\hat{D}_z \Phi^0 = 0,\ \Phi^0|_{\Gamma_0} = [\pi S_\lambda\, \delta(s - s_0)],\ \Phi^0|_{\Gamma_H} = 0 \tag{3}$$

для слоя $z \in [0, H]$ и $\Phi^0 \neq 0$ только для $s = s_0$.

Фоновое излучение атмосферы Φ_a — решение задачи с нулевыми граничными условиями для слоя

$$\{\hat{K}_z \Phi_a = [\hat{S}\Phi^0],\ \Phi_a|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_a|_{\Gamma_H} = 0. \tag{4}$$

Излучение атмосферы, отраженное от границы раздела, — решение краевой задачи с источником на $z = H$

$$\{\hat{K}\Phi_{aR} = 0,\ \Phi_{aR}\,|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_{aR}\,|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H \Phi^+_{aR} + [\hat{R}_H (\Phi^0 + \Phi^+_a)], \tag{5}$$

которое можно детальнее искать в виде двух компонент $\Phi_{aR} = \Phi^0_{aR} + \Phi^g_{aR}$.

Компонента Φ^0_{aR} — вклад в дымку атмосферы, обусловленный рассеянием в слое прямого, ослабленного излучения, отраженного от границы, — решение задачи

$$\{\hat{K}\Phi^0_{aR} = 0,\ \Phi^0_{aR}\,|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi^0_{aR}\,|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H \Phi^0_{aR} + [\hat{R}_H \Phi^0]. \tag{6}$$

В результате рассеяния в атмосфере отраженной от границы диффузной составляющей дымки формируется компонента Φ^g_{aR} — решение задачи

$$\{\hat{K}\Phi^g_{aR} = 0,\ \Phi^g_{aR}\,|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi^g_{aR}\,|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H \Phi^g_{aR} + [\hat{R}_H \Phi^+_a]. \tag{7}$$

Уравнения для ПЧХ при неортотропной границе

В случае произвольной отражающей подложки вклад подсветки описывается краевой задачей с источником $E = \hat{R}_H \Phi^{(0)}$ — освещенностью, создаваемой излучением изолированного слоя интенсивности $\Phi^{(0)} = \Phi^0 + \Phi_a$.

Остановимся на задаче расчета подсветки Φ_q в горизонтально-однородной системе

$$\{\hat{K}\Phi_q = 0,\ \Phi_q\,|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_q\,|_{\Gamma_H} = q\,\hat{R}_H \Phi_q + qE.$$

Вводя параметрический ряд $\Phi_q = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k$, приходим к системе рекуррентных задач, отвечающих k-й кратности отражения от подложки ($k \geq 1$, $\Phi_0 = E$),

$$\{\hat{K}\Phi_k = 0,\ \Phi_k\,|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_k\,|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H \Phi_{k-1}. \tag{8}$$

Пусть $E = E(s)$, т. е. не зависит от координаты $r_\perp$. Тогда линейное приближение по вариациям альбедо $\check{\Phi}_1(z, p, s) = \check{q}(p) W_1(z, p, s)$ определяется через ПЧХ W_1 — решение задачи

$$\{\hat{L}(p)\, W_1 = 0,\ W_1\,|_{\Gamma_0} = 0,\ W_1\,|_{\Gamma_H} = E(s), \tag{9}$$

а нелинейные члены ряда находятся с помощью нелинейных ПЧХ $W_k(z, p_k, \ldots, p_1, s)$ — решений системы комплексных уравнений переноса

$$\{\hat{L}(p_k)\, W_k = 0,\ W_k\,|_{\Gamma_0} = 0,\ W_k\,|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H\, W_{k-1}(p_{k-1}, \ldots, p_1). \tag{10}$$

Подсветка вычисляется с помощью функционала

$$\Phi_q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \check{q}(p_1)\, \check{q}(p_2 - p_1) \ldots \check{q}(p_k - p_{k-1}) \times$$

$$\times\, W_k(z, p_k, \ldots, p_1, s) \exp[-i(p_k, r_\perp)]\, dp_k \ldots dp_1. \tag{11}$$

Если в альбедо выделяется составляющая $\bar{q} = \text{const}$, то подсветка делится на две компоненты:

$$\Phi_q = \Phi^{(\bar{q})} + \Phi^{(\bar{q}\tilde{q})},$$

которые находятся как решения следующих задач:

$$\{\hat{K}_z \Phi^{(\bar{q})} = 0,\ \Phi^{(\bar{q})}|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi^{(\bar{q})}|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H \Phi^{(\bar{q})} + \bar{q}E; \tag{12}$$

$$\begin{cases} \hat{K}\Phi^{(\bar{q}\tilde{q})} = 0,\ \Phi^{(\bar{q}\tilde{q})}|_{\Gamma_0} = 0, \\ \Phi^{(\bar{q}\tilde{q})}|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H \Phi^{(\bar{q}\tilde{q})} + \tilde{q}\,[\hat{R}_H \Phi^{(\bar{q}\tilde{q})} + \hat{R}_H \Phi^{(\bar{q})} + E]. \end{cases} \tag{13}$$

Первую задачу рассмотрим в следующем разделе, а решение второй представим в виде параметрического ряда. В линейном приближении решаем задачу

$$\{\hat{K}\Phi_1 = 0,\ \Phi_1|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_1|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H \Phi_1 + \tilde{q}E_q \tag{14}$$

