

А.Д. Ершов

Подавление шумовой компоненты лидарных сигналов на основе дискретного вейвлет-преобразования

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 11.06.2003 г.

Рассмотрена процедура подавления шума лидарных сигналов на основе вейвлетов. Выполнен краткий обзор кратномасштабного анализа. Показано, что дискретное вейвлет-преобразование может с успехом применяться в таких практических приложениях, как шумоподавление лидарных данных. При этом достигается достаточно эффективное подавление шума при сохранении структуры сигнала.

Введение

При лазерном зондировании атмосферы сигнал постоянно испытывает всевозможного рода искажения, обусловленные как собственными шумами аппаратуры, так и помехой фоновой составляющей атмосферы. Появление различного вида помех на входе приемного устройства ограничивает технические возможности лидара. Одним из путей повышения точности и достоверности лидарных измерений является применение алгоритмов обработки эхосигналов, позволяющих увеличить отношение сигнал-шум.

Проведенные исследования в этой области дают достаточно широкий набор различных алгоритмов обработки данных. Так, в работах [1, 2] описан алгоритм с использованием аппарата марковской фильтрации. В работах [3–5] приводятся методы выделения полезного сигнала на фоне шума с применением адаптивных алгоритмов МНК. Но появившиеся сравнительно недавно (в середине 80-х гг. XX в.) и интенсивно развивающиеся в настоящее время алгоритмы фильтрации сигналов на основе вейвлет-преобразования позволяют получать удовлетворительные результаты, даже если уровень шума превышает 100% [6]. Целью данной статьи является исследование применимости методов вейвлет-анализа для выделения полезного сигнала на фоне шума в лидарных данных.

Анализ сигналов в терминах вейвлет-преобразования делится на две разновидности: непрерывное и дискретное (диадное). Непрерывное вейвлет-преобразование в основном используется для анализа переходных процессов, обнаружения резких и скрытых изменений в сигнале, исследования нестационарностей и т.д. [7, 8]. Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) наибольшее распространение получило в прикладных задачах, например сжатие или очистка сигнала от шумов, так как может быть выполнено эффективно и без дополнительных затрат памяти компьютера при специальном выборе базисных функций (вектор коэффициентов рекур-

сивно замещает вектор исходных значений). Поскольку ДВП основывается на положениях кратномасштабного анализа (КМА), рассмотрим его основные положения.

1. Ортогональный кратномасштабный анализ

Ортогональным КМА в гильбертовом пространстве $L^2(R)$ называется последовательность замкнутых непересекающихся подпространств $V_j \subset L^2(R)$, $j \in Z$, объединение которых дает в пределе $L^2(R)$ [9–11]:

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcup_{j \in Z} V_j = L^2(R), \quad \bigcap_{j \in Z} V_j = 0;$$

для любой функции $s(t) \in V_j$ ее расширенная версия принадлежит пространству

$$V_{j+1} (s(t) \in V_j \Leftrightarrow s(2t) \in V_{j+1});$$

существует такая функция $\varphi(t)$, что

$$\{\varphi(t-k)\}_{k \in Z}, \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \neq 0 \right)$$

образуют ортонормированный базис пространства V_0 . Функцию $\varphi(t)$ называют порождающей скейлинг-функцией, или масштабирующей функцией. Так как $\varphi_{0,k}(t)$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 , то функции $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$ образуют ортонормированный базис пространства V_j (появление нормирующего множителя $2^{j/2}$ объясняется тем, что при замене переменной $t \rightarrow 2t$ норма функции уменьшается в $\sqrt{2}$ раз, что необходимо компенсировать).

Таким образом, функции базиса V_1 $\varphi(t-k)$ получаются из базиса V_0 простым двухкратным сжатием его элементов $\varphi(2t-k)$. Так как любой элемент из V_0 принадлежит и V_1 , то, следовательно, $\varphi(t)$ можно разложить в сумму $\varphi(2t-k)$ [10–12, 14]:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in K} h_k \varphi(2t - k), \quad (1)$$

где $h_k \in R$, $k \in K$, $K \subset Z$.

Выражение (1) называют масштабным соотношением для скейлинг-функции, а коэффициенты h_k — коэффициентами масштабной функции или масштабным фильтром.

