

М.С. Бирюлина, В.В. Розанов

**ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОЗОЛЯ ПО РАЗМЕРАМ ДЛЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ**

Предложен метод построения корреляционной матрицы распределения аэрозольных частиц по размерам, основанный на использовании ряда аналитических моделей функций распределения стратосферного аэрозоля. Рассмотрены возможности использования собственных векторов этой матрицы в качестве модельного базиса для расчета оптических характеристик полидисперсного аэрозоля на примере коэффициентов ослабления.

1. При решении обратных задач дистанционного зондирования атмосферного аэрозоля, в силу их некорректности, для получения устойчивых к случайным ошибкам измерений оценок функции распределения частиц по размерам требуется задание в том или ином виде априорной информации об искомой функции.

Наиболее естественным было бы привлечение статистической информации, отражающей изменчивость и взаимосвязь интервалов распределения частиц по размерам, представленную в виде корреляционной матрицы для функции распределения частиц, заданной в гистограммной форме. Использование корреляционной матрицы представляет интерес и при расчетах поля отраженного и рассеянного излучения, поскольку позволяет получить естественную изменчивость коэффициентов аэрозольного ослабления и рассеяния [1]. При интерпретации лидарных измерений наличие корреляционной матрицы дает возможность построить корреляционные связи между коэффициентами аэрозольного ослабления и обратного рассеяния. Следует отметить возможности использования собственных векторов корреляционной матрицы в качестве базиса для аппроксимации функций распределения по размерам аэрозольных частиц, что может послужить основой инженерной методики расчета оптических характеристик полидисперсного аэрозоля.

В связи с этим ниже предлагается эвристический подход к построению корреляционной матрицы распределения аэрозольных частиц по размерам, основанный на использовании ряда аналитических моделей функций распределения стратосферного аэрозоля [5], и исследование возможностей ее использования для решения некоторых из перечисленных выше задач.

2. Рассмотрим методику построения модельной корреляционной матрицы. Введем для сокращения записи следующее обозначение для модельных функций распределения из [5] —  $f_s(r, q_t, p_\kappa)$ , где индексы имеют следующий смысл:  $s$  — задает определенный аналитический вид функции распределения;  $r$  — радиус частиц;  $q_t$  — параметры, задаваемые точечной оценкой,  $t$  — их количество, зависящее от  $s$ ;  $p_\kappa$  — параметры, задаваемые интервалом изменений,  $\kappa$  — количество подынтервалов, на которые разбивался весь интервал изменения  $p_\kappa$ . Значения  $f_s(r, q_t, p_\kappa)$ , использованные в расчетах, представлены в табл. 1. Там же приведены значения параметра  $\bar{X}$ , характеризующего отношение концентраций частиц с радиусом больше 0,15 мкм к концентрации частиц с радиусом больше 0,25 мкм ( $N_{0,15}/N_{0,25}$ ), и  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение этого отношения, которое предполагается случайной величиной с нормальным распределением.

Расчет функций распределения для всех наборов значений параметров позволяет сформировать априорный модельный ансамбль, состоящий, например, из 900 модельных функций распределения, и получить среднюю по всему модельному ансамблю функцию распределения:

$$\bar{f}_i \equiv \bar{f}(r_i) = \frac{1}{L} \sum_{s=1}^4 \sum_{t=1}^{T(s)} \sum_{\kappa=1}^{100} f_s(r_i, q_t, p_\kappa) \omega(s, t, \kappa), \quad (1)$$

где  $L = 900$ ;  $T(s)$  — количество параметров, задаваемых точечной оценкой для различных функций распределения (см. табл. 1),  $\omega(s, t, \kappa)$  — весовой коэффициент. Для  $s = 4$  под  $q_t$  будем понимать составной параметр ( $q'_t, q''_t$ ). На основе построенного модельного ансамбля  $i, j$ -й элемент корреляционной матрицы функции распределения частиц по размерам вычислялся следующим образом:

$$K_{ij} = \frac{1}{L-1} \sum_{s=1}^4 \sum_{t=1}^{T(s)} \sum_{\kappa=1}^{100} \omega(s, t, \kappa) (f_s(r_i, q_t, p_\kappa) - \bar{f}_i) (f_s(r_j, q_t, p_\kappa) - \bar{f}_j), \quad (2)$$

где  $w(s, t, \kappa)$  – весовой коэффициент.