с источником $E_q(s) \equiv \hat{R}_H\Phi^{(\bar{q})} + E$, а нелинейные приближения связаны рекуррентно ($k \geq 2$):

$$\{\hat{K}\Phi_k = 0,\ \Phi_k|_{\Gamma_0} = 0,\ \Phi_k|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H \Phi_k + \hat{R}_H \Phi_{k-1}. \tag{15}$$

Линейная ПЧХ $W_1(z, p, s)$ находится из задачи

$$\{\hat{L}W_1 = 0,\ W_1|_{\Gamma_0} = 0,\ W_1|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H W_1 + E_q. \tag{16}$$

Нелинейные приближения подсветки выражаются через нелинейные ПЧХ — решения рекуррентной системы ($k \geq 2$)

$$\begin{cases} \hat{L}W_k(p_k,\ \dots,\ p_1) = 0,\ W_k|_{\Gamma_0} = 0, \\ W_k|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H W_k + \hat{R}_H W_{k-1}(p_{k-1},\ \dots,\ p_1). \end{cases} \tag{17}$$

Функциональное представление для компоненты $\Phi^{(\bar{q}\tilde{q})}$ сохраняется в том же виде, что и для Φ_q (11). Принципиальное отличие в учете вклада подсветки при наличии ламбертовской и неламбертовской подложек состоит в том, что в случае закона Ламберта нелинейные ПЧХ факторизуются по пространственным частотам и выражаются через линейную ПЧХ. При неортотропном отражении отсутствует факторизация, линейная ПЧХ зависит от характера освещенности поверхности, на нелинейные ПЧХ существенно влияет закон отражения.

Если освещенность $E(r_\perp, s)$ — функция горизонтальной координаты $r_\perp$ в случае задач (2), то при решении системы (8) линейное приближение будет определяться сверткой

$$\check{\Phi}_1(z,\ p,\ s) = (\check{q}(p_0) * W_1(z,\ p,\ p_0,\ s)) \tag{18}$$

с ПЧХ $W_1(z, p, p_0, s)$, являющейся функцией двух параметров:

$$\{\hat{L}(p_1)W_1(p,\ p_0) = 0,\ W_1|_{\Gamma_0} = 0,\ W_1|_{\Gamma_H} = \check{E}(p_0,\ s). \tag{19}$$

В нелинейных ПЧХ также прибавится один параметр

$$\{\hat{L}W_k(p_k,\ \dots,\ p_0) = 0,\ W_k|_{\Gamma_0} = 0,\ W_k|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H W_{k-1}(p_{k-1},\ \dots,\ p_0) \tag{20}$$

и слегка изменится выражение (11):

$$\Phi_q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2(k+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \check{q}(p_0)\,\check{q}(p_1 - p_0) \dots \check{q}(p_k - p_{k-1}) \times$$

$$\times\, W_k(z,\ p_k,\ \dots,\ p_0,\ s) \exp[-i(p_k,\ r_\perp)]\, dp_k \dots dp_0. \tag{21}$$

Ряды Неймана при однородной границе

Задача (12) — это одномерная плоская задача с неортотропной границей и однородным анизотропным освещением $E = E(s)$. Аналитическая зависимость от параметра $\bar{q}$ может быть установлена двумя способами.

Во-первых, учитывая, что при $q = \bar{q} = \text{const}$ Фурье-образ альбедо есть $\check{q} = (2\pi)^2 \bar{q} \delta(p)$, из функционала (11) получаем частное выражение

$$\Phi^{(\bar{q})}(z, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{q}^k W_k^0(z, s), \tag{22}$$

где функции $W_k^0(z, s) \equiv W_k(z, p_k = 0, \dots, p_1 = 0, s)$ — решения рекуррентной системы задач ($k \geq 1$)

$$\{\hat{K}_z W_k^0 = 0, \; W_k^0|_{\Gamma_0} = 0, \; W_k^0|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H W_{k-1}^0 \tag{23}$$

с начальным приближением $\hat{R}_H W_0^0 = E(s)$. Выражение (22) представляет собой сумму ряда Неймана по кратности отражения от подложки с последующим многократным рассеянием в слое. Уравнения (23) являются частным случаем системы (10) при всех пространственных частотах $p_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Во-вторых, можно сразу ввести ряд по кратности переотражения от границы, члены которого удовлетворяют системе уравнений

$$\{\hat{K}_z \Phi_k = 0, \; \Phi_k|_{\Gamma_0} = 0, \; \Phi_k|_{\Gamma_H} = \bar{q} \hat{R}_H \Phi_{k-1} \tag{24}$$

с начальным приближением $\hat{R} \Phi_0 = E$. Очевидно, что $\Phi_k = \bar{q}^k W_k^0$, приходим к выражению (22), описывающему итерационный процесс по кратности отражения от поверхности с полным учетом многократного рассеяния в слое.

Следует отметить, что в отличие от ламбертовской подложки в задаче с неортотропным отражением подсветка зависит от азимута, и если использовать разложение решения по азимутальным гармоникам, то необходимо решать уравнения для большого числа гармоник. Краевые задачи (23) являются обычными одномерными плоскими задачами, и их решение не представляет трудностей. Авторы других подходов [7—9] строят решение такой задачи на основе интегральных уравнений для коэффициентов отражения и пропускания слоя, предлагая при этом также использовать метод последовательных приближений. Итерации в виде (22) реализуются проще и не требуют дополнительных ограничений на параметры слоя. Кроме того, непосредственно получаются пространственные и угловые распределения интенсивности, т. е. полное решение задачи.