В большинстве случаев не существует явного выражения для $\varphi(t)$ [12]. Однако есть быстрый алгоритм, который использует детализирующее уравнение для выражения масштабирующей функции $\varphi(t)$ в точках диадической сетки ($t = 2^{-j}k$, $j, k \in Z$) [13]. Для каждой пары подпространств $V_j \subset V_{j+1}$ КМА должно существовать подпространство W_j , образующее дополнение V_j до V_{j+1} такое, что

$$V_j \perp W_j, \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

т.е. каждый элемент V_{j+1} может быть записан однозначным образом как сумма элементов W_j и V_j . Подпространства W_j называют уточняющими или детализирующими в том смысле, что они содержат «детальную» информацию, необходимую для перехода от аппроксимации с разрешением j к аппроксимации с разрешением $j + 1$. Для пространства W_0 определяется порождающий вейвлет $\psi(t)$ такой, что последовательность $\{\psi(t - k)\}_{k \in Z}$ образует ортонормированный базис в W_0 . Функции

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

называют вейвлетами. Масштабное соотношение для вейвлетов определяется следующим выражением:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in K} g_k \varphi(2t - k), \quad (2)$$

где $g_k = (-1)^k h_{1-k}$.

Из (2) следует, что вейвлеты полностью определяются масштабными функциями (1). Теперь сигнал $s(t)$ может быть представлен в виде линейной комбинации [14]:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{j_0,k}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_j(k) \psi_{j,k}(t). \quad (3)$$

Коэффициенты в (3) определяются из условия ортогональности базисных функций:

$$c_{j_0}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_{j_0,k}(t) dt, \quad (4)$$

$$d_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (5)$$

Коэффициенты $c_{j_0}(k)$ и $d_j(k)$ являются коэффициентами ДВП (спектр сигнала $s(t)$ в базисах масштабных функций и вейвлетов). Слагаемые в разложении (3) можно рассматривать как представление сигнала $s(t)$ в двух проекциях — проекции на пространство V_{j_0} (первое слагаемое) и проекции на ортогональное дополнение V_{j_0} до $L^2(R)$ (второе слагаемое). Структура пространства такова, что проекция сигнала на первое пространство является «огрубленным» (низкочастотным), а на второе — высокочастотным (содержащим уточняющую информацию о сигнале, потерянную при проецировании на V_{j_0}).

На рис. 1 показана блок-схема ДВП. В первом каждом блоке производится обработка временных отсчетов сигнала, а в каждом последующем — соответствующих коэффициентов c_j . В результате получается $j_m - j_0 - 1$ векторов вейвлет-коэффициентов d_j и один вектор c_j .

Уравнения (1) и (2) позволяют получить алгоритмы быстрого вычисления $c_j(k)$ и $d_j(k)$. Для произвольного масштабного коэффициента j соотношения (1) и (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(t) &= 2^{(j+1)/2} \sum_n h(n) \varphi(2^{j+1}t - 2k - n) = \\ &= 2^{(j+1)/2} \sum_n h(n - 2k) \varphi(2^{j+1}t - n), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_n g(n - 2k) \varphi(2^{j+1}t - n). \quad (7)$$

