

## ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ, ГИДРОСФЕРЫ И ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

УДК 353.361:551.6:621.371

# О применимости асимптотических формул восстановления параметров «оптической» турбулентности из данных импульсного лидарного зондирования.

## I. Уравнения

В.В. Воробьев\*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН  
119017, г. Москва, Пыжевский пер., 3*

Поступила в редакцию 20.07.2016 г.

Найдены асимптотические решения задачи восстановления распределения структурной характеристики флуктуаций показателя преломления из данных измерений коэффициента усиления обратного рассеяния. Решения записываются через дробные производные коэффициента усиления в случае приемников с малой апертурой либо через обычные производные в случае приемников с большой апертурой. Подробно исследованы свойства ядра интегрального уравнения, из которого следуют асимптотические формулы. Обращено внимание на то, что ядро в общем случае является осциллирующим. Осцилляции ядра слабо сказываются на величине коэффициента усиления, но их влияние на производные этого коэффициента может быть существенным.

*Ключевые слова:* турбулентность, лидары, усиление обратного рассеяния, уравнения Вольтерра и Абеля; lidar, turbulence, backscattering enhancement, Volterra equations and Abel equations.

### Введение

Более 40 лет назад был предсказан и открыт эффект усиления обратного рассеяния назад (УОР) молекулами и аэрозолем атмосферы турбулентными неоднородностями показателя преломления [1, 2]. В последнее время проводятся многочисленные теоретические [3–10] исследования возможностей применения этого эффекта как для измерения величины коэффициента (УОР), так и определения из этих измерений распределения параметра  $C_n^2$  – структурной постоянной «оптической» турбулентности по трассе. В настоящее время удалось преодолеть многие технические трудности и реализовать измерения коэффициента усиления обратного рассеяния [11, 12]. В измерениях надежно зафиксированы суточный ход коэффициента усиления, его изменение по трассе зондирования.

Насущной стала задача определения из измерений коэффициента УОР распределения величины  $C_n^2$ . Основы для решения этой задачи были заложены в работе [7]. В ней сформулировано интегральное уравнение, связывающее коэффициент УОР и распределение  $C_n^2$ . В работах [8, 9] показана возможность нахождения решения этого уравнения в том случае, когда размеры приемника достаточно малы, такие, что применимо приближение точечного приемника для ядра уравнения. Однако сами условия

применимости этого приближения для решения обратной задачи до сих пор не исследовались. Выяснение вопроса о применимости асимптотических приближений для решения задачи восстановления является основной целью представляемой работы.

### 1. Постановка задачи и уравнения

Рассматривается та же модель среды распространения и измерений, что и при постановке задач теоретических исследований [7, 8] и в эксперименте [11, 12]: расходящийся лазерный пучок формируется в плоскости  $x = 0$ . Предполагается, что расходимость пучка достаточно большая, такая, что на большей части трассы распространения флуктуации в пучке можно рассчитывать по формулам для сферического источника [13]. Зондирование производится короткими лазерными импульсами с пространственной протяженностью много меньшей, чем продольные масштабы распределения параметров турбулентности на трассе распространения.

Предполагается также, что относительные флуктуации интенсивности света слабые, их дисперсия  $\beta_I^2 \leq 1$ . Рассеянный сигнал принимается двумя приемниками в плоскости  $x = 0$  с одинаковыми радиусами  $R$  круговых апертур. Центр одного из приемников расположен вблизи оси пучка, другого – на расстоянии  $\rho_0$  от оси.

Средние мощности рассеянного света на приемниках при указанных предположениях можно рассчитывать по формуле [7]:

\* Валерий Васильевич Воробьев (v\_v\_vorobiev@mail.ru).

$$\frac{\langle P(x, R, \rho_0) \rangle}{\langle P_0(x, R, \rho_0) \rangle} = 1 + q(x, R, \rho_0), \quad (1)$$

где  $P_0$  – мощность на приемнике в отсутствие турбулентности;  $x = ct/2$ ,  $c$  – скорость света,  $t$  – время, отсчитываемое от времени генерации импульса, длительность которого предполагается пренебрежимо малой. Величину  $q(x, R, \rho_0)$  будем называть фактором влияния турбулентности на среднюю мощность рассеянного света на приемнике. В случае слабых флуктуаций величина  $q$  определяется соотношением [7]:

$$q(x, R, \rho) = \frac{1}{S} \iint_S B_I(x, \rho - \rho_0) d^2 \rho. \quad (2)$$