Функция влияния и функция пропускания слоя с однородной неортотропной границей

Если океан рассматривать в приближении однородной ($q = \bar{q} = \text{const}$) неортотропной отражающей границы, то поле излучения системы атмосфера—океан или САНП находится как решение задачи

$$\{\hat{K}_z \Phi = 0, \; \Phi|_{\Gamma_0} = \pi S_\lambda \delta(s - s_0), \; \Phi|_{\Gamma_H} = q \hat{R}_H \Phi \tag{25}$$

в виде суперпозиции $\Phi = \Phi^0 + \Phi_a + \Phi_q$, где $\Phi_q = \Phi_{aR}$; $\Phi^{(0)} = \Phi^0 + \Phi_a$. Компоненты Φ^0 и $\Phi_я$ — решения задач (3) и (4) соответственно.

Краевая задача для подсветки в горизонтально-однородной системе слой — подложка с неортотропным законом отражения, описываемым оператором $\hat{R}_H$,

$$\{\hat{K}_z \Phi_q = 0, \; \Phi_q|_{\Gamma_0} = 0, \; \Phi_q|_{\Gamma_H} = q \hat{R}_H \Phi_q + qE, \tag{26}$$

в качестве источника излучения содержит освещенность, создаваемую изолированным слоем, $E(s) = \hat{R}_H \Phi^{(0)}$ — функцию направления $s \in \Omega^-$.

Выразив освещенность через интеграл с δ-функцией

$$E(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} E(s_0) \, \delta(s - s_0) \, ds_0, \tag{27}$$

подсветку Φ_q можно искать в виде функционала

$$\Phi_q(z,\ s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} E(s_0)\,\theta_q^0(z,\ s,\ s_0)\,ds_0, \tag{28}$$

ядром которого является ФВ $\theta_q^0(z,\ s,\ s_0)$ — решение краевой задачи с параметром $s_0 \in \Omega^-$.

$$\{\hat{K}_z\theta_q^0 = 0,\ \theta_q^0|_{\Gamma_0} = 0,\ \theta_q^0|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H\theta_q^0 + q\delta(s - s_0). \tag{29}$$

Введем параметрический ряд

$$\theta_q^0(z,\ s,\ s_0) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k\,\theta_k^0(z,\ s,\ s_0) \tag{30}$$

и перейдем к системе рекуррентных задач

$$k = 1:\ \{\hat{K}_z\theta_1^0 = 0,\ \theta_1^0|_{\Gamma_0} = 0,\ \theta_1^0|_{\Gamma_H} = \delta(s - s_0),$$

$$k \geqslant 2:\ \{\hat{K}_z\theta_k^0 = 0,\ \theta_k^0|_{\Gamma_0} = 0,\ \theta_k^0|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H\theta_{k-1}^0.$$

Методом индукции можно показать, что k-приближение имеет представление с помощью оператора, ядром которого является линейная ФВ $\theta_1^0(z,\ s,\ s_0)$ $(k > 2)$.

В результате [2] ФВ $\theta^0(z,\ s,\ s_0)$ при любом законе отражения выражается через линейную параметрическую ФВ $\theta_1^0(z,\ s,\ s_0)$

$$\begin{aligned}
\theta_q^0(z,\ s,\ s_0) &= q\theta_1^0(z,\ s,\ s_0) + \frac{q^2}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-}\theta_1^0(z,\ s,\ s_1)\,[\hat{R}_H\theta_1^0](s_1,\ s_0)\,ds_1 + \\
&+ \sum_{k=3}^{\infty}\frac{q^k}{(2\pi)^{k-1}}\int\limits_{\Omega^-}\theta_1^0(z,\ s,\ s_{k-1})\,ds_{k-1}\int\limits_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_1^0](s_{k-1},\ s_{k-2})\,ds_{k-2}\times\ldots \\
&\ldots\times\int\limits_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_1^0](s_3,\ s_2)\,ds_2\int\limits_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_1^0](s_2,\ s_1)\,[\hat{R}_H\theta_1^0](s_1,\ s_0)\,ds_1.
\end{aligned} \tag{31}$$

С помощью представления ФВ θ_q^0 (31) получаем явное выражение подсветки Φ_q через освещенность подложки, оператор отражения и линейную ФВ θ_1^0 изолированного слоя

$$\begin{aligned}
\Phi_q(z,\ s) &= \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-}E(s_0)\,\theta_1^0(z,\ s,\ s_0)\,ds_0 + \\
&+ \frac{q^2}{(2\pi)^2}\int\limits_{\Omega^-}E(s_0)\,ds_0\int\limits_{\Omega^-}\theta_1^0(z,\ s,\ s_1)\,[\hat{R}_H\theta_1^0](s_1,\ s_0)\,ds_1 + \\
&+ \sum_{k=3}^{\infty}\frac{q^k}{(2\pi)^k}\int\limits_{\Omega^-}E(s_0)\,ds_0\int\limits_{\Omega^-}\theta_1^0(z,\ s,\ s_{k-1})\,ds_{k-1}\int\limits_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_1^0](s_{k-1},\ s_{k-2})\,ds_{k-2}\times\ldots \\
&\ldots\times\int\limits_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_1^0](s_3,\ s_2)\,ds_2\int\limits_{\Omega^-}[R_H\theta_1^0](s_2,\ s_1)\,[\hat{R}_H\theta_1^0](s_1,\ s_0)\,ds_1.
\end{aligned} \tag{32}$$