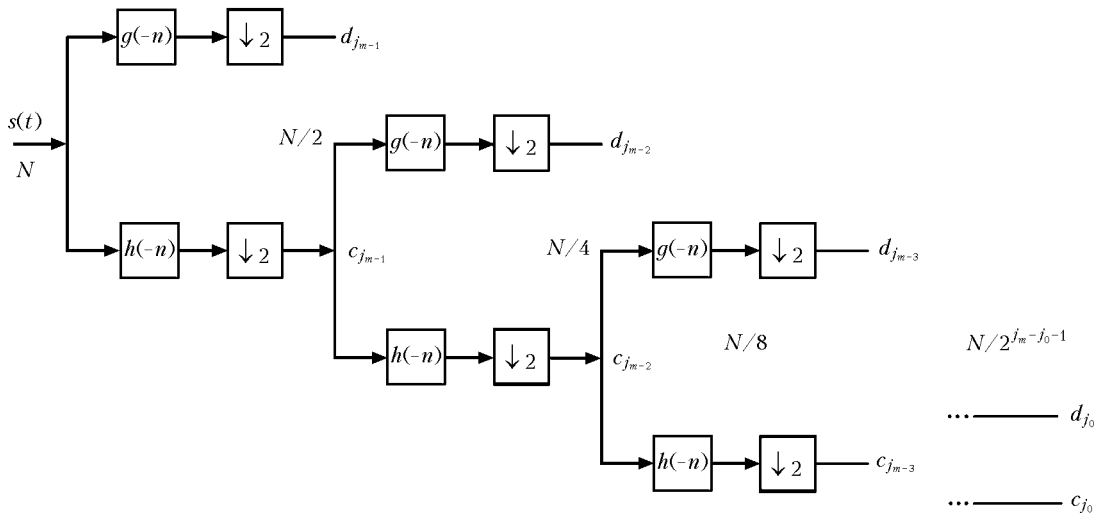


Рис. 1. Блок-схема прямого дискретного вейвлет-преобразования. Стрелками указана процедура децимации

Подставляя (6) и (7) в (4) и (5), получим рекуррентные формулы для вычисления $c_j(k)$ и $d_j(k)$ (от «тонкого» к «грубому» масштабу):

$$\begin{aligned} c_j(k) &= \sum_n h(n-2k)c_{j+1}(n); \\ d_j(k) &= \sum_n g(n-2k)c_{j+1}(n). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь возникает вопрос о первом шаге вычисления коэффициентов c_j на некотором значении масштаба $j = j_m$. Для непрерывных сигналов наивысший уровень разрешения в общем случае равен $+\infty$. Поэтому в качестве первого шага берут коэффициенты представления сигнала с некоторым конечным разрешением j_m , при этом точность представления тем выше, чем больше j_m . Коэффициент c_j начального представления находят из выражения

$$c_{j_m}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\varphi_{j_m,k}(t)dt.$$

В случае дискретного сигнала в качестве коэффициентов $c_j(k)$ уровня разрешения j_m берутся компоненты самого сигнала, т.е. $c_{j_m}(k) = s(k)$. Итерационные процедуры (6) и (7) завершаются при значении $j = j_0$, которое выбирается исходя из продолжительности сигнала.

2. Процедура фильтрации шума

Классификация сигналов по всем возможным типам затруднительна, но вейвлеты оказались мощным инструментом для достаточно простой характеристики широкого класса сигналов [15]. Независимо от природы обрабатываемой информации для решения задачи шумоподавления необходимо учитывать целый ряд задач, например проверку достоверности гипотезы о гауссовости статистик и спектральном составе шумовой компоненты, выбор типа функции для пороговой обработки (трешолдинга) и вместе с этим критерия расчета самого порога, а также стандартные вопросы вейвлет-анализа, носящие общий характер: выбор наиболее подходящего вейвлет-базиса, установление требуемой глубины разложения данных и т.п. Появление ряда методологических парадигм шумоподавления, а также построенных на их основе программных и аппаратных реализаций в значительной мере продвинуло решение задачи шумоподавления как одной из существенных задач обработки информации [16].

В терминах вейвлет-анализа процедура фильтрации шума производится в три этапа (парадигма Донохо–Джонстона) [17–19]:

а) Разложение сигнала

Выбираются тип вейвлета и число уровней разложения j_m . Вычисляется ДВП сигнала $s(t)$ до уровня j_m .

б) Выбор порога для вейвлет-коэффициентов

Для каждого уровня от j_0 до j_m выбирается ϵ_j -порог и производится модификация коэффициентов по определенному правилу.

в) Восстановление сигнала

Производится обратное ДВП с использованием модифицированных вейвлет-коэффициентов по формуле (3).