Таблица 1

Модельные функции распределения  $f_s(r, q_i, p_\kappa)$  и значения параметров, используемые в расчетах корреляционной матрицы

$s$	$f_s(r, q_i, p_\kappa)$	Средние значения параметров $q_i$ и $p$	Диапазон изменений параметра $p$
1. $T=1$	$\frac{A}{r \ln \sigma_g} \exp \left[ -\frac{\ln^2(r/r_g)}{2 \ln^2 \sigma_g} \right]$	$p=r_g=0,0725$ мкм $q_1=\sigma_g=1,86$ $\bar{X}=4,9, \sigma=3,7$	$0,412 \div 0,028$ мкм
2. $T=0$	$A \exp[-(r/r_0)]$	$p=r_0=0,075$ мкм $\bar{X}=3,8, \sigma=2,6$	$0,548 \div 0,0361$ мкм
3. $T=3$	$A \exp \left[ -\frac{\ln^2(r/r_m)}{2 \ln^2 \sigma_g} \right]$	$p=r_m=0,035$ мкм $q_1=\sigma_g=2,0$ $\bar{X}=5,0, \sigma=3,8$	$0,263 \div 0,011$ мкм
		$p=0,1$ мкм $q_2=1,8$ $\bar{X}=2,7, \sigma=1,5$	$0,288 \div 0,025$ мкм
		$p=0,035$ мкм $q_3=1,72$ $\bar{X}=13, \sigma=2$	$0,296 \div 0,035$ мкм
		$p=b=20$ мкм <sup>-1</sup> $q'_1=\alpha=2$ $q''_1=\gamma=1$ $\bar{X}=3,4, \sigma=2,2$	$4,079 \div 36,527$ мкм <sup>-1</sup>
4. $T=4$	$Ar^\alpha \exp[-br^\tau]$	$p=18$ мкм <sup>-1</sup> $q'_2=1, q''_2=1$ $\bar{X}=4,1, \sigma=2,6$	$4,079 \div 32,119$ мкм <sup>-1</sup>
		$p=8$ мкм <sup>-1</sup> $q'_3=1, q''_3=1/2$ $\bar{X}=3,2, \sigma=2$	$5,689 \div 30,867$ мкм <sup>-1</sup>
		$p=16$ мкм <sup>-1</sup> $q'_4=1, q''_4=1/2$ $\bar{X}=3,2, \sigma=2$	$5,689 \div 30,867$ мкм <sup>-1</sup>

Значения коэффициента  $w(s, t, \kappa)$  определялись из следующих соображений. Предполагалось, что максимальный вес при каждом  $s$  должны иметь те реализации функций распределения, для которых рассчитанные значения отношения  $N_{0,15}/N_{0,25}$  близки к средним, приведенным в табл. 1. Учитывая сделанное выше предположение о нормальности распределения отношения  $N_{0,15}/N_{0,25}$ , для вычисления  $w(s, t, \kappa)$  можно воспользоваться следующим выражением:

$$w(s, t, \kappa) = C \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (X_{s,t,\kappa} - \bar{X})^2 \right], \quad (3)$$

где  $C$  – нормировочный коэффициент, а  $X_{s,t,\kappa}$  – вычисленное значение отношения  $N_{0,15}/N_{0,25}$  для соответствующей реализации функции распределения по размерам.

Предлагаемый подход был реализован для интервала спектра размеров от  $r_1 = 0,01$  мкм до  $r_2 = 2$  мкм с равномерным по  $\ln r$  разбиением всего интервала на 30 подынтервалов.