Здесь

$$B_I(x, \rho) = 8\pi k_0^2 \int_0^x d\xi \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{k}, \xi) \left[ 1 - \cos \left[ \frac{\kappa_{\perp}^2 \xi (x - \xi)}{k_0 x} \right] \right] \exp \left[ i \frac{\xi}{x} \mathbf{k} \rho \right] d^2 \mathbf{k} \quad (3)$$

– функция корреляции флуктуаций интенсивности в сферической волне при ее распространении от точки с координатами  $(x = 0, \rho = 0)$  до точки  $(x, \rho)$ ;  $S = \pi R^2$  – площадь приемной апертуры;  $\Phi_n(\mathbf{k}, x)$  – спектр флуктуаций показателя преломления;  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина световой волны. (Формулы (2) и (3) являются обобщением аналогичных формул работ [7, 8] на случай конечного разнесения  $\rho_0$  приемных апертур.) Если спектр  $\Phi_n(\mathbf{k}, x)$  изотропен, интегрируя (3) по угловой переменной, получим

$$B_I(x, \rho) = 16\pi^2 k_0^2 \int_0^x d\xi \times \int_0^{\infty} \Phi_n(\kappa_{\perp}, 0, \xi) \left[ 1 - \cos \left[ \frac{\kappa_{\perp}^2 \xi (x - \xi)}{k_0 x} \right] \right] J_0 \left( \kappa_{\perp} \rho \frac{\xi}{x} \right) d\kappa_{\perp}, \quad (4)$$

где через  $\kappa_{\perp}$  обозначена перпендикулярная к оси  $x$  составляющая вектора  $\mathbf{k}$ . Для вычисления функции  $B_I(x, \rho)$  удобно воспользоваться ее представлением через интеграл Фурье

$$B_I(x, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa_{\perp}, x) \exp(i \cdot \kappa_{\perp} \rho) d^2 \kappa_{\perp}. \quad (5)$$

Функция  $F_I$ , как это следует из (4), (5), определяется как

$$F_I(\kappa_{\perp}, x) = 8\pi k_0^2 x \times \int_0^{\infty} \Phi_n \left[ \kappa_{\perp} (1 + \eta), \frac{x}{1 + \eta} \right] \left[ 1 - \cos \left( \frac{\kappa_{\perp}^2 x}{k_0} \eta \right) \right] d\eta. \quad (6)$$

Используя представление (5), формулу (2) для случая изотропных флуктуаций  $\Phi_n(\kappa_{\perp}, x) = \Phi_n(\kappa_{\perp}, x)$  можно записать в виде

$$q(x, R, \rho_0) = \frac{4\pi}{R} \int_0^{\infty} F_I(\kappa, x) J_1(\kappa R) J_0(\kappa \rho_0) d\kappa, \quad (7)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  – функции Бесселя нулевого и первого порядков.

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов по приведенным формулам. На рис. 1 приведены зависимости фактора  $q$  от радиуса приемной апертуры  $R$  и расстояния до области зондирования  $x$ . Это зависимость для случая статистически однородной турбулентной среды (при  $C_n^2(x) = \text{const}$ ) со спектром флуктуаций показателя преломления вида

$$\Phi_n(\mathbf{k}, x) = 0,033 C_n^2 |\mathbf{k}|^{-11/3}. \quad (8)$$

Хорошим приближением для этих зависимостей является

$$q(x, R, 0) = \frac{0,49 C_n^2 k_0^{7/6} x^{11/6}}{[1 + 0,4 R^2 / r_F^2(x)]^{-7/6}} \quad (9)$$

( $r_F(x) = \sqrt{x/k_0}$  – масштаб Френеля).

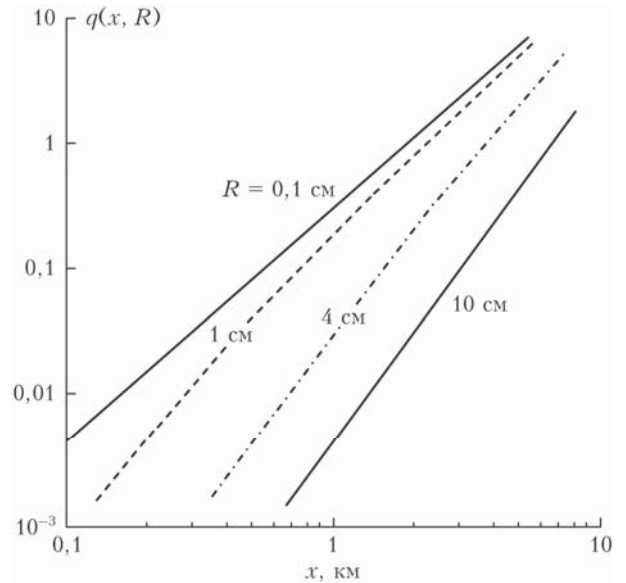


Рис. 1. Зависимости  $q(x, R)$  при значениях параметров  $\lambda = 5,32 \cdot 10^{-7}$  м,  $C_n^2 = 10^{-14}$  м<sup>-2/3</sup> и радиусов приемной апертуры  $R$ , указанных у кривых

При малых, по сравнению с масштабом  $r_F$ , значениях радиуса  $R$  из формулы (8) следует приближение точечного приемника, при больших значениях  $R \gg r_F$  – геометро-оптическое приближение, в котором величина  $q(x, R, 0)$  не зависит от волнового числа  $k_0$ . При этом величина  $q$  уменьшается пропорционально  $(R/r_F)^{-7/3}$  с увеличением радиуса  $R$ .

На рис. 2 приведены графики зависимостей фактора  $q$  от расстояния  $\rho_0$  между центрами приемных апертур. При малых значениях отношений  $R/r_F$ , как известно, положение  $\rho_{0,0}$ , при котором функция  $q(\rho_0)$  обращается в нуль, определяется значением радиуса Френеля  $r_F$  и равно  $\rho_{0,0} \approx 4,5 r_F$ , что подтверждает и рис. 2, а. При больших значениях отношения  $R/r_F$  положение нуля функции  $q(\rho_0)$

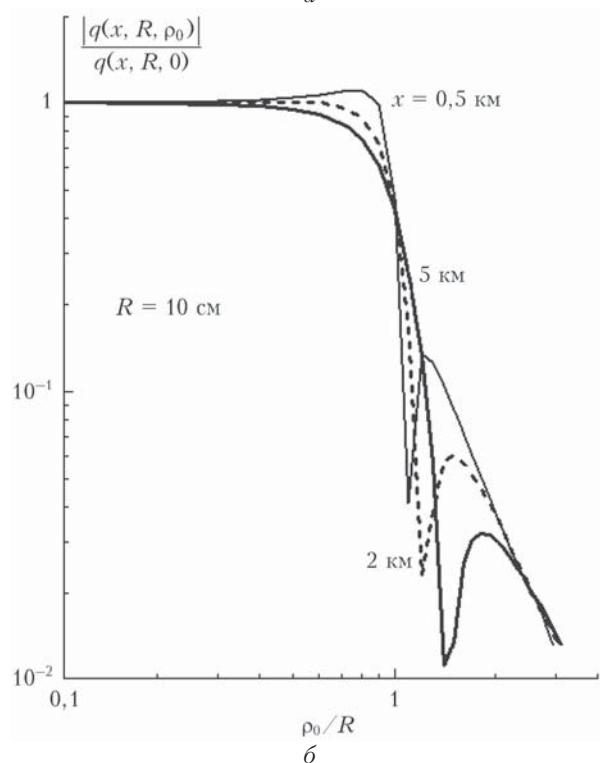
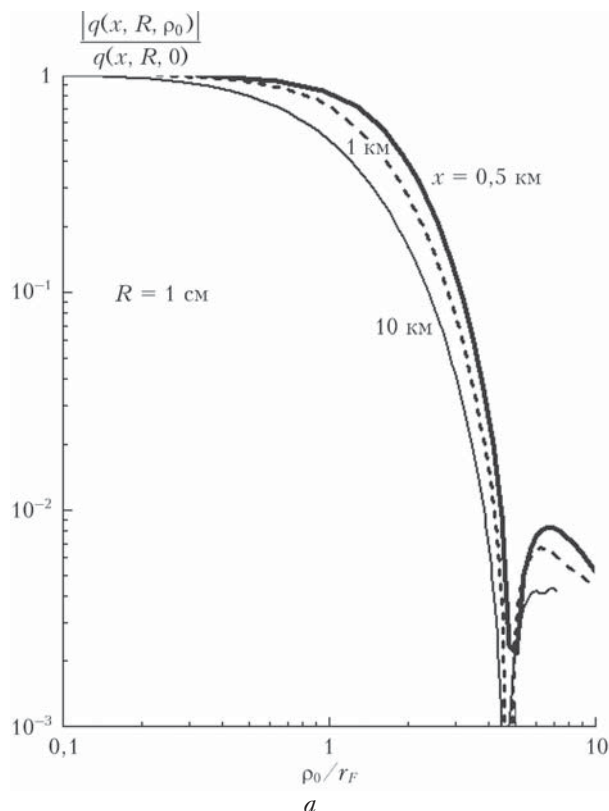