Со статистической точки зрения такая методика представляет собой непараметрическую оценку регрессионной модели сигнала с использованием ортогонального базиса [20]. Такой метод хорошо работает со многими реальными данными, в том числе и сигналами, имеющими нестационарные характеристики шума, но наилучшие результаты получаются на достаточно гладких сигналах, т.е. на сигналах, в разложении которых лишь небольшое количество коэффициентов детализации значительно отличается от нуля. Оптимальные значения параметров разложения зависят от характеристик сигнала и должны подбираться экспериментально [21]. Здесь можно дать следующие рекомендации:

1) Глубина разложения определяет «масштаб» отсеиваемых деталей: чем больше эта величина, тем более «крупные» изменения сигнала будут отброшены. При достаточно больших значениях этого параметра ($j_m > 7$) выполняются не только очистка сигнала от шума, но и его сглаживание («обрезаются» пики сигнала).

2) Порядок вейвлета определяет гладкость восстановленного сигнала: чем меньше порядок вейвлета, тем ярче будут выражены «пики» сигнала, и наоборот — для вейвлетов больших порядков пики сигнала будут сглажены. Порядок вейвлета становится важным фактором при обратном ДВП, когда необходимо сгладить ошибки, вызванные отбрасыванием малых вейвлет-коэффициентов [22].

На практике первоначально выбирается некоторое начальное значение уровня разложения (обычно равное трем) и производятся этапы вейвлет-фильтрации. Затем уровень разложения увеличивают до достижения наилучшего результата, т.е. когда детали разложения будут содержать шумоподобную составляющую, а аппроксимация — достаточно хорошо описывать исходный сигнал.

Рассмотрим работу процедуры фильтрации шума для задач лазерного зондирования. В качестве входного сигнала используем рассчитанный согласно уравнению лазерной локации лидарный эхосигнал (тестовый сигнал) в приближении однократного рассеяния для горизонтальной трассы протяженностью 5 км [23, 24]. Профиль аэрозольного коэффициента рассеяния зададим однородным вдоль трассы ($\sigma_{aer} = 0,2 \text{ км}^{-1}$, $\sigma_{mol} = 0,012 \text{ км}^{-1}$) с наложением трех аэрозольных неоднородностей ($\sigma_{aer1} = 0,4 \text{ км}^{-1}$, $\sigma_{aer2} = 0,6 \text{ км}^{-1}$, $\sigma_{aer3} = 0,6 \text{ км}^{-1}$). К полученному эхосигналу аддитивно добавим «белый» шум такой, что отношение сигнал-шум не превышает единицы уже на дистанции около 3 км.

Предварительно для выполнения ДВП необходимо выбрать тип вейвлета. Здесь не существует четких критериев подбора. Обычно в качестве

параметра, определяющего этот выбор, выступает внешнее сходство сигнала (целиком, а не отдельного его участка) и функции преобразования, что является достаточно субъективным фактором. Для упрощения процедуры подбора можно воспользоваться критерием минимума энтропии [22]. Энтропия сигнала по отношению к вейвлет-базису отражает число существенных членов в разложении (3) и определяется величиной

$$\exp\left(-\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 \log |d_{j,k}|^2\right).$$

Чем меньше значение этой величины, тем оптимальнее для данного сигнала базис анализа. Обычно энтропия тем ниже, чем выше порядок вейвлета. Для лидарного эхосигнала был выбран вейвлет 10-го порядка из семейства ортогональных вейвлетов с компактным носителем — вейвлетов Симлета. Скейлинг- и вейвлет-функции отобранного базиса показаны на рис. 2.

Более подробно об этом семействе вейвлетов можно ознакомиться в работах [9, 11, 25]. Коэффициенты детализации $d_{j,k}$ пятиуровневого ДВП лидарного сигнала приведены на рис. 3, а. Гистограммы распределения $d_{j,k}$ показаны на рис. 3, б.

Из рис. 3 видно, что в основном величины $d_{j,k}$ близки по величине к нулю, при этом дисперсия коэффициентов детализации убывает с увеличением уровня разложения функции ($d_{j_0} \rightarrow d_{j_4}$) и гистограмма приобретает все более «гауссовы» очертания.