3. Перейдем к анализу свойств построенной модельной корреляционной матрицы. На рис. 1, а приведена в относительных единицах ( $\sqrt{K_{ii}}/\bar{f}_i$ ) диагональ матрицы  $K$ , демонстрирующая изменчивость функций распределения в модельном априорном ансамбле для различных интервалов размеров частиц. Отметим, что изменчивость максимальна на границах рассматриваемого интервала и достига-

ет в относительных единицах — 300% при  $r \sim 2$  мкм и  $\sim 150\%$  при  $r \sim 0,01$  мкм. Минимальные значения изменчивости приходятся на интервалы размеров  $\sim 0,1$  мкм и составляют  $\sim 42\%$ .

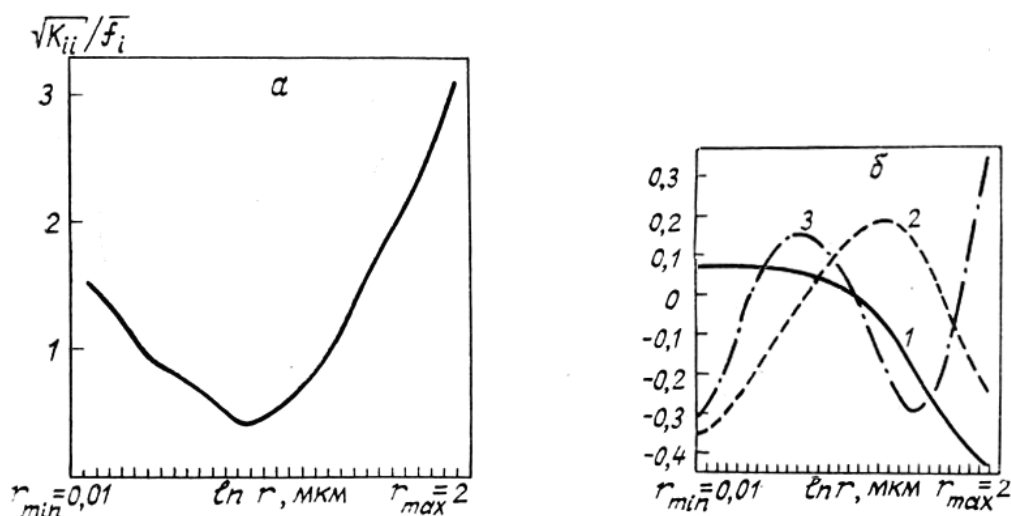


Рис. 1. Диагональ корреляционной матрицы распределения аэрозольных частиц по размерам (а); первых три собственных вектора корреляционной матрицы (б): 1 — первый; 2 — второй; 3 — третий

Рассмотрим далее собственные векторы и собственные числа построенной корреляционной матрицы. Результаты расчетов показывают, что собственные числа быстро убывают: 6-е собственное число на два порядка меньше первого ( $\lambda_1 = 42,73$ ), а 8-е убывает еще на порядок. Это обстоятельство указывает на возможность использования для представления всего модельного априорного ансамбля базиса, построенного на 6–8 первых собственных векторах. Будем его называть в дальнейшем модельным базисом. На рис. 1, б в качестве иллюстрации показано поведение 3-х собственных векторов ( $\lambda_1 = 42,73$ ,  $\lambda_2 = 18,88$ ,  $\lambda_3 = 4,93$ ), а в табл. 2 представлены значения 8-ми первых собственных векторов и соответствующих собственных чисел, позволяющие воспроизвести с достаточной точностью модельную корреляционную матрицу, а также средняя по ансамблю функция распределения  $\bar{f}(r_i)$  (1).

Аппроксимационные свойства построенного модельного базиса изучались как для адекватных функций распределения (входящих в модельный ансамбль), так и для неадекватных.

В качестве примера адекватных функций распределения были рассмотрены логарифмически нормальное и гамма-распределения ( $s = 3$  и  $4$  в табл. 1) при значениях параметров, отражающих ситуации предельно «чистой», фоновой и замутненной стратосферы. Неадекватные функции распределения были представлены бимодальными логарифмически нормальными распределениями при различном положении второй моды распределения:

$$dN/d \ln r = \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{\sqrt{2\pi} \sigma_g} \exp \left[ -\frac{\ln^2(r/r_{m_i})}{2\sigma_g^2} \right]. \quad (4)$$

Эти функции распределения могут иметь место для частиц тропосферного аэрозоля океанических районов [3].

На рис. 2, а, б, в, г, д, е приведены соответствующие функции распределения и результаты их аппроксимации модельным базисом. Из рисунков следует, что построенный модельный базис хорошо аппроксимирует как адекватные, так и рассмотренные неадекватные функции распределения. Увеличение ошибок аппроксимации имеет место только на «хвостах» одномодальных распределений, модальные радиусы которых лежат на границах интервалов, представленных в табл. 1. Следует, однако, отметить, что значения самих функций распределения на «хвостах» убывают почти на два порядка относительно их максимального значения. В силу этого ошибки аппроксимации в этих интервалах размеров не должны играть существенной роли.

4. Перейдем к рассмотрению возможностей использования построенного модельного базиса для расчетов оптических характеристик полидисперсного аэрозоля на примере коэффициентов ослабления. Учитывая известное соотношение [2], для вычисления коэффициентов ослабления полидисперсного аэрозоля можно использовать следующее выражение:

$$\alpha_{\text{ex}}(\lambda) = \sum_{i=0}^8 b_i a_i(\lambda), \quad (5)$$

где  $b_i$  — коэффициенты разложения заданной функции распределения частиц по модельному базису,

а  $a_i(\lambda)$  дается следующим выражением:

$$a_i(\lambda) = \int_{r_i}^{r_2} \pi r^2 Q_{ex}(r, m, \lambda) \bar{f}(r) \xi_i(r) dr, \quad i = 0, \dots, 8,$$

$Q_{ex}(r, m, \lambda)$  — фактор эффективности ослабления для частицы радиусом  $r$ , показателя преломления  $m$  и длины волны  $\lambda$ ;  $\xi_i(r)$  — функции модельного базиса;  $b_0 = 1$ ;  $\xi_0(r) = 1$ .

Таблица 2

Собственные векторы, собственные числа и средняя по ансамблю функция распределения по размерам