Рис. 2. Нормированные модули функций  $q(x, R, \rho_0)$  для радиусов апертуры  $R$ , равных 1 (а) и 10 см (б). У кривых указаны расстояния  $x$  от приемника до зондируемых областей. Масштабы Френеля  $r_F$  для расстояний 0,5; 1; 2; 5 и 10 км равны соответственно 0,6; 0,9; 1,3; 2,0 и 2,8 см. Функции  $q$  знакопеременны. За точками пересечения с горизонтальной осью ( $\rho_0 \approx 4,5r_F$  при  $R = 1$  см и  $\rho_0 \approx 1,3R$  при  $R = 10$  см) они отрицательны на расчетных участках

приблизительно равно радиусу  $R$ . При  $R = 10$  см, в частности, как видно из рис. 2, б, значение  $\rho_{0,0} \approx 1,3R$ .

Положение  $\rho_{0,0}$  в последнем случае слабо меняется при изменении расстояния  $x$  до зондируемой области. Отметим, что отрицательный «хвост» зависимости  $q(\rho_0)$  при радиусе апертуры  $R = 10$  см может составлять примерно 3–10% при сдвигах приемных апертур  $R \leq \rho_0 \lesssim 2R$ .

Отметим также, что при больших апертурах  $R$  максимум функции  $q(\rho_0)$  может располагаться не при совмещенных апертурах ( $\rho_0 = 0$ ). При  $R = 10$  см,  $x = 0,5$  км, например, максимум зависимости  $q(\rho_0)$  расположен при  $\rho_0 \approx 0,8R$ .

## 2. Интегральное уравнение

В предположении о том, что смещение апертур  $\rho_0$  достаточно велико, такое, что можно считать  $q(x, R, \rho_0) = 0$ , из измерений мощности на двух приемных апертурах можно определить фактор  $q(x, R, 0) = P(x, R, 0)/P(x, R, \rho_0) - 1$ . Из соотношений (2) и (3) для этой величины следует формула

$$q(x) = 16\pi k_0^2 \int_0^x d\xi \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\kappa_{\perp}, \xi) \left[ 1 - \cos \left[ \frac{\kappa_{\perp}^2 \xi (x - \xi)}{k_0 x} \right] \right] \frac{x}{\xi R k_{\perp}} J_1 \left( \frac{\xi R}{x} k_{\perp} \right) d^2 \kappa_{\perp}. \quad (10)$$

(В последующих формулах аргументы  $R$  и  $\rho_0$  функции  $q$  будем опускать).

Формулу (10) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно спектра  $\Phi_n(\kappa, x)$ . Это уравнение то же самое, что и уравнение (2) работы [8]. Отличие заключается лишь в том, что уравнение (10) записано в виде уравнения Вольтерра первого рода, а не уравнения Фредгольма, как в работе [8].

Спектр  $\Phi_n(\kappa, x)$ , в общем случае, определяется такими параметрами, как структурная постоянная  $C_n^2$ , показатель  $\gamma$  степенного участка спектра  $\Phi_n(\kappa, x)$  для того интервала, который определяет флуктуации мощности рассеянного света на приемнике, коэффициент анизотропии, внутренний масштаб турбулентности. Названные четыре параметра в случае «кластерной» или облачной структуры турбулентности, а также при наличии областей интенсивной турбулентности ясного неба могут быть функциями координаты  $x$ .

Конечно, восстановление четырех зависимостей из измерений одной функции  $q(x)$  — это нереальная задача. При постановке обратных задач обычно принимается ряд априорных допущений. В данной работе полагается, что спектр  $\Phi_n(\kappa, x)$  является изотропным, степенным, с постоянным по трассе показателем степени  $\gamma$ , т.е. имеет вид

$$\Phi_n(\kappa, x) = \hat{C}_{n,\gamma}^2(x) |\kappa|^{-\gamma}, \quad (11)$$

Параметр спектра  $\hat{C}_{n,\gamma}^2$  в этой формуле помечен галочкой, чтобы отличать его от параметра  $C_{n,11/3}^2$  — структурной функции флуктуаций  $n$  Колмогорова—Обухова [14].

Обозначим  $y(x) = \hat{C}_{n,\gamma}^2(x)/\hat{C}_{n,\gamma}^2(0)$ . Формула (10) при спектре (11) принимает вид

$$q(x) = \int_0^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad (12)$$

где через  $K(x, \xi)$  обозначено ядро интегрального уравнения:

$$K(x, \xi) = A \int_0^\infty \kappa_\perp^{-\gamma} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\xi(x-\xi)}{k_0 x} \kappa_\perp^2\right) \right\} \frac{x}{\xi R} J_1\left(\frac{\xi R}{x} \kappa_\perp\right) d\kappa_\perp \quad (13)$$

( $A = 16\pi^2 k_0^2 \hat{C}_{n,\gamma}^2(0)$  — постоянная).

Введем обозначение  $Q(x, \xi) = \frac{x}{k_0 R^2} \frac{x-\xi}{\xi}$  и перейдем в интеграле (13) к новой переменной интегрирования  $t = \frac{R\xi}{x} \kappa_\perp$ . Тогда формула для ядра принимает вид

$$K(x, \xi) = A \left(\frac{R\xi}{x}\right)^{\gamma-2} F[Q(x, \xi)]. \quad (14)$$

Здесь

$$F(Q) = \int_0^\infty |t|^{-\gamma} \exp[-l_e^2 t^2] [1 - \cos(Q t^2)] J_1(t) dt. \quad (15)$$

В формулу (15) добавлена гауссова функция  $\exp[-l_e^2 t^2]$  с фиктивным внутренним масштабом  $l_e$  для приведения интеграла к табличному: интеграл (15) согласно справочнику [15] равен

$$F(Q) = \frac{1}{4} \Gamma\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \times \left[ l_e^{\gamma-2} - \operatorname{Re} \left\{ [l_e^2 + iQ]^{\frac{\gamma}{2}-1} \Phi\left(1 - \frac{\gamma}{2}; 2; -\frac{i}{4[l_e^2 + iQ]}\right) \right\} \right], \quad (16)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция;  $i$  — мнимая единица;  $\operatorname{Re}(z)$  — реальная часть числа  $z$ ;  $\Phi(\alpha; \beta; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция.

Функция  $F(Q)$ , вычисленная при значениях параметров  $\gamma = 11/3$  и  $l_e = 10^{-10}$ , и отношение  $u(Q) = F(Q)/F_0(Q)$

$$(F_0(Q) = \frac{0,5177Q^2}{(1+1,36Q^2)^{7/12}} - \text{реперная функция}) \quad (17)$$

представлены на рис. 3. Функция  $F_0(Q)$  совпадает с функцией  $F(Q)$  с относительной точностью, не худшей чем  $10^{-4}$ , при малых ( $Q \leq 0,001$ ) и больших ( $Q \geq 1000$ ) значениях аргумента.

Из рис. 3, б видно, что функция  $u(Q) = F(Q)/F_0(Q)$  является осциллирующей. Период осцилляций уменьшается с уменьшением аргумента

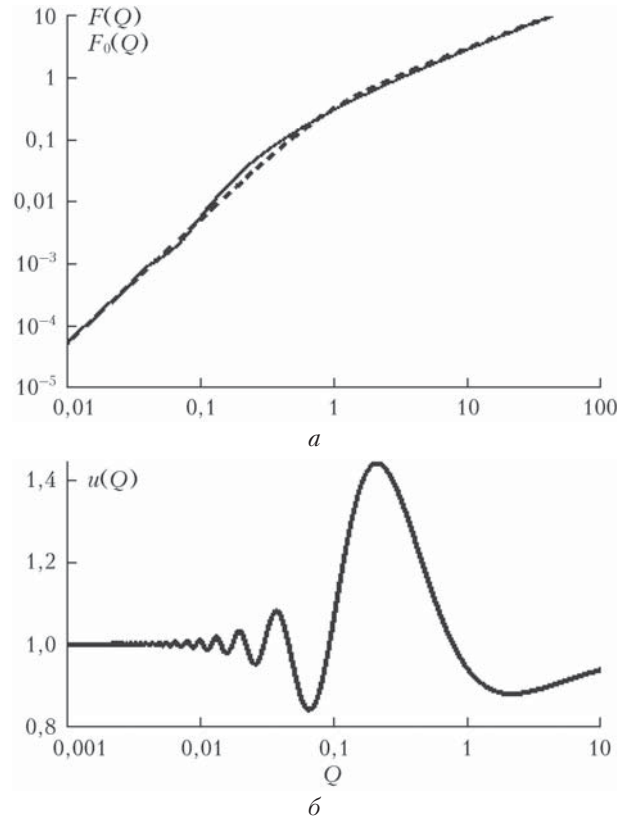


Рис. 3. Функция  $F(Q)$  — тонкая сплошная линия, и реперная функция  $F_0(Q)$ , определяемая формулой (17), — штриховая линия (а); функция  $u(Q) = F(Q)/F_0(Q)$  — сплошная линия (б)

в соответствии с асимптотической формулой  $\Phi\left(1 - \frac{\gamma}{2}; 2; -\frac{i}{4Q}\right) \sim \exp\left(-\frac{i}{4Q}\right)$  при  $Q \ll 1$ .

Вследствие осцилляций функции  $u(Q)$  осциллирующими являются как сама функция  $F(Q)$ , так и определяемые ею ядро интегрального уравнения

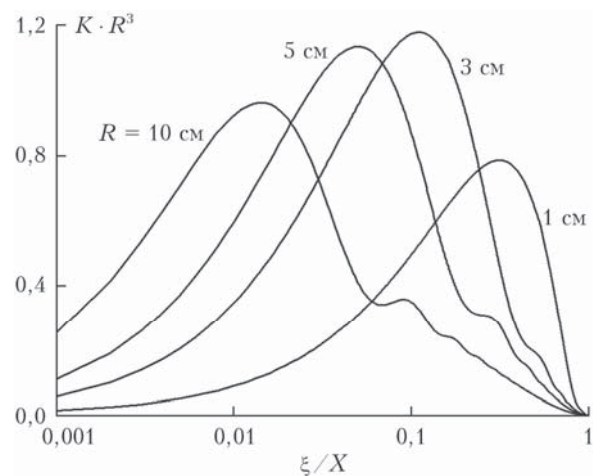


Рис. 4. Пример зависимостей произведения  $K(x, \xi, R) \cdot R^3$  (произвольные единицы) от радиусов приемной апертуры  $R$  (указаны у кривых). Рассчитаны для значения расстояния  $X = 500$  м

и «измеряемая» функция  $q(x)$ . Эти осцилляции на рис. 3, а для самой функции  $F(Q)$  незаметны из-за их относительной малости. Как осцилляции функции  $u(Q)$  сказываются на ядре интегрального уравнения  $K(x, \xi, R)$ , определяемого формулами (14)–(16), демонстрирует рис. 4, который показывает существенную трансформацию вида ядра с изменением радиуса  $R$ . В случае точечного приемника максимум ядра находится посередине трассы (при  $\xi = 0,5x$ ). При увеличении  $R$  максимум сдвигается к приемнику и при  $R = 5$  см, например, он находится на расстоянии приблизительно в 10 раз меньшем, чем в случае точечного приемника. При значениях  $R \geq 3$  см заметны осцилляции ядра. Их амплитуда растет с увеличением радиуса приемной апертуры.

### 3. Асимптотические решения

В предельных случаях малых и больших радиусов апертур  $R$  ядро  $K$  является степенным:

$$K(x, \xi) = K_p(x, \xi) = A_p(\gamma) \left[ \frac{\xi(x - \xi)}{x} \right]^{(1 - \frac{\gamma}{2})} \quad \text{при } R \ll \sqrt{x/k_0}, \quad (18)$$

где  $A_p(\gamma) = 16\pi^2 [-\Gamma(1 - \gamma/2) \sin(\pi\gamma/4)] k_0^{(3 - \frac{\gamma}{2})} \hat{C}_{n,\gamma}^2(0)$ ;

$$K(x, \xi) = K_g(x, \xi) = A_g(\gamma, R) \left[ \frac{\xi}{x} \right]^{\gamma - 4} (x - \xi)^2 \quad \text{при } R \gg \sqrt{x/k_0}, \quad (19)$$

$$A_g(\gamma, R) = 16\pi^2 2^{4 - \gamma} \frac{\Gamma((7 - \gamma)/2)}{\Gamma((\gamma - 3)/2)} \frac{1}{R^{\gamma - 6}} \hat{C}_{n,\gamma}^2(0). \quad (20)$$

Индексом  $p$  обозначена асимптотика ядра для точечного приемника, индексом  $g$  – геометрооптическая асимптотика.

Интегральное уравнение в случае применимости асимптотик (18) и (19) принимает вид

$$q(x) = A_p(\gamma) \int_0^x \left[ \frac{\xi(x - \xi)}{x} \right]^{(\gamma/2 - 1)} y(\xi) d\xi \quad (21)$$

для точечной апертуры,

$$q(x) = A_g(\gamma, R) \int_0^x \left[ \frac{\xi}{x} \right]^{\gamma - 4} (x - \xi)^2 y(\xi) d\xi \quad (22)$$

для апертуры большого радиуса. Оба этих уравнения являются обобщенными уравнениями Абеля. В случае дифференцируемых функций  $q(x)$  решением уравнения (21) является [16]:

$$y(x)B_p = \frac{1}{x^\alpha} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d}{d\xi} (\xi^\alpha q(\xi)) \frac{d\xi}{(x - \xi)^\alpha}, \quad (23)$$

или в терминах дробных производных [17]:

$$y(x)B_p = \Gamma(1 - \alpha) \frac{1}{x^\alpha} \frac{D^{\alpha+1}}{Dx^{\alpha+1}} (x^\alpha q(x)),$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} - 1, \quad B_p = A_p(\gamma) \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi(1 - \alpha))}. \quad (24)$$

Решение геометрооптического уравнения (21) при значениях показателя спектра  $\gamma$  в интервале  $3 < \gamma < 6$  выражается через обычные производные:

$$y(x) \cdot 2A_g(\gamma) = \frac{1}{x^{\gamma-4}} \frac{d^3}{dx^3} (x^{\gamma-4} q(x)). \quad (25)$$

Асимптотические решения задачи восстановления (23)–(25) являются основным результатом первой части работы. Результаты численного исследования их применимости представлены во второй части [18].

### Заключение

В качестве основных результатов работы отметим следующие. Проведены расчеты зависимости фактора усиления  $q$  от расстояния  $\rho_0$  между центрами передающей и приемной апертур конечного радиуса. Показано, что в случае больших апертур характерным масштабом убывания функции  $q$  является радиус апертуры. Отмечено, что ядро интегрального уравнения обратной задачи, сформулированное ранее Гурвичем в работе [8], является в общем случае осциллирующим. Найдены асимптотические решения (23)–(25) задачи восстановления параметров турбулентности.

1. *Виноградов А.Г., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Эффект усиления обратного рассеяния на телах, помещенных в среду со случайными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофиз. 1973. Т. 16, № 7. С. 1064–1070.
2. *Виноградов А.Г., Гурвич А.С., Каушаров С.С., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* «Закономерность увеличения обратного рассеяния волн». Свидетельство на открытие № 359. Приоритет открытия: 25 августа 1972 г. в части теоретического обоснования и 12 августа 1976 г. в части экспериментального доказательства закономерности. Государственный реестр открытий СССР // Бюлл. изобретений. 1989. № 21.
3. *Banakh V.A., Smalikhov I.N., Werner Ch.* Numerical simulation of effect of refractive turbulence on the statistics of a coherent lidar return in the atmosphere // Appl. Opt. 2000. V. 39, N 33. P. 5403–5414.
4. *Banakh V.A., Smalikhov I.N.* Определение интенсивности оптической турбулентности по обратному атмосферному рассеянию лазерного излучения // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 4. С. 300–307; *Banakh V.A., Smalikhov I.N.* Determination of optical turbulence intensity by atmospheric backscattering of laser radiation // Atmos. Ocean. Opt. 2011. V. 24, N 5. P. 457–465.
5. *Смалихо И.Н.* Расчет коэффициента усиления обратного рассеяния лазерного излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, с использованием численного моделирования // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 9. С. 796–800; *Smalikhov I.N.* Calculation of the backscatter amplification coefficient of laser radia-