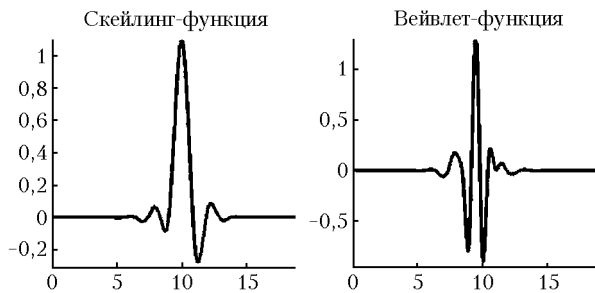


Рис. 2. График скейлинг-функции и вейвлета Симлета 10-го порядка

Следующий этап фильтрации сигнала — выбор порога и правила модификации коэффициентов. Выбор величины порога ϵ является значимой задачей в процедуре шумоподавления. Если задать небольшое значение порога ϵ , то это приведет к частичному сохранению шумовой компоненты в коэффициентах детализации и вызовет лишь незначительное увеличение отношения сигнал-шум. В то же время задание больших значений порога оказывается чреватым потерей коэффициентов, несущих в себе информацию о поведении профиля оптических характеристик атмосферы. Оптимальным значением ϵ будет такое, когда при наименьшем искажении восстановленного сигнала обеспечивается наибольшее из возможных значение отношения сигнал-шум. Оценку ϵ производят по определенным критериям, которых существует множество. Подробную информацию о них можно найти в работах [17, 26, 27].

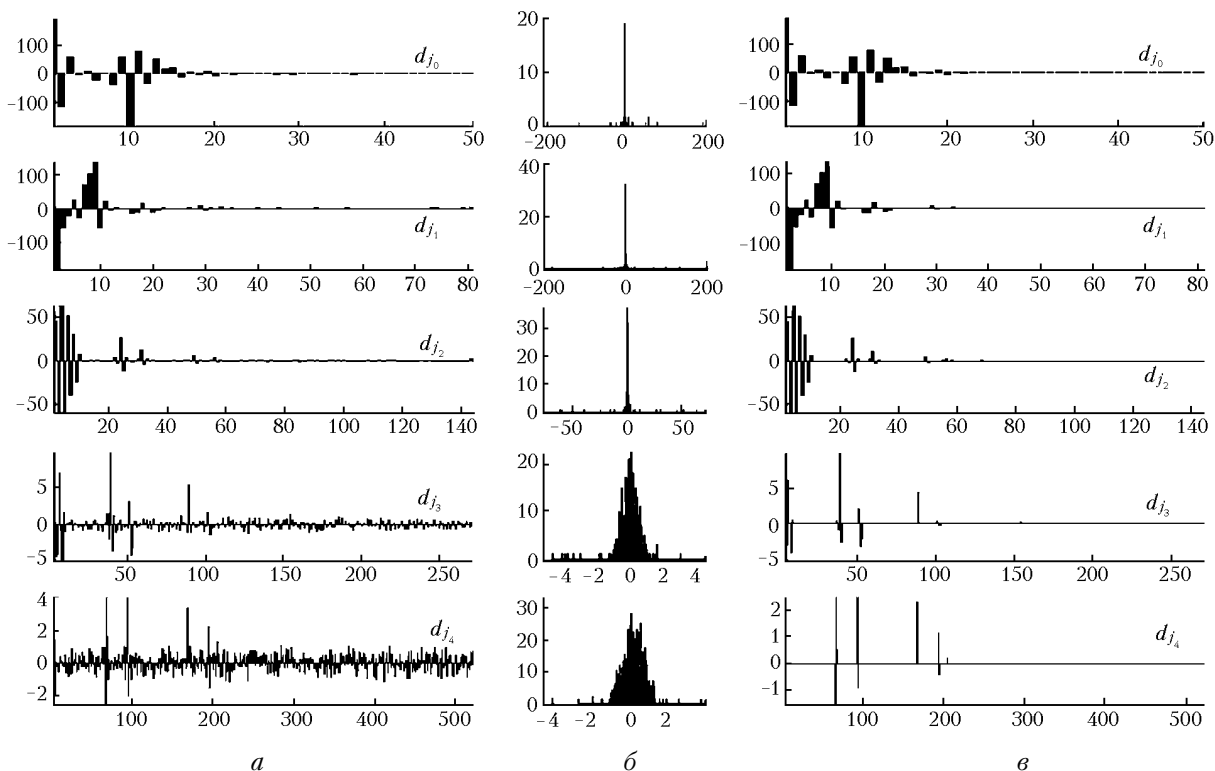


Рис. 3. Коэффициенты детализации ДВП тестового сигнала на уровнях $j_0 - j_{m-4}$: а — величины $d_{j_0} - d_{j_{m-4}}$ до процедуры трешолдинга; б — гистограммы распределения значений $d_{j_0} - d_{j_{m-4}}$; в — величины $d_{j_0} - d_{j_{m-4}}$ после процедуры трешолдинга