№	1	2	3	4	5	6	7	8	$\bar{l}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\chi$	42,7	10,9	4,93	2,21	0,753	0,234	8,62—2	2,45—2	
1	7,10—2	—0,354	—0,313	0,286	—0,231	—0,367	—0,341	0,244	3,61
2	7,13—2	—0,347	—0,282	0,216	—0,124	—0,116	—3,07—2	—7,87—2	4,03
3	7,12—2	—0,330	—0,236	0,129	—1,76—2	8,70—2	0,174	—0,223	4,51
4	7,06—2	—0,303	—0,176	3,30—2	7,80—2	0,219	0,256	—0,209	5,04
5	6,95—2	—0,269	—0,109	—6,24—2	0,153	0,273	0,226	—9,35—2	5,59
6	6,80—2	—0,231	—4,10—2	—0,146	0,199	0,255	0,124	4,66—2	6,10
7	6,60—2	—0,193	2,03—2	—0,209	0,212	0,184	—2,28—3	0,144	6,49
8	6,34—2	—0,154	7,13—2	—0,244	0,193	8,41—2	—0,108	0,162	6,67
9	6,02—2	—0,117	0,110	—0,250	0,146	—2,06—2	—0,162	9,45—2	6,59
10	5,61—2	—8,07—2	0,135	—0,227	7,65—2	—0,109	—0,151	—3,23—2	6,25
11	5,09—2	—4,42—2	0,147	—0,176	—6,07—3	—0,164	—7,79—2	—0,173	5,68
12	4,43—2	—7,51—3	0,146	—0,105	—8,86—2	—0,172	3,56—2	—0,276	4,98
13	3,63—2	2,91—2	0,133	—2,07—2	—0,156	—0,131	0,156	—0,297	4,22
14	2,66—2	6,45—2	0,109	6,47—2	—0,194	—4,62—2	0,243	—0,222	3,49
15	1,51—2	9,72—2	7,62—2	0,140	—0,191	6,26—2	0,265	—7,81—2	2,81
16	1,34—3	0,126	3,44—2	0,196	—0,145	0,168	0,209	7,70—2	2,20
17	—1,52—2	0,149	—1,50—2	0,226	—6,12—2	0,243	8,98—2	0,174	1,68
18	—3,52—2	0,167	—7,08—2	0,226	4,72—2	0,263	—5,68—2	0,164	1,24
19	—5,95—2	0,177	—0,131	0,196	0,160	0,215	—0,177	4,30—2	0,884
20	—8,84—2	0,178	—0,190	0,136	0,250	0,105	—0,216	—0,133	0,612
21	—0,122	0,169	—0,242	5,09—2	0,289	—3,85—2	—0,146	—0,263	0,412
22	—0,159	0,148	—0,276	—4,74—2	0,256	—0,166	1,20—2	—0,254	0,270
23	—0,198	0,116	—0,286	—0,142	0,151	—0,223	0,181	—8,98—2	0,173
24	—0,239	7,31—2	—0,266	—0,215	—4,39—3	—0,179	0,266	0,131	0,108
25	—0,279	2,25—2	—0,214	—0,248	—0,165	—4,56—2	0,205	0,254	6,49—2
26	—0,317	—3,35—2	—0,131	—0,228	—0,276	0,122	1,93—2	0,174	3,76—2
27	—0,352	—9,15—2	—2,22—2	—0,148	—0,288	0,239	—0,188	—6,62—2	2,09—2
28	—0,382	—0,148	0,104	—1,39—2	—0,170	0,224	—0,271	—0,273	1,11—2
29	—0,408	—0,200	0,236	0,158	6,68—2	4,24—2	—0,118	—0,208	5,61—3
30	—0,429	—0,246	0,362	0,340	0,373	—0,272	0,275	0,253	2,70—3

Таким образом, если для заданного набора длин волн  $\lambda$  рассчитать коэффициенты  $a_i(\lambda)$ , то вычисление оптических характеристик при заданном значении показателя преломления не требует дополнительных расчетов по теории Ми и сводится лишь к вычислению суммы (5). Отметим, что рассматриваемый подход к расчетам оптических характеристик близок к предложенному в [4] спектральному методу. Однако в рассматриваемом случае возможно более детальное представление функций распределения.

Точность приближения (5) для расчетов коэффициентов ослабления исследовалась для указанных выше адекватных и неадекватных модельному априорному ансамблю функций распределения. Коэффициенты ослабления рассчитывались для 3-х длин волн  $\lambda_1 = 0,3$ ,  $\lambda_2 = 0,6$ ,  $\lambda_3 = 1,0$  мкм и показателя преломления  $m = 1,44 - 0,0i$ .

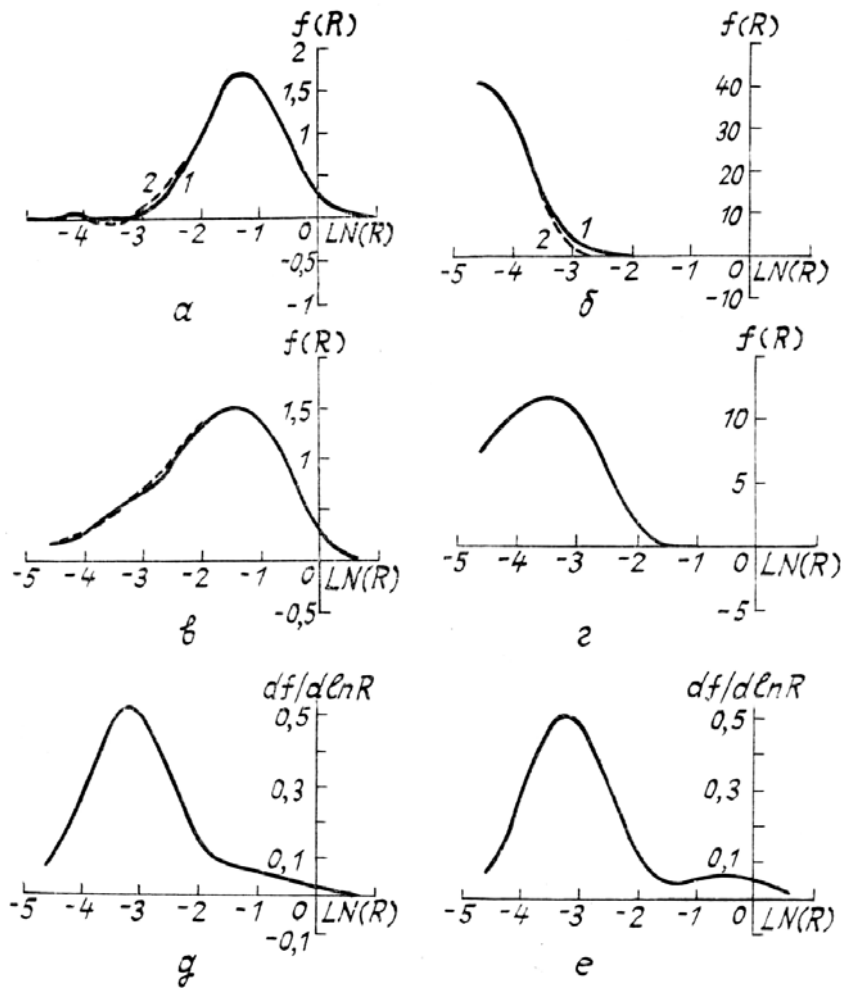


Рис. 2. Примеры аппроксимации различных функций распределения модельным базисом: (сплошная) — истинная функция распределения; (штриховая) — аппроксимация модельным базисом; (а) распределение  $s = 2$  (см. табл. 1) с параметрами  $r_m = 0,263$  мкм,  $\sigma_g = 2$ ; (б) —  $s = 2$ ,  $r_m = 0,011$  мкм,  $\sigma_g = 2$ ; (в) —  $s = 4$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $b = 4,079$ ; (г) —  $s = 4$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $b = 32,119$ ; (д) — бимодальное распределение (см. (4)) с параметрами:  $\sigma_g = 2$ ;  $C_1 = 0,9$ ;  $C_2 = 0,1$ ;  $r_{m_1} = 0,04$  мкм;  $r_{m_2} = 0,3$  мкм; (е) — бимодальное с параметрами:  $\sigma_g = 2$ ;  $C_1 = 0,9$ ;  $C_2 = 0,1$ ;  $r_{m_1} = 0,04$  мкм;  $r_{m_2} = 0,6$  мкм

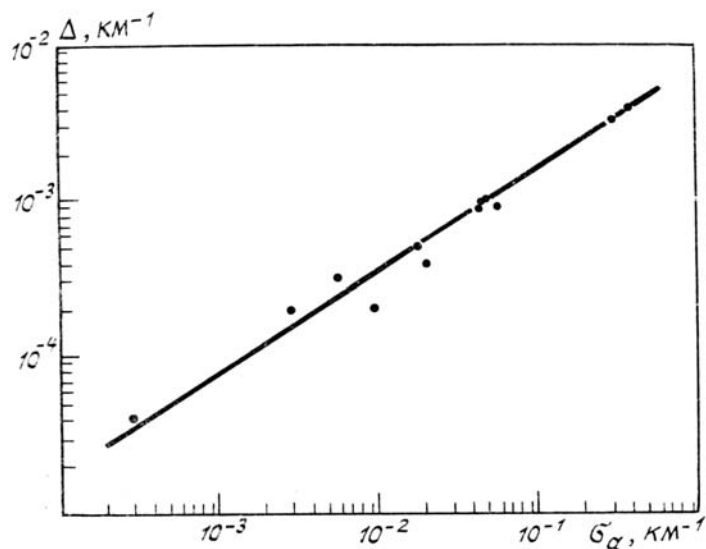


Рис. 3. Зависимость ошибки расчета коэффициента ослабления от его величины

На рис. 3 представлены абсолютные ошибки расчета коэффициента ослабления  $\Delta = \alpha_{\text{ex}}^t - \alpha_{\text{ex}}$ , где  $\alpha_{\text{ex}}^t$  — коэффициент ослабления, рассчитанный непосредственным интегрированием заданной функции распределения  $\alpha_{\text{ex}}$  — в соответствии с (5). Абсолютные ошибки  $\Delta$  приведены в зависимости от  $\alpha_{\text{ex}}$  при концентрации частиц, равной  $100 \text{ см}^{-3}$ .

Таким образом,  $\Delta(\alpha_{\text{ex}})$  демонстрирует влияние ошибок в аппроксимации функции распределения частиц по размерам в зависимости от модельного радиуса распределения, а для бимодальных распределений — фактически от взаимного расположения мод. Анализ данных, представленных на рис. 3, показывает, что зависимость  $\Delta$  от  $\alpha_{\text{ex}}$  близка к линейной в рассматриваемом интервале изменений  $\alpha_{\text{ex}}$  и для максимальных значений  $\alpha_{\text{ex}} \sim 0,4 \text{ км}^{-1}$  не превышает величины  $\sim 0,004 \text{ км}^{-1}$ .

Перечислим в заключение основные результаты, представленные в работе:

1. Построена модельная корреляционная матрица для функций распределения аэрозольных частиц по размерам.

2. Исследованы аппроксимационные свойства модельного базиса, построенного на 8-ми первых собственных векторах этой матрицы. Показано, что они достаточно хорошо аппроксимируют как адекватные исходному ансамблю, так и ряд неадекватных функций распределения.

3. Показано, что модельный базис можно использовать для расчетов коэффициентов аэрозольного ослабления. При этом максимальные ошибки расчетов не превышают  $\sim 0,004 \text{ км}^{-1}$  для рассмотренных функций распределения при концентрации частиц  $100 \text{ см}^{-3}$ .

1. Бирюлина М. С., Тимофеев Ю. М. // Исследования Земли из космоса. 1990. В печати.
2. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. Д1.: Мир, 1971. 165 с.
3. Зуев В. Е., Креков Г. М. // Современные проблемы атм. оптики. Т. 2. Л.: Гидрометеиздат, 1968.
4. Артемкин Е. Е., Смеркалов В. А. Исследование устойчивости восстановления микроструктуры аэрозоля спектрально-анализом. Тр. ИПГ, 1987. Вып. 68. С. 101–108.
5. Russell P. B., Swisler T. J., McCormick M. P., Chu W. P. et al. // J. Atmos. Sci. V. 38. № 6. P. 1279–1294.

Научно-исследовательский институт физики  
Ленинградского государственного университета (НИИФ ЛГУ),

Поступила в редакцию  
10 мая 1990 г.

**M. S. Biryulina, V. V. Rozanov. Parametrization of the Aerosol Size Distribution Functions for Direct and Inverse Problems of the Atmospheric Remote Sensing.**

A method of the aerosol size distribution correlation matrix constructing using the series of the stratospheric aerosol distribution function models is proposed. The possibility of using the matrix proper vectors as the model base for polydisperse aerosol optical characteristics calculation taking the attenuation coefficients as an example is discussed.