Переобозначив переменные $s_{k-1} = s_0^*,\ \ s_{k-2} = s_1^*,\ \ldots,\ s_1 = s_{k-2}^*,\ \ s_0 = s_{k-1}^*$, получаем операторное выражение, в котором выделены ядро — линейная ФВ θ^0, а также линейная и нелинейные поправки к освещенности $E(s_0)$, обусловленные переотражением фотонов от поверхности и их многократным рассеянием в атмосфере

$$\Phi_q(z,\ s) = \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \theta_1^0(z,\ s,\ s_0^*)\,ds_0^* \left\{E(s_0^*) + \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} [\hat{R}_H\theta_1^0](s_0^*,\ s_1^*)\,E(s_1^*)\,ds_1^* + \right.$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{q^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}} \int\limits_{\Omega^-} [\hat{R}_H\,\theta_1^0](s_0^*,\ s_1^*)\,ds_1^* \ldots \int\limits_{\Omega^-} [\hat{R}_H\theta_1^0](s_{k-3}^*,\ s_{k-2}^*)\,ds_{k-2}^* \times$$

$$\left. \times \int\limits_{\Omega^-} [\hat{R}_H\,\theta_1^0](s_{k-2}^*,\ s_{k-1}^*)\,E(s_{k-1}^*)\,ds_{k-1}^* \right\}. \tag{33}$$

Это выражение называем оптическим передаточным оператором (ОПО).

Вернемся к рассмотрению задачи (12), сведенной к системе рекуррентных задач (23). С помощью ФВ $\theta_1^0(z,\ s,\ s')$ определяется линейное приближение

$$\Phi_1(z,\ s) = \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \theta_1^0(z,\ s,\ s_0)\,E(s_0)\,ds_0$$

и устанавливается рекуррентное соотношение между двумя последовательными приближениями

$$\Phi_k(z,\ s) = \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \theta_1^0(z,\ s,\ s_0)\,[\hat{R}_H\,\Phi_{k-1}](s_0)\,ds_0.$$

Введем оператор, действующий на границе $z = H$,

$$[\hat{M}_0 f](s) = \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} [\hat{R}_H\,\theta_1^0](s,\ s')\,f(s')\,ds'. \tag{34}$$

При $k \ge 1$ имеет место представление

$$\Phi_k(z,\ s) = \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \theta_1^0(z,\ s,\ s_0)\,[\hat{M}_0^{k-1}E](s_0)\,ds_0$$

и подсветка определяется через функционал, ядром которого является линейная ФВ $\theta_1^0(z,\ s,\ s')$,

$$\Phi_q = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k = \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \theta_1^0(z,\ s,\ s_0)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\hat{M}_0^{k-1}E\right](s_0)\,ds_0 = \frac{q}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \theta_1^0(z,\ s,\ s_0)\,E_q(s_0)\,ds_0, \tag{35}$$

где обозначено $E_q(s_0) \equiv [\hat{V}_0\,E](s_0) \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty}[\hat{M}_0^k E](s_0) = [(\hat{E} - \hat{M}_0)^{-1}E](s_0)$.

Выражение (35) есть оптический передаточный оператор плоского слоя с однородной неортотропной границей. Слагаемые оператора $\hat{V}_0$ отвечают соответствующим членам ряда Неймана по кратности переотражения от границы с полным учетом многократного рассеяния в слое. Представления ОПО (33) и (35) эквивалентны. По существу, величина qE_q определяет яркость подложки. В частном случае при ламбертовском законе отражения $E = \text{const}$

$$[\hat{R}_H\,\theta_1^0](s,\ s_0) = [\hat{R}\,\theta_1^0](s_0) \tag{36}$$

функция пропускания

$$W_0(z,\ s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \theta_1^0(z,\ s,\ s_0)\,ds_0, \tag{37}$$

сферическое альбедо

$$c_0 \equiv \hat{R}W_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} [\hat{R}\,\theta_1^0](s_0)\,ds_0. \tag{38}$$

Уравнение для функции пропускания $W_0(z, s)$ получается путем интегрирования уравнения для $\theta(z, s, s_0)$ по параметру $s_0 \in \Omega^-$

$$\{\hat{K}_z W_0 = 0, \ W_0|_{\Gamma_0} = 0, \ W_0|_{\Gamma_H} = 1. \tag{39}$$

С помощью ФВ

$$\theta_q^0(z, s, s_0) = q\theta_1^0(z, s, s_0) + q^2[\hat{R}\theta_1^0](s_0)\, W_0(z, s) + \sum_{k=3}^{\infty} q^k [\hat{R}_H \theta_1^0](s_0)\, W_0(z, s)\, c_0^{k-2} \tag{40}$$

можно вычислить подсветку

$$\Phi_q(z, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} E\theta_q^0(z, s, s_0)\, ds_0 = Eq\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \theta_1^0(z, s, s_0)\, ds_0 + \right.$$

$$+ q W_0(z, s)\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}[\hat{R}\theta_1^0](s_0)\, ds_0 + \sum_{k=3}^{\infty} q^{k-1} c_0^{k-2}\, W_0(z, s) \times$$

$$\left.\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}[\hat{R}\theta_1^0](s_0)\, ds_0\right\} = EqW_0(z, s)\{1 + qc_0 + \sum_{k=2}^{\infty} q^k c_0^k\} = EqW_0(z, s)/(1 - qc_0). \tag{41}$$

В итоге приходим к обобщению формулы В.В. Соболева [7] учета подсветки от однородной ламбертовской поверхности при однородном освещении

$$\Phi_q(z, s) = EqW_0(z, s)/(1 - qc_0). \tag{42}$$

Функция влияния и ПЧХ слоя с неоднородной неортотропной границей

Построим функциональное выражение для определения вклада подсветки $\Phi_q(z, r_\perp, s)$ — решения краевой задачи с неоднородным альбедо и неортотропным законом отражения

$$\{\hat{K}\Phi_q = 0, \ \Phi_q|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_q|_{\Gamma_H} = q(r_\perp)\hat{R}_H \Phi_q + q(r_\perp)(s)\, E(s), \tag{43}$$

где $E(s) = [\hat{R}_H \Phi^{(0)}](s)$, $q(r_\perp) = \varepsilon q(r_\perp)$. С помощью параметрического ряда переходим к системе рекуррентных задач

$$k = 1: \ \{\hat{K}\Phi_1 = 0, \ \Phi_1|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_1|_{\Gamma_H} = \tilde{q}(r_\perp)\, E(s),$$

$$k \geqslant 2: \ \{\hat{K}\Phi_k = 0, \ \Phi_k|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_k|_{\Gamma_H} = \tilde{q}(r_\perp)\hat{R}_H \Phi_{k-1}.$$

Решения этих задач выражаются через ПЧХ $\psi_k(z, p_k, \ldots, p_1, s)$

$$\check{\Phi}_1(z, p_1, s) = \check{\tilde{q}}(p_1)\,\Psi_1(z, p_1, s),$$

$$\check{\Phi}_k(z, p_k, s) = \frac{1}{(2\pi)^{2(k-1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int \check{\tilde{q}}(p_1)\,\check{\tilde{q}}(p_2 - p_1)\ldots\check{\tilde{q}}(p_k - p_{k-1}) \times$$

$$\times \Psi_k(z, p_k, \ldots, p_1, s)\, dp_{k-1}\ldots dp_1, \tag{44}$$

удовлетворяющие комплексным уравнениям переноса

$$\{\hat{L}(p_1)\Psi_1(z, p_1, s) = 0, \ \Psi_1|_{\Gamma_0} = 0, \ \Psi_1|_{\Gamma_H} = E(s), \tag{45}$$

$$\{\hat{L}(p_k)\Psi_k = 0, \ \Psi_k|_{\Gamma_0} = 0, \ \Psi_k|_{\Gamma_H} = \hat{R}_H \Psi_{k-1}(H, p_{k-1}, \ldots, p_1, s). \tag{46}$$

Введем представление для источника

$$E(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}E(s_0)\,\delta(s-s_0)\,ds_0. \tag{47}$$

Если линейную ПЧХ искать в виде функционала

$$\Psi_1(z,\ p_1,\ s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}E(s_0)\,\theta_1(z,\ p_1,\ s,\ s_0)\,ds_0, \tag{48}$$

то его ядро будет удовлетворять комплексному уравнению переноса с параметрами p_1 и s_0

$$\{\hat{L}(p_1)\,\theta_1=0,\ \theta_1|_{\Gamma_0}=0,\ \theta_1|_{\Gamma_H}=\delta(s-s_0). \tag{49}$$

Методом индукции можно показать, что в любом приближении порядка $k\geq 2$ ПЧХ выражается через линейную ФВ θ_1

$$\Psi_k(z,\ p_k,\ \ldots,\ p_1,\ s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}\theta_1(z,\ p_k,\ s,\ s_{k-1})\,ds_{k-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}[\hat{R}_H\theta_1](p_{k-1},\ s_{k-1},\ s_{k-2})\,ds_{k-2}\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}[\hat{R}_H\theta_1](p_2,\ s_2,\ s_1)\,ds_1\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}E(s_0)\,[\hat{R}_H\theta_1](p_1,\ s_1,\ s_0)\,ds_0. \tag{50}$$

В результате получаем функциональное выражение для подсветки – оптический передаточный оператор

$$\Phi_q(z,\ r_\perp,\ s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}E(s_0)\,ds_0\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{\tilde{q}}(p_1)\,\theta_1(z,\ p_1,\ s,\ s_0)\times$$

$$\times\exp[-i(p_1,\ r_\perp)]\,dp_1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}ds_{k-1}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta_1(z,\ p_k,\ s,\ s_{k-1})\times$$

$$\times\exp[-i(p_k,\ r_\perp)]\,dp_k\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}ds_{k-2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{\tilde{q}}(p_k-p_{k-1})\,[\hat{R}_H\theta_1]\times$$

$$\times(p_{k-1},\ s_{k-1},\ s_{k-2})\,dp_{k-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}E(s_0)\,ds_0\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\check{q}}(p_1)\,\tilde{\check{q}}(p_2-p_1)\,[\hat{R}_H\theta_1]\,(p_1,\ s_1,\ s_0)\,dp_1. \tag{51}$$

Построим оптический передаточный оператор, исходя из операции на границе $z=H$,

$$[\hat{M}\check{f}](p,\ s)\equiv\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{\tilde{q}}(p-p')\,dp'\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}[\hat{R}_H\theta_1](p',\ s,\ s')\,\check{f}(p',\ s')\,ds'. \tag{52}$$

В линейном приближении

$$\check{\Phi}_1(z,\ p,\ s)=\frac{\check{\tilde{q}}(p)}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}\theta_1(z,\ p,\ s,\ s_0)\,E(s_0)\,ds_0.$$

При $k\geq 1$ имеет место представление [2]

$$\check{\Phi}_k(z,\ p,\ s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega-}\theta_1(z,\ p,\ s,\ s_0)\,[\hat{M}^{k-1}\check{\tilde{q}}E](p,\ s_0)\,ds_0, \tag{53}$$

и подсветка определяется функционалом

$$\Phi_q(z, r_\perp, s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(p, r_\perp)]\, dp\, \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-} \theta_1(z, p, s, s_0)\, [\hat{V}\check{\tilde{q}}E](p, s_0)\, ds_0. \tag{54}$$

Для суммы ряда Неймана введено обозначение

$$[\hat{V}\check{\tilde{q}}E](p, s_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{M}^k \check{\tilde{q}}E](p, s_0) = [(\hat{E} - \hat{M})^{-1} \check{\tilde{q}}E](p, s_0). \tag{55}$$

Выражение (54) есть оптический передаточный оператор плоского слоя с неоднородной неортотропной границей.

Таким образом, решение задачи для подсветки Φ_q свелось к решению одномерной комплексной задачи с параметрами p и s_0 для линейной ФВ $\theta_1(z, p, s, s_0)$ и вычислению ОПО (51). Если подложка однородная, т. е. $q = \text{const}$, то

$$\Phi_q(z, s) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \Psi_k^0(z, s), \quad \theta_1^0(z, s, s_0) = \theta_1(z, p=0, s, s_0), \tag{56}$$

$$k = 1: \ \Psi_1^0(z, s) \equiv \Psi_1(z, p_1 = 0, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-} E(s_0)\, \theta_1^0(z, s, s_0)\, ds_0,$$

$$k \geqslant 2: \ \Psi_k^0(z, s) \equiv \Psi_k(z, p_k = 0, \ldots, p_1 = 0, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-} \theta_1^0(z, s, s_{k-1}) \times$$

$$\times\, ds_{k-1} \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-} [\hat{R}_H \theta_1^0](s_{k-1}, s_{k-2})\, ds_{k-2} \ldots \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-} E(s_0)\, [\hat{R}_H \theta_1^0](s_1, s_0)\, ds_0.$$

При однородной ортотропной подложке и $E = E(s)$ выражение (51) преобразуется в обобщенную формулу Соболева (42). Если в альбедо выделена постоянная составляющая, то задачу для подсветки

$$\{\hat{K}\Phi_q = 0, \ \Phi_q|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_q|_{\Gamma_H} = (\bar{q} + \varepsilon\tilde{q})\, \hat{R}_H \Phi_q + (\bar{q} + \varepsilon\tilde{q})\, E_0(s) \tag{57}$$

с помощью параметрического ряда молено свести к системе рекуррентных задач

$$k = 0: \ \{\hat{K}_z \Phi_0 = 0, \ \Phi_0|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_0|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H \Phi_0 + \bar{q}E_0(s),$$

$$k = 1: \ \{\hat{K}\Phi_1 = 0, \ \Phi_1|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_1|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H \Phi_1 + \tilde{q}E(s),$$

$$k \geqslant 2: \ \{\hat{K}\Phi_k = 0, \ \Phi_k|_{\Gamma_0} = 0, \ \Phi_k|_{\Gamma_H} = \bar{q}\hat{R}_H \Phi_k + \tilde{q}\hat{R}_H \Phi_{k-1},$$

где $E(s) \equiv E_0(s) + \hat{R}_H \Phi_0$.

Используя ФВ $\theta_q^0(z, s, s_0) \equiv \theta_q(z, p = 0, s, s_0)$, получаем

$$\Phi_0(z, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-} E_0(s_0)\, \theta_q^0(z, s, s_0)\, ds_0 \tag{58}$$

или

$$\Phi_0(z, s) = \frac{\bar{q}}{2\pi}\int_{\Omega-} \theta_1^0(z, s, s_0)\, [\hat{V}_0 E_0](s_0)\, ds_0. \tag{59}$$

В линейном приближении

$$\check{\Phi}_1(z, p_1, s) = \check{\tilde{q}}(p_1)\, \Psi_{1q}(z, p_1, s),$$

где ПЧХ Ψ_{1q} определяется из задачи

$$\{\hat{L}(p_1)\Psi_{1q}=0,\ \Psi_{1q}|_{\Gamma_0}=0,\ \Psi_{1q}|_{\Gamma_H}=\bar{q}\hat{R}_H\Psi_{1q}+E(s)$$

через ФВ $\theta_q(z, p, s, s_0)$

$$\Psi_{1q}(z, p_1, s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}E(s_1)\,\theta_q(z, p_1, s, s_1)\,ds_1,$$

удовлетворяющую комплексному уравнению с параметрами p и s_0

$$\{\hat{L}(p)\,\theta_q(z, p, s, s_0)=0,\ \theta_q|_{\Gamma_0}=0,\ \theta_q|_{\Gamma_H}=\bar{q}\hat{R}_H\theta_q+\delta(s-s_0). \tag{60}$$

Вводя параметрический ряд

$$\theta_q(z, p, s, s_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{q}^k\,\theta_{qk}(z, p, s, s_0), \tag{61}$$

переходим к рекуррентной системе уравнений

$$k=0:\ \{\hat{L}(p)\,\theta_{q0}=0,\ \theta_{q0}|_{\Gamma_0}=0,\ \theta_{q0}|_{\Gamma_H}=\delta(s-s_0),$$
$$k\geqslant 1:\ \{\hat{L}(p)\,\theta_{qk}=0,\ \theta_{qk}|_{\Gamma_0}=0,\ \theta_{qk}|_{\Gamma_H}=\hat{R}_H\theta_{q,\,k-1}\,.$$

Очевидно, что $\theta_{q0}(z, p, s, s_0)=\theta_1(z, p, s, s_0)$. Все остальные приближения выражаются с помощью операторов, ядром которых является функция влияния $\theta_1(z, p, s, s_0)$.

Нелинейные приближения подсветки Φ_k аналогично (44) можно выразить через нелинейные ПЧХ $\Psi_{kq}(z, p_k, \ldots, p_1, s)$ – решения рекуррентной системы комплексных уравнений

$$\begin{cases}\hat{L}(p_k)\,\Psi_{kq}=0,\ \Psi_{kq}|_{\Gamma_0}=0,\\ \Psi_{kq}|_{\Gamma_H}=\bar{q}\hat{R}_H\Psi_{kq}+[\hat{R}_H\Psi_{k-1,\,q}](p_{k-1}, \ldots, p_1, s).\end{cases}$$

Два последовательных приближения ПЧХ связаны рекуррентно:

$$\Psi_{kq}(z, p_k, \ldots, p_1, s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}\theta_q(z, p_k, s, s_0)\,[\hat{R}_H\Psi_{k-1,\,q}](p_{k-1}, \ldots, p_1, s_0)\,ds_0.$$

При $k = 2$

$$\Psi_{2q}(z, p_2, p_1, s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}\theta_q(z, p_2, s, s_1)\,ds_1\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_q](p_1, s_1, s_0)\,E(s_0)\,ds_0.$$

Далее методом индукции можно показать, что для ПЧХ Ψ_{kq} справедливо операторное выражение (50), если ФВ θ_1 заменить ФВ θ_q. Параметры $p_k, \ldots, p_1$ расщепляются, но просуммировать ряд Неймана не удается. В этом случае представление вклада подсветки Φ_q (51) сохраняется, только ФВ θ_1 надо заменить ФВ θ_q, которая, в свою очередь, полностью определяется через ФВ $\theta_1(z, p, s, s_0)$:

$$\theta_q(z, p, s, s_0)=\theta_1(z, p, s, s_0)+\frac{\bar{q}}{2\pi}\int_{\Omega^-}\theta_1(z, p, s, s_1)\,[\hat{R}_H\theta_1]\times$$
$$\times(p, s_1, s_0)\,ds_1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\bar{q}^k}{2\pi}\int_{\Omega^-}\theta_1(z, p, s, s_k)\,ds_k\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_1](p, s_k, s_{k-1})\times$$
$$\times ds_{k-1}\ldots\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}[\hat{R}_H\theta_1](p, s_2, s_1)\,[\hat{R}_H\theta_1](p, s_1, s_0)\,ds_1. \tag{62}$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$\theta_{qk}(z, p, s, s_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-}\theta_1(z, p, s, s_1)\,[\hat{R}_H\theta_{q,\,k-1}](p, s_1, s_0)\,ds_1 \tag{63}$$

и операции на границе $z = H$

$$[\hat{M}_c\check{f}](p, s, s_0) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-}[\hat{R}_H\theta_1](p, s, s_1)\,\check{f}(p, s_1, s_0)\,ds_1 \tag{64}$$

нетрудно получить функционалы для приближения $k \geq 1$

$$\theta_{qk}(z, p, s, s_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-}\theta_1(z, p, s, s_1)[\hat{M}_c^{k-1}\hat{R}_H\,\theta_1](p, s_1, s_0)ds_1.$$

Таким образом, ФВ θ_q представима в виде суммы ряда Неймана

$$\theta_q(z, p, s, s_0) = \theta_1(z, p, s, s_0) + \frac{\bar{q}}{2\pi}\int_{\Omega-}\theta_1(z, p, s, s_1)\,E_0(p, s_1, s_0)\,ds_1, \tag{65}$$

где

$$E_0(p, s_1, s_0) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\bar{q}^k[\hat{M}_c^k\hat{R}_H\theta_1](p, s_1, s_0) = [\hat{V}_c\hat{R}_H\theta_1](p, s_1, s_0), \tag{66}$$

$$V_c\check{f} \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\bar{q}^k\hat{M}_c^k\check{f} = [\hat{E} - \bar{q}\hat{M}_c]^{-1}\check{f}. \tag{67}$$

Очевидно, что $\bar{q}\hat{M}_c$ совпадает с $\hat{M}$ при $\tilde{q} = \bar{q} = \text{const}$. Последовательные приближения связаны рекуррентным соотношением

$$\check{\Phi}_k(z, p, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-}\theta_q(z, p, s, s_0)\,ds_0\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{\tilde{q}}(p - p')\,[\hat{R}_H\check{\Phi}_{k-1}](p', s_0)\,dp'.$$

Введем на границе $z = H$ операцию

$$[\hat{M}_q\check{f}](p, s) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{\tilde{q}}(p - p')\,dp'\,\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-}[\hat{R}_H\theta_q](p', s_1, s')\,\check{f}(p', s')\,ds'. \tag{68}$$

Методом индукции можно показать, что при $k \geq 1$

$$\check{\Phi}_k(z, p, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-}\theta_q(z, p, s, s_0)\,[\hat{M}_q^{k-1}\check{\tilde{q}}E](p, s_0)\,ds_0.$$

Подсветка вычисляется с помощью оптического передаточного оператора, ядром которого является ФВ $\theta_{\breve{u}}$,

$$\Phi_q(z, r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-}\theta_q^0(z, s, s_0)\,E_0(s_0)\,ds_0 + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(p, r_\perp)] \times$$

$$\times\,dp\,\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega-}\theta_q(z, p, s, s_0)\,[\hat{V}_q\check{\tilde{q}}E](p, s_0)\,ds_0, \tag{69}$$

а сумма ряда Неймана

$$\hat{V}_q \check{f} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \hat{M}_q^k \check{f} = [\hat{E} - \hat{M}_q]^{-1} \check{f}. \tag{70}$$

Фундаментальное решение краевой задачи для подсветки при произвольном законе отражения

При точечном возмущении альбедо ($q(r_\perp) = \tilde{q}\delta(r_\perp)$) с помощью (44) и определения ФВ $\theta_k(z, r_{\perp k}, \ldots, r_{\perp 1}, s) = F^{-1}[\Psi_k]$ можно найти фундаментальное решение краевой задачи для подсветки

$$\Phi_\delta(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{q}^k}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \Psi_k(z, p_k, \ldots, p_1, s) \exp[-i(p_k, r_\perp)] \times$$
$$\times dp_k \ldots dp_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k \theta_k(z, r_{\perp k}, 0, \ldots, 0, s). \tag{71}$$

Используя выражение для ПЧХ Ψ_k (50), получим более детальное представление на базе линейной ФВ $\theta_1(z, p, s, s')$:

$$\Phi_\delta(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} ds_{k-1} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(z, p_k, s, s_{k-1}) \times$$
$$\times \exp[-i(p_k, r_\perp)]\, dp_k \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} ds_{k-2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_H \theta_1](p_{k-1}, s_{k-1}, s_{k-2}) \times$$
$$\times dp_{k-1} \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} ds_1 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_H \theta_1](p_2, s_2, s_1)\, dp_2 \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} E(s_0)\, ds_0 \times$$
$$\times \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_H \theta_1](p_1, s_1, s_0)\, dp_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \theta(z, r_\perp, s, s_{k-1}) \times$$
$$\times ds_{k-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} c_1(s_{k-1}, s_{k-2})\, ds_{k-2} \times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} c_1(s_2, s_1)\, ds_1 \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} E(s_0)\, c_1(s_1, s_0)\, ds_0, \tag{72}$$

где обозначено

$$\theta(z, r_\perp, s, s') \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(z, p, s, s') \exp[-i(p, r_\perp)]\, dp, \tag{73}$$

$$c_1(s, s') \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_H \theta_1](p, s, s')\, dp. \tag{74}$$

Сформулированные математические модели ОПО, ПЧХ и ФВ позволяют разрабатывать новые методы дистанционного зондирования неортотропных поверхностей (суши, океана), основанные на использовании фундаментальных решений краевых задач теории переноса. Как показано в статье, в случае однородных неортотропных поверхностей ФВ атмосферы является откликом среды на распространение мононаправленного широкого пучка, а при неоднородных поверхностях — лазерного луча. Для ламбертовских поверхностей ФВ определяется изотропными источниками.

1. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Сушкевич Т.А. Решение краевых задач теории переноса с неортотропными границами методом ПЧХ и ФВ./Препринт. (ИПМ АН СССР, № 107). М., 1990. 32 с.

3. И о л т у х о в с к и й А. А., С у ш к е в и ч Т. А. Численное решение уравнения переноса с аналитическим учетом альбедо./Препринт. (ИПМ АН СССР, № 87). М., 1983. 28 с.
4. В л а д и м и р о в В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
5. В л а д и м и р о в В. С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
6. Г е р м о г е н о в а Т. А. Локальные свойства решения уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.
7. С о б о л е в В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звёзд и планет. М.: ГИТТЛ, 1956. 391 с.
8. Г у т ш а б а ш С. Д., К о ч е т к о в В. М.//Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1975. Т. 11. № 12. С. 1272–1283.
9. Я н о в и ц к и й Э. Г. Поля излученияв неоднородных планетных атмосферах: Дис. докт. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1982.
10. З е г е Э. П., И в а н о в А. П., К а ц е в И. Л. Перенос изображенияв рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша,
Москва

Поступила в редакцию
27 июня 1991 г.

T. A. Sushkevich. **Optical Transfer Operator for the System of the Atmosphere and Orographically Nonuniform Surface.**

The method of the spatial-frequency characteristics and influence functions was applied to the solution of the radiation transfer equation for a nonuniform non-Lambertian surface. Optical transfer operator with the kernel of linear influence functions and spatial-frequency characteristics is constructed.