К наиболее часто используемым на практике и реализованным в большинстве систем компьютерной математики критериям относятся:

1) «Универсальный» критерий Донохо–Джонстона

$$\varepsilon_j = \sigma \sqrt{2 \log(n_j)},$$

где n_j — длина реализации вейвлет-разложения уровня j ; σ — дисперсия шума. Дисперсию можно оценить, выбрав достаточно гладкий участок исходного сигнала.

2) Критерий оценки риска Штейна [28], минимизирующий квадратичную функцию потерь для выбранной модели шума

$$R_j(\varepsilon) = \frac{1}{n_j} \|d_j^* - d_j\|^2,$$

где $R_j(\varepsilon)$ — квадратичная функция потерь; d_j^* — коэффициенты детализации отфильтрованного сигнала, d_j — коэффициенты детализации сигнала, гипотетически не содержащего аддитивный шум.

3) Минимаксный критерий. Отфильтрованный сигнал аппроксимируется регрессионной моделью, и выбирается ε , который реализует минимум максимальной среднеквадратической ошибки, полученной для самой плохой функции в данном множестве.

Модификации $d_{j,k}$ осуществляются по двум основным правилам [16, 17, 20, 26]:

— по правилу «жесткого» трешолдинга:

$$T_h(d_{j,k}) = \begin{cases} 0, & \text{if } d_{j,k} < \varepsilon_j \\ d_{j,k}, & \text{if } d_{j,k} \geq \varepsilon_j \end{cases}$$

и

— по правилу «мягкого» трешолдинга:

$$T_s(d_{j,k}) = \text{sign}(d_{j,k}) \max(0, |d_{j,k}| - \varepsilon_j).$$

В задачах очистки сигналов от шумов лучше использовать метод «мягкого» трешолдинга, в то время как в задачах сжатия сигналов чаще применяют правило «жесткого» трешолдинга. «Жесткому» присущи два недостатка, которые снижают его ценность для задачи шумоподавления. Первый из них состоит в том, что сохранение коэффициентов детализации, превышающих некоторое заданное значение порога, подразумевает сохранение также шума, присутствующего в них. Второй недостаток связан с возникновением в результирующем сигнале паразитных гармоник за счет искусственного введения в последовательность лагун, образованных из обращенных в ноль коэффициентов [16]. Общее выражение для процедуры пороговой обработки записывается в следующем виде:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{j_0,k}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{j,k}\{d_j(k)\} \psi_{j,k}(t). \quad (9)$$

В выражении (9) значение порога в T можно выбрать общим для всех уровней разложения (глобальный трешолдинг) либо использовать ε , изменяющийся от уровня к уровню (локальный трешолдинг) и зависящий от номера коэффициента детализации (микрлокальный трешолдинг). Локальные варианты трешолдинга являются более предпочтительными в задачах шумоподавления, так как обладают большей адаптивностью к исходным данным в сравнении с глобальной пороговой обработкой. Проиллюстрируем особенности различных критериев пороговой обработки на примере тестового сигнала.

На рис. 4,а приведен профиль восстановленного лидарного эхосигнала, скорректированного на квадрат после применения «мягкого» локального трешолдинга к коэффициентам детализации $d_{j,k}$ (см. рис. 3,а) по описанным выше критериям. Коэффициенты детализации $d_{j,k}$, прошедшие процедуру трешолдинга (критерий Штейна), представлены на рис. 3,в.

Из рис. 4,а видно, что использование порога ε , рассчитанного по критерию Штейна, дает более приемлемые результаты по сравнению с универсальным и минимаксным критериями. При этом шум в лидарном сигнале подавляется без значительного искажения самого эхосигнала. В диапазоне дальности от 3 до 4 км средняя вариация амплитуды сигнала снижается со 190% в исходных данных до 12% в восстановленном после трешолдинга эхосигнале.

Теперь проиллюстрируем возможности шумоподавления сигналов на примере лидарного эхосигнала комбинационного рассеяния (КР) молекулами азота, зарегистрированного в режиме счета фотонов. Шумовая компонента, регистрируемая системой счета фотонов, состоит из импульсов упругого рассеяния, поступающих через боковые лепестки интерференционного фильтра, импульсов, вызванных свечением звездного неба, и «темновых» импульсов фотокатода. В связи с тем что регистрируемый сигнал был слабым, относительная среднеквадратическая ошибка уже на дистанции 5 км достигала 40%, а на 10 км превышала 80%. На рис. 4,б приведены исходный (кривая 1) и восстановленные лидарные сигналы (кривые 2 и 3).

Пороговая обработка коэффициентов детализации лидарного сигнала проводилась по правилу «мягкого» трешолдинга. Наибольшие значения порога ε получаются при использовании оценки «универсального» критерия Донохо–Джонстона. При этом из рис. 4,б (кривая 2) видно, что и в случае применения максимальных значений ε прослеживается наличие паразитных гармоник в лидарном сигнале. В этом случае для полного удаления шумовой компоненты необходимо выборочно увеличить порог для уровней разложения j_m, j_{m-1} (рис. 4,б, кривая 3).

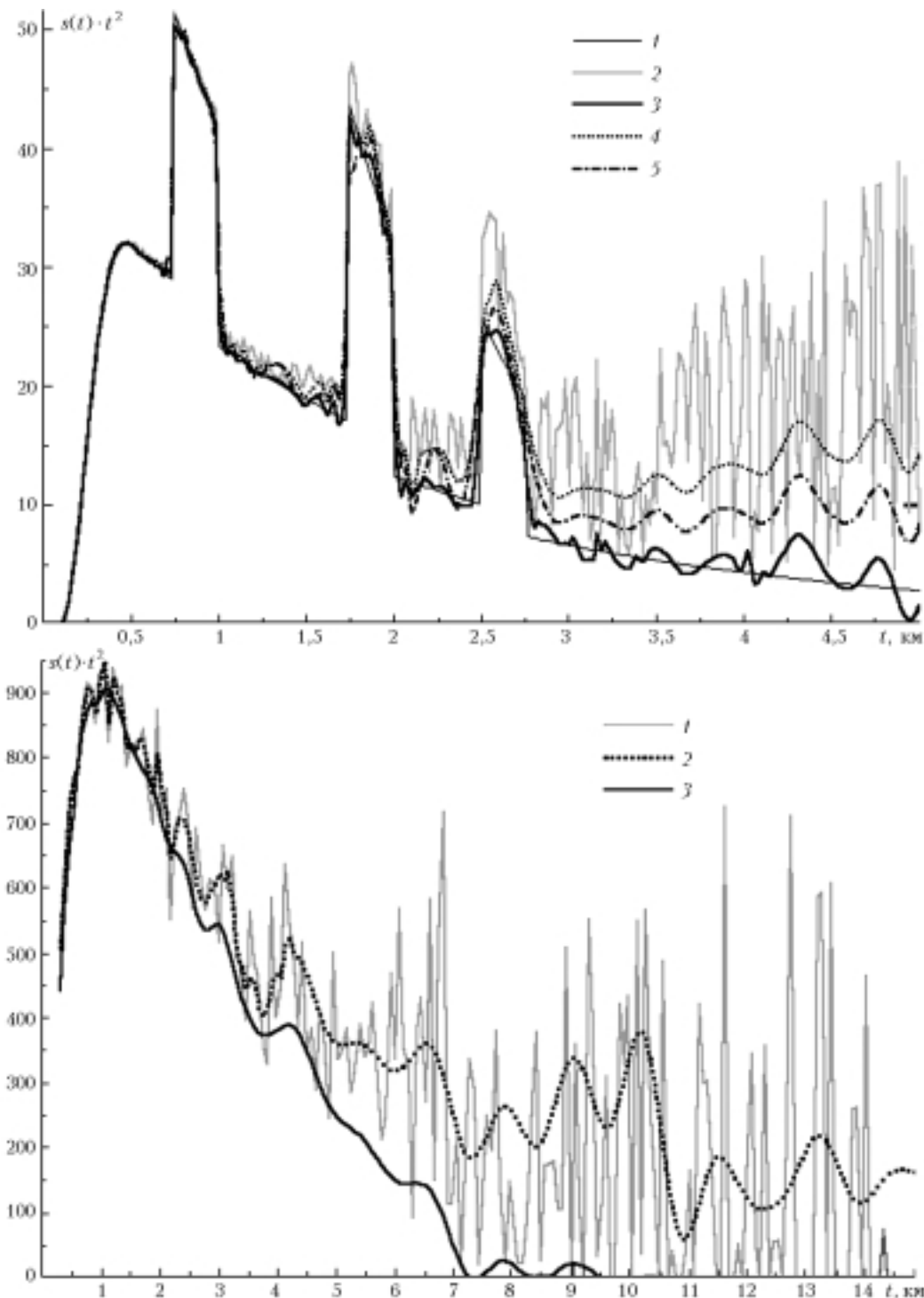


Рис. 4. Сигнал и его реконструкция симлетом 10-го порядка: *a* – тестовый сигнал: 1 – исходный сигнал; 2 – зашумленный сигнал. Реконструированный сигнал с применением процедуры трешолдинга по критериям: 3 – Штейна; 4 – Донохо–Джонстона; 5 – минимакса; *b* – лидарный сигнал (КР): 1 – исходный сигнал; 2 – восстановленный сигнал («мягкий» трешолдинг с оценкой ϵ по критерию Донохо–Джонстона; 3 – то же самое, но ϵ для $d_{j_4} - d_{j_3}$ увеличен в 3 раза

Выводы

Применяя к лидарным сигналам процедуру шумоподавления на основе ДВП, можно добиться достаточно глубокого подавления шума при сохранении структуры сигнала. Основным недостатком является то, что расчет значения порога ϵ по суще-

ствующим критериям не всегда дает удовлетворительные результаты и необходимо варьировать величины порога для достижения приемлемых результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 02-05-64486, INTAS-01-0239, CRDF RG2-2357-TO-02.

1. *Исакова А.И., Игонин Г.М.* Адаптивная временная фильтрация лидарных сигналов // 1-й Межреспубл. симп. «Оптика атмосф. и океана»: Тезисы докл. Томск, 1994. Ч. 2. С. 126–127.
2. *Глазов Г.Н., Игонин Г.М., Лецинский Д.М.* Эффективность зондирования аэрозолей самолетным когерентным лидаром ИК-диапазона с оптимальной фильтрацией сигналов // Оптика атмосф. 1988. Т. 1. № 5. С. 71–76.
3. *Волков С.Н., Надеев А.И.* Эффективность зондирования профилей температуры и отношения рассеяния КР-лидаром с последующим адаптивным сглаживанием сигналов // Оптика атмосф. и океана. 1995. Т. 8. № 5. С. 1191–1194.
4. *Волков С.Н., Кауль Б.В., Шапранов В.А., Шелефонтьук Д.И.* Некоторые вопросы сглаживания лидарных сигналов // Оптика атмосф. и океана. 2000. Т. 13. № 8. С. 754–758.
5. *Zarader J.-L., Dabas A., Flamant P.H., Gas B., and Adam O.* Adaptive Parametric Algorithms for Processing Coherent Doppler-Lidar Signal // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens. 1999. V. 37. N 6. P. 2678–2691.
6. *Голуб М.* Приближенно – не значит неточно <http://www.osp.ru/school/1999/03/05.htm>
7. *Геттенер В., Ланнэ А., Черниченко Д.* МАТЛАБ для DSP. Использование GUI WAVEMENU для решения инженерных задач. Часть 1 <http://www.chipinfo.ru/literature/chipnews/200006/2.html>
8. *Терехов С.А.* Вейвлеты и нейронные сети (<http://alife.narod.ru/lectures/wavelets2001>)
9. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон-Р, 2002. 440 с.
10. *Переберин А.В.* О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные методы и программирование. 2001. Т. 2. № 2. С. 133–158.
11. *Mallