

АДАПТИВНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

УДК 550.388.2; 554.510.535

## Численное исследование алгоритма вычисления напряжений, управляющих гибким зеркалом, в зависимости от представления информации о волновом фронте

В.В. Лавринов<sup>1</sup>, Л.Н. Лавринова<sup>1</sup>, М.В. Туев<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

Поступила в редакцию 13.01.2014 г.

Датчик Шэка–Гартмана представляет измеренный волновой фронт в виде координат энергетических центров тяжести фокальных пятен. Информация о волновом фронте может быть записана также как разности данных координат относительно координат центров субапертур, либо локальные наклоны волнового фронта, либо коэффициенты базисных функций в разложении измеряемого волнового фронта, либо значения базисных функций в его двумерном распределении. Вычисляемые по измерениям датчика напряжения, управляющие гибким зеркалом, будут меняться в зависимости от того, в каком виде представлена информация о волновом фронте. Приведены результаты расчетов эффективности алгоритма вычисления управляющих зеркалом напряжений в зависимости от представления информации о волновом фронте. Исследования выполнены на основе анализа данных экспериментов, проведенных на атмосферной трассе.

*Ключевые слова:* управление гибким зеркалом, функции отклика, датчик волнового фронта; flexible mirror control, response function, wavefront sensor.

### Введение

Адаптивная оптическая система (АОС), включающая в себя датчик волнового фронта Шэка–Гартмана и корректирующее гибкое зеркало, осуществляет воспроизведение поверхностью зеркала фазового распределения, которое сопряжено с волновым фронтом, приходящим на входную апертуру датчика [1]. Управление поверхностью гибкого зеркала реализуется подачей напряжений на управляющие элементы. Величина напряжений определяется по координатам энергетических центров тяжести фокальных пятен (центроидов) для измеряемого и опорного волновых фронтов, а также по предварительно измеренным функциям отклика каждого управляющего элемента [1]. С целью реконструкции волнового фронта по разностям координат центроидов измеряемого волнового фронта относительно опорного (плоского или усредненного по выборке) вычисляются коэффициенты разложения волнового фронта по базисным функциям, как правило по полиномам Цернике, ортогональным в круге единичного радиуса [1]. Информация об измеряемом датчиком волновом фронте представляется набором смещений координат центроидов, пропорциональных локальным наклонам

волнового фронта [1, 2], и совокупностью вычисленных по смещениям коэффициентов полиномов Цернике [3, 4].

Цель данной работы заключается в том, чтобы оценить, какое представление информации об измеряемом волновом фронте и функциях отклика наиболее эффективно для вычисления напряжений, управляющих зеркалом, выполняющим коррекцию искажений распространяющегося в турбулентной атмосфере лазерного излучения [5].

### Алгоритмы вычисления напряжений, управляющих гибким зеркалом

Согласно модальной идеологии реконструкции волнового фронта [6] искомое распределение фазовой поверхности зеркала может быть записано в виде разложения по напряжениям  $u_j$ , подаваемым на управляющие зеркалом элементы, в базисе функций отклика  $F_j(x, y)$ :

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^{N_{act}} u_j F_j(x, y) \quad (1)$$

с локальными наклонами в центре  $k$ -й субапертуры:

$$\frac{\partial W(x_k, y_k)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial x} u_j,$$

\* Виталий Валериевич Лавринов (lvv@iao.ru); Лидия Николаевна Лавринова (lnl@iao.ru); Михаил Владимирович Туев (reistlin\_magare@mail.ru).

$$\frac{\partial W(x_k, y_k)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial y} u_j, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial y}$  – локальные наклоны  $j$ -й

функции отклика на  $k$ -й субапертуре;  $j = 1, 2, \dots, N_{act}$ ;  $k = 1, 2, \dots, N_{lens}$  ( $N_{act}$  – число функций отклика;  $N_{lens}$  – число субапертур). Локальные наклоны волнового фронта  $\Phi(x, y)$ , приходящего на входную апертуру датчика, пропорциональны измеренным смещениям координат  $k$ -го центроида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x_k, y_k)}{\partial x} &= \frac{1}{f} S^x(x_k, y_k), \\ \frac{\partial \Phi(x_k, y_k)}{\partial y} &= \frac{1}{f} S^y(x_k, y_k), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f$  – фокусное расстояние линзы. Величину  $1/f$  можно опустить, так как все измеренные смещения координат центроидов и для измеряемого волнового фронта, и для функций отклика нормируются на величину, в которую входит параметр  $f$ .

Методом наименьших квадратов осуществляется подгонка локальных наклонов разложения  $W(x, y)$  по функциям отклика (2) к оценкам волнового фронта  $\Phi(x, y)$  в виде смещений координат центроидов, полученных в датчике (3), т.е. минимизируется функционал вида

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{k=1}^{N_{lens}} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial x} u_j - S^x(x_k, y_k) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial y} u_j - S^y(x_k, y_k) \right]^2 \right\} \rightarrow \min. \quad (4) \end{aligned}$$

Необходимое условие экстремума  $\partial \Psi / \partial u_j = 0$ . Уравнение (4) решается приравнованием частных производных по коэффициентам разложения  $u_j$  к нулю. Так как

$$\sum_{i=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial x} \neq 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial y} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_{act},$$

в силу определения функций отклика, то имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial x} u_j - S^x(x_k, y_k) = 0, \\ \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial y} u_j - S^y(x_k, y_k) = 0, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{B}. \quad (5)$$

Единственное решение имеет система вида

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial x} \\ \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} S^x(x_k, y_k) \\ S^y(x_k, y_k) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial x} & \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = [u_j]; \end{aligned}$$

$T$  – операция транспонирования.

Достаточное условие минимума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_j^2} \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial x} \sum_{i=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial x} + \\ + \sum_{j=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial y} \sum_{i=1}^{N_{act}} \frac{\partial F_i(x_k, y_k)}{\partial y} \geq 0. \end{aligned}$$

Все производные функций отклика положительны в силу их определения. Следовательно,  $\partial^2 \Psi / \partial u_j^2 > 0$  и локальному минимуму отвечают условия в виде системы уравнений (5). Управляющие зеркалом напряжения вычисляются обычным матричным способом:  $\mathbf{U} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$ .

Элементами матрицы  $\mathbf{A}$  являются локальные наклоны функций отклика (2), матрицы  $\mathbf{B}$  – измерения датчика (3). В зависимости от способа задания элементов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  могут быть сформулированы 7 вариантов систем уравнений (5) и (6).

1. Пусть имеются двумерные распределения функций отклика  $F_j(x, y)$ . Их локальные наклоны могут быть вычислены согласно определению производной в точке  $(x_k, y_k)$ , т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_j(x_k + \Delta x, y_k) - F_j(x_k, y_k)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_j(x_k, y_k + \Delta y) - F_j(x_k, y_k)}{\Delta y} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} S^x(x_k, y_k) \\ S^y(x_k, y_k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Двумерное представление функций отклика задано на сетке размерностью  $N \times N$ , поэтому минимальное значение приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$  равно  $1/N$ .

2. Каждая функция отклика измеряется датчиком и является результатом разложения по полиномам Цернике:  $F_j(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{bas}} c'_{ij} Z_i(x, y)$ , где  $N_{bas}$  – число полиномов Цернике. Тогда элементами матрицы  $\mathbf{A}$

будут результаты разложения по локальным наклонам полиномов Цернике:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{bas}} c'_{ij} \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial x} \\ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c'_{ij} \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} S^x(x_k, y_k) \\ S^y(x_k, y_k) \end{bmatrix}.$$

3. Если локальные наклоны каждой функции отклика представить как измеренные наклоны, пропорциональные смещениям координат центровидов для функций отклика:

$$\frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial x} \approx S_j^x(x_k, y_k), \quad \frac{\partial F_j(x_k, y_k)}{\partial y} \approx S_j^y(x_k, y_k),$$

то

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} S_j^x(x_k, y_k) \\ S_j^y(x_k, y_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} S^x(x_k, y_k) \\ S^y(x_k, y_k) \end{bmatrix}.$$

4. Пусть элементы матрицы  $\mathbf{A}$  — результаты разложения по локальным наклонам полиномов Цернике. В матрице  $\mathbf{B}$  измеренные наклоны также могут быть разложены по локальным наклонам полиномов Цернике, но с другими весовыми коэффициентами  $c_i$ , т.е. если

$$S_i^x(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial x},$$

$$S_i^y(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial y},$$

то имеет место система уравнений, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{bas}} c'_{ij} \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial x} \\ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c'_{ij} \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial x} \\ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

5. Свойством ортогональных полиномов является ортогональность их производных [5]. При умножении обеих частей уравнений четвертого варианта на  $\frac{\partial Z_j(x_k, y_k)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial Z_j(x_k, y_k)}{\partial y}$  соответственно и с учетом условия ортонормированности ортогональных полиномов [5] имеет место система уравнений, где

$$\mathbf{A} = \left[ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c'_{ij} \right] \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \left[ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \right]; \quad c'_{ij} \text{ — весовой коэффициент при } i\text{-м полиноме Цернике } j\text{-й функции отклика; } c_i \text{ — весовой коэффициент при } i\text{-м полиноме Цернике для волнового фронта } \Phi(x, y), \text{ приходящего на входную апертуру датчика: } i = 1, 2, \dots, N_{bas}.$$

6. Если в обеих частях уравнений пятого варианта заменить единичную матрицу на матрицу, представляющую скалярное произведение  $(Z_i(x_k, y_k), Z_j(x_k, y_k))$ , и поделить на  $Z_j(x_k, y_k)$ , то получится система уравнений

$$\mathbf{A} = \left[ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c'_{ij} Z_i(x_k, y_k) \right], \quad \mathbf{B} = \left[ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i Z_i(x_k, y_k) \right].$$

7. В правой части системы уравнений третьего варианта замена смещений  $S^x(x_k, y_k)$  и  $S^y(x_k, y_k)$  на

выражения  $\sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial x}$  и  $\sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial y}$  дает

систему уравнений, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} S_j^x(x_k, y_k) \\ S_j^y(x_k, y_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial x} \\ \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i \frac{\partial Z_i(x_k, y_k)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Представление элементов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в виде смещений координат центровидов или локальных наклонов волнового фронта, или совокупности коэффициентов полиномов Цернике в системах уравнений (5) и (6) приводит к тому, что вычисляемые напряжения  $u_j$  будут различны.

## Методы решения систем уравнений, рассчитывающих управляющие гибким зеркалом напряжения

Система уравнений (6) имеет единственное решение, если матрица  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  — квадратная и невырожденная, т.е.  $\det[\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}] \neq 0$ . Обращение матрицы  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  выполняется методом Гаусса, который осуществим только тогда, когда главные угловые миноры матрицы  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  отличны от нуля [7].

Матрица  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  может быть невырожденной, но метод Гаусса при обращении матрицы применить нельзя, если первый элемент в обрабатываемой матрице равен нулю. Тогда может быть применен метод Гаусса с выбором главного элемента: поскольку все уравнения в системе уравнений равноправны, их можно пронумеровать в произвольном порядке: присвоить первый номер тому уравнению, в котором коэффициент при первом неизвестном отличен от нуля. После этой перенумерации может быть выполнен первый шаг по методу Гаусса и т.д.

Решение системы уравнений (6) можно осуществить методом Гаусса—Жордана [8], что не требует выполнения операции обращения матрицы, причем метод Гаусса—Жордана применим тогда и только тогда, когда применим метод Гаусса, т.е. когда главные угловые миноры матрицы  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  отличны от нуля.

Альтернативой матричному способу решения системы уравнений (6) может стать метод разложения на треугольные матрицы [8]. Представим матрицу

$A^T \cdot A$  в виде произведения нижней треугольной матрицы  $P$  с единичной главной диагональю и верхней треугольной матрицы  $Q$  также с единичной главной диагональю, тогда  $A^T \cdot A = P \cdot Q$  и  $(A^T \cdot A)^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1}$ ,  $U = P^{-1} \cdot Q^{-1} \cdot A^T \cdot B$ . Разложение на треугольные матрицы существует и единственно, если главные угловые миноры матрицы  $A^T \cdot A$  также отличны от нуля [8].

Таким образом, необходимым и достаточным условием решения системы уравнений (6) являются условие  $\det|A^T \cdot A| \neq 0$  и условие отличия от нуля всех главных угловых миноров матрицы  $A^T \cdot A$ .

## Критерии оценки эффективности алгоритмов вычисления напряжений, управляющих гибким зеркалом

Реконструированный волновой фронт в АОС используется для контроля управлением гибким зеркалом [1, 9–13]. Одним из критериев оценки эффективности способов, вычисляющих управляющие зеркалом напряжения, является сравнение распределения фазы, реконструированного по полиномам Цернике:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{bas}} c_i Z_i(x, y) \quad (7)$$

с распределением фазовой поверхности зеркала (1). На рис. 1 кривыми 2 (вариант 4), 3 (вариант 5), 4 (вариант 6), 5 (вариант 3) представлены профили поверхности зеркала, воспроизводимой 19 функциями отклика [11–13] для распределения фазы, измеряемой датчиком Шэка–Гартмана.

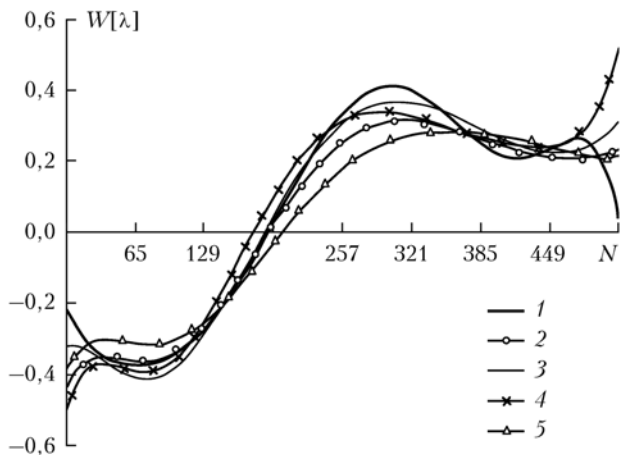


Рис. 1. Профиль фазового распределения, реконструированного по полиномам Цернике (кривая 1); профили фазовой поверхности зеркала, где напряжения вычислены решением системы уравнений (5): кривая 2 – элементами матриц  $A$  и  $B$  являются локальные наклоны; 3 – коэффициенты полиномов Цернике; 4 – значения двумерных распределений; 5 – смещения координат центровдов

Кривая 1 соответствует профилю волнового фронта, реконструированного по измерениям датчика. В шестом варианте системы уравнений (5), где элементами

матриц  $A$  и  $B$  являются значения в точках поверхностей (распределений) полиномов Цернике и для функций отклика, и для измеряемого волнового фронта, число уравнений можно варьировать от 64 (число субапертур на датчике), как представлено на рис. 1, до  $N = 512$  (размерность сетки). Система из  $N = 512$  уравнений дает наиболее близкое к реконструированному волновому фронту фазовое распределение зеркала со среднеквадратическим отклонением

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2 - 1} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [W(x_i, y_j) - \Phi(x_i, y_j)]^2}.$$

Важным критерием эффективности алгоритмов служит среднеквадратическое отклонение амплитуды колебаний фазы на каждом участке фазового распределения относительно его среднего значения [11, 12]:

$$\sigma_W^2 = \frac{1}{N^2 - 1} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [W(x_i, y_j) - \langle W(x_i, y_j) \rangle]^2}.$$

В формуле (7) размерностям  $N_{bas} = 2, 5, 9, 14, 20, 27, 35, \dots$  соответствуют пространственные масштабы аберраций  $m = 1, 2, 3, \dots, 7, \dots$ . При  $N_{bas} = 5$   $m = 2$ , т.е. базис включает в себя линейные и квадратичные аберрации. Если  $N_{bas} = 9$ , то  $m = 3$  и базис состоит из линейных, квадратичных аберраций, а также аберраций третьего порядка. Таким образом,  $m$  соответствует максимальному порядку аберраций, составляющих базис разложения волнового фронта по полиномам Цернике.

Степень неоднородности фазы на входной апертуре датчика волнового фронта выражается формулой Фрида [14]:  $\sigma_S^2 = k_S (D/r_0)^{5/3}$ , где  $k_S \approx 1$ ;  $D$  – диаметр входной апертуры;  $r_0$  – радиус Фрида. Дисперсии фазовых отклонений для измеряемого волнового фронта  $\sigma_S^2$  и реконструированного волнового фронта  $\sigma_\Phi^2$  связаны соотношением  $\sigma_S^2 = k_R \sigma_\Phi^2$  [11, 12]. Параметр  $k_R$  зависит от числа базисных функций  $N_{bas}$  (7) и масштаба базисных аберраций  $m$ :  $k_R = (D/r_0)^{m(N_{bas}-m)}$ . Так как  $N_{bas} = (m^2 + 3m)/2$ , то  $k_R = (D/r_0)^{2/(m+1)}$ .

Дисперсия отклонений волнового фронта, реконструированного датчиком, от его среднего значения как степенной функции отношения  $D$  к  $r_0$  имеет вид

$$\sigma_\Phi^2 = k_S (D/r_0)^{(5m-1)/(3m+3)}, \quad (8)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots, 7, \dots$ .

Дисперсии фазовых отклонений для реконструированного волнового фронта  $\sigma_\Phi^2$  и фазовой поверхности зеркала  $\sigma_W^2$  связаны соотношением  $\sigma_\Phi^2 = k_P \sigma_W^2$ , где  $k_P$  зависит от плотности размещения управляющих элементов, функции отклика которых образуют базис разложения фазовой поверхности зеркала (1). На рис. 2 представлены результаты, полученные в экспериментах на атмосферной трассе и усредненные по 50 реализациям.

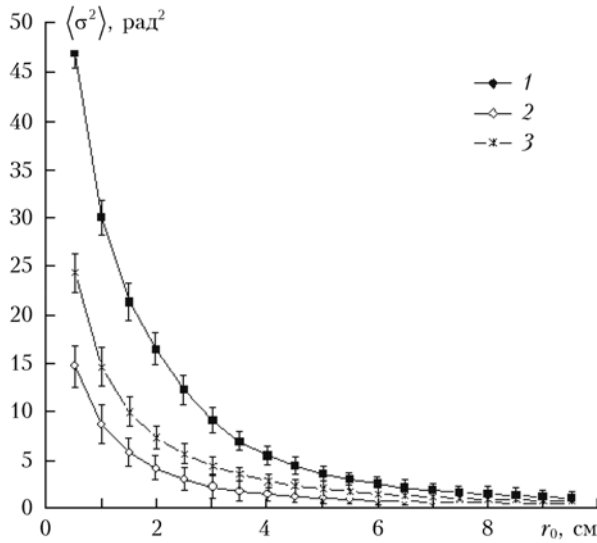


Рис. 2. Дисперсии отклонений фазовой поверхности зеркала от ее среднего значения при воздействии управляющими элементами, размещенными: по первому кольцу из 7 элементов (кривая 1); по двум первым кольцам из 19 элементов (2) [11, 12]; кривая 3 – степень неоднородности фазы на входной апертуре датчика

Дисперсия фазовых отклонений для фазовой поверхности зеркала  $\sigma_W^2$  из уравнения (1) с учетом формулы (8) для функций отклика как результатов реконструкции при единичном воздействии отдельного управляющего элемента на зеркало имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 &= D \left[ \sum_{j=1}^{N_{act}} u_j F_j \right] = \\ &= \sum_{j=1}^{N_{act}} u_j^2 D[F_j] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N_{act}} u_i u_j \text{cov}(F_i, F_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{N_{act}} u_j^2 \sigma_{F_j}^2 = k_S (D/r_0)^{(5m-1)/(3m+3)} \sum_{j=1}^{N_{act}} u_j^2, \end{aligned}$$

где  $D[F_j] = \sigma_{F_j}^2$  – дисперсия  $j$ -й функции отклика,

тогда  $k_P = 1 / \sum_{j=1}^{N_{act}} u_j^2$ .

Очевидно, что чем больше функций отклика используется в управлении зеркалом [11, 12], т.е. чем больше ранг матрицы  $A^T \cdot A$  в системе уравнений (5), тем меньше значение  $k_P$ , характеризующего отличие дисперсии фазовых отклонений для фазового распределения зеркала от дисперсии фазовых отклонений для реконструированного волнового фронта. Для заданного числа функций отклика ошибка решения системы уравнений (5) будет пропорциональна величине коэффициента  $k_P$ .

Критерием оценки эффективности вариантов 1–7, вычисляющих управляющие зеркалом напряжения, является невязка [8], т.е. ошибка в результате решения системы уравнений (6) или норма:

$\|A^T \cdot A \cdot U - A^T \cdot B\| = \|d_m\|$ . Чем меньше  $\|d_m\|$ , тем выше эффективность алгоритма вычисления управляющих напряжений.

Коэффициенты системы уравнений (6) (матрица  $A^T \cdot A$ ) и ее свободные члены (матрица  $A^T \cdot B$ ) могут быть представлены с определенной погрешностью, малое изменение исходных параметров может кардинально сказаться на результате. Такие системы уравнений называются плохо обусловленными. Число обусловленности матрицы  $a = A^T \cdot A$ , от которого зависит степень влияния погрешности коэффициентов системы уравнений на погрешность полученного решения [8], есть величина  $\text{cond}(a) = \|A^T \cdot A\| \cdot \|(A^T \cdot A)^{-1}\|$ . Если  $\text{cond}(a)$  невелико, то относительная погрешность решения будет не сильно отличаться от относительной погрешности коэффициентов. Чем больше число обусловленности, тем больше будет влияние погрешности коэффициентов на погрешность решения.

## Результаты сравнения и их обсуждение

Сравнение алгоритмов вычисления управляющих зеркалом напряжений проведено с помощью расчетов по данным натуральных экспериментов, полученным на атмосферной трассе длиной 100 м, и дает результаты усреднения по 100 реализациям. Расчеты проводились на сетке, содержащей  $512 \times 512$  пикселей. В качестве опорного волнового фронта использовался результат усреднения координат центроидов по выборке. Волновой фронт анализировался датчиком Шэка–Гартмана с линзовым растром, состоящим из  $8 \times 8$  субапертур с фокусным расстоянием 2 мм. Размер субапертуры составлял  $64 \times 64$  пикселя и соответствовал расстоянию между центрами субапертур ( $\lambda = 0,633$  мкм,  $D = 7,24$  мм).

Результаты сравнения систем уравнений (5) (варианты 1–7) по степени неоднородности фазовой поверхности зеркала  $\sigma_W^2$ , по дисперсии  $\sigma^2$  отклонений фазовой поверхности зеркала от поверхности реконструированного датчиком волнового фронта, по мере невязки  $\|d_m\|$  и по величине обусловленности матрицы  $a = A^T \cdot A$ , т.е. ( $\text{cond}(a)$ ), представлены в таблице.

№ варианта	$\sigma_W^2$	$\sigma^2$	$\ d_m\ $	$\text{cond}(a)$
1	1,13863	0,000144	9,83143	1,80E+05
2	1,13472	0,000146	9,83790	1,82E+05
3	1,16972	0,000175	10,33620	7,88E+04
4	0,10208	0,000143	5,26958	2,24E+05
5	0,00058	0,000065	7,50418	1,334+09
6	0,00058	0,000099	0,49390	9,522+07
7	0,15656	0,000196	6,31624	7,88E+04

По значениям дисперсий  $\sigma^2$  и  $\sigma_W^2$ , представленным в таблице, наиболее точным алгоритмом вычисления управляющих зеркалом напряжений становится вариант 5 системы уравнений (5), где элементами матриц  $A$  и  $B$  являются коэффициенты полиномов Цернике. Вариант 6, где элементами матриц

**A** и **B** являются значения распределений полиномов Цернике, будет самым точным, если решать систему из 512 уравнений. Увеличить число уравнений до размерности сетки возможно только в данном варианте. Наименее точным алгоритмом будет вариант 3, где элементами матриц **A** и **B** являются смещения координат центроидов. По величине невязки самым эффективным является опять же вариант 6, наименее эффективным вариант 3. Число обусловленности  $\text{cond}(a)$ , оценивающее влияние погрешности коэффициентов (погрешности элементов матрицы  $A^T \cdot A$ ) на погрешность решения, относительно не велико для вариантов 3 и 7, где элементами матрицы **A** являются смещения координат центроидов. Самое большое число обусловленности – для варианта 5, где элементы матрицы **A** – коэффициенты полиномов Цернике. Далее по мере увеличения числа обусловленности идут варианты 1, 2, 4, где элементами матрицы **A** являются локальные наклоны полиномов Цернике (варианты 2 и 4) или функций отклика (вариант 1). И наконец, варианты 5 и 6, где элементы матрицы **A** представляют собой точки распределений полиномов Цернике. Таким образом, варианты 5 и 6 являются плохо обусловленными по сравнению с вариантами 3 и 7.

### Заключение

Аналитическая интерпретация системы уравнений (5) заключается в том, что каждое измерение датчика волнового фронта может быть аппроксимировано суммой управляющих зеркалом напряжений, умноженных на значения функций отклика. Значения функций отклика и информация, регистрируемая датчиком, могут быть представлены как смещения координат центроидов либо как локальные наклоны полиномов Цернике и функций отклика, либо как коэффициенты полиномов Цернике, либо как значения двумерных распределений фазовых поверхностей, выраженных через полиномы Цернике. Смещение координаты измеряемого датчиком волнового фронта и согласно формулам (3) локальный наклон волнового фронта есть результат аппроксимации его линейной функцией, т.е. является наименее точным приближением фазовой поверхности зеркала, измеряемого волнового фронта, поверхностей функций отклика или двумерных распределений полиномов Цернике (см. таблицу, варианты 1–4, 7). В пятом варианте и значения функций отклика, и измерения датчика волнового фронта представлены в виде совокупности коэффициентов полиномов Цернике. Каждый из коэффициентов в разложении общей волновой аберрации дает вклад аберрации заданного типа и порядка, создавая определенные соотношения всех типов аберраций [11, 12, 15]. В данном случае аппроксимация имеет нелинейный характер и аппроксимируемая фазовая поверхность зеркала является более точным приближением к поверхности волнового фронта, реконструированного

датчиком [3, 15]. Для варианта, где значение фазовой поверхности равно сумме значений фазовых поверхностей (двумерных распределений) функций отклика, умноженных на вычисленные напряжения, аппроксимация является также нелинейной, так как каждое распределение функции отклика представляет комбинацию полиномов Цернике.

1. Александров А.Г., Завалова В.Е., Кудряшов А.В., Панченко В.В., Рукосуев А.Л., Самаркин В.В. Адаптивная оптика для мощных лазеров со сверхкороткими импульсами излучения // Сб. трудов ИЛИТ РАН. М., 2005. С. 55–61.
2. Берченко Е.А., Калинин Ю.А., Киселёв В.Ю., Польшин М.А., Прилепский Б.В., Филатов А.С. Датчики волнового фронта // Лазерно-оптические системы и технологии: Сб. статей ФГУП «НПО Астрофизика». М., 2009. С. 64–69.
3. Безуглов Д.А., Забродин Р.А. Методика аппроксимации гибкого адаптивного пьезокерамического зеркала ограниченным числом полиномов Цернике // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19, № 9. С. 810–814.
4. Безуглов Д.А., Сахаров И.А. Реишетникова И.В. Метод оптимизации топологии фазового фронта // Оптика атмосф. и океана. 2008. Т. 21, № 11. С. 998–1003.
5. Лавринова Л.Н., Лукин В.П. Адаптивная коррекция тепловых и турбулентных искажений лазерного излучения деформируемым зеркалом. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2008. 152 с.
6. Лукин В.П., Фортес Б.В. Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 211 с.
7. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
8. Богачев К.Ю. Практикум на ЭФМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Изд-во ЦПИ при МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998. 137 с.
9. Шелдакова Ю.В., Кудряшов А.В., Рукосуев А.Л., Самаркин В.В., Черезова Т.Ю. Использование гибридного алгоритма управления биморфным зеркалом для фокусировки светового излучения // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20, № 4. С. 380–383.
10. Соболев А.С., Черезова Т.Ю., Кудряшов А.В. Аналитическая и численная модели гибкого биморфного зеркала // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 3. С. 277–281.
11. Распространение оптических волн в неоднородных, случайных, нелинейных средах / Под общ. ред. А.А. Землянова. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2012. С. 150–165.
12. Антошкин Л.В., Лавринов В.В., Лавринова Л.Н., Лукин В.П., Туев М.В. Оптимизация управления активным биморфным зеркалом на основе датчика Гартмана // Методы и устройства передачи и обработки информации. М.: Радиотехника, 2009. Вып. 11. С. 25–34.
13. Копылов Е.А., Лукин В.П. Статистические характеристики биморфного зеркала DM2-100-31 и возможность его применения в адаптивной оптической схеме Большого солнечного вакуумного телескопа // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 12. С. 1111–1113.
14. Тараненко В.Г., Шанин О.И. Адаптивная оптика. М.: Радио и связь, 1990. 112 с.
15. Безуглов Д.А., Скляр А.В. Алгоритм восстановления волнового фронта на базе двумерных сглаживающих кубических нормализованных B-сплайнов // Оптика атмосф. и океана. 2000. Т. 13, № 8. С. 770–774.

*V.V. Lavrinov, L.N. Lavrinova, M.V. Tuev.* **Numerical simulation of the algorithm to compute the voltage control for the flexible mirror depending on the representation of information on the wavefront.**

Shack–Hartmann sensor represents a wavefront as centroids of the focal spots. Wavefront information can be presented as the difference of the coordinate data on centers of sub-apertures or the local wavefront tilts, or coefficients of the basis functions in the decomposition of the measured wavefront, or the values of the basis functions in its two-dimensional distribution. Voltages calculated from the sensor measurements, that control for the flexible mirror will change depending on the form of information on the wavefront. The paper presents the numerical results giving an assessment of the effectiveness of the algorithm for calculating the mirror control voltages depending on the presentation of the wavefront. The studies performed are based on the analysis of experimental data on an atmospheric path.