- tion propagating in a turbulent atmosphere using numerical simulation // *Atmos. Ocean. Opt.* 2013. V. 26, N 2. P. 135–139.
6. *Банах В.А.* Усиление средней мощности обратно рассеянного в атмосфере излучения в режиме сильной оптической турбулентности // *Оптика атмосфер. и океана.* 2012. Т. 25, № 10. С. 857–862; *Banakh V.A.* Enhancement of the laser return mean power at the strong optical scintillation regime in a turbulent atmosphere // *Atmos. Ocean. Opt.* 2013. V. 26, N 2. P. 90–95.
  7. *Гурвич А.С.* Лидарное зондирование турбулентности на основе эффекта усиления обратного рассеяния // *Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана.* 2012. Т. 48, № 6. С. 655–665.
  8. *Гурвич А.С.* Лидарное позиционирование областей повышенной турбулентности ясного неба // *Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана.* 2014. Т. 50, № 2. С. 166–174.
  9. *Гурвич А.С., Фортус М.И.* Лидарное зондирование оптической характеристики турбулентности в атмосфере // *Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана.* 2016. Т. 52, № 2. С. 187–199.
  10. *Банах В.А., Разенков И.А., Смалыхо И.Н.* Аэрозольный лидар для исследования усиления обратного атмосферного рассеяния. I. Компьютерное моделирование // *Оптика атмосфер. и океана.* 2015. Т. 28, № 1. С. 5–11.
  11. *Банах В.А., Разенков И.А.* Аэрозольный лидар для исследования усиления обратного атмосферного рассеяния. II. Конструкция и эксперимент // *Оптика атмосфер. и океана.* 2015. Т. 28, № 2. С. 113–119.
  12. *Банах В.А., Разенков И.А.* Лидарные измерения усиления обратного рассеяния // *Оптика и спектроскопия.* 2016. Т. 120, № 2. С. 339–348.
  13. *Воробьев В.В., Виноградов А.Г.* Влияние фоновой турбулентности в лидарных исследованиях турбулентности ясного неба // *Оптика атмосфер. и океана.* 2013. Т. 26, № 12. С. 1015–1022; *Vorob'ev V.V., Vinogradov A.G.* Effect of background turbulence in lidar investigations of clear air turbulence // *Atmos. Ocean. Opt.* 2014. V. 27, N 2. P. 134–141.
  14. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
  15. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Изд-во физ. мат. лит., 1963. 1100 с.
  16. *Манжиров А.В., Полянин А.Д.* Методы решения интегральных уравнений: Справочник. М.: Факториал, 1999. 272 с.
  17. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
  18. *Воробьев В.В.* О применимости асимптотических формул восстановления параметров «оптической» турбулентности из данных импульсного лидарного зондирования. II. Результаты численного моделирования // *Оптика атмосфер. и океана.* 2016. Т. 29, № 11 (в печати).

**V.V. Vorob'ev. The validity of asymptotic formulas for recovery of "optical" turbulence parameters from data of the lidar sensing. I. Equations.**

Asymptotic solutions of the problem of reconstructing the distribution of the structural characteristics of the refractive index fluctuations from the measurement data of the backscatter enhancement effect are derived. Solutions are expressed through fractional derivatives of the backscattering gain in the case of small aperture receiver, or through the ordinary derivatives in the case of receivers with a large aperture. The properties of the integral equation kernel are studied in detail, from which the asymptotic formulas follow. Attention is drawn to the fact that the kernel is oscillating in general. Kernel oscillations little impact the value of the backscattering enhancement, but their impact can be significant on the derivatives of this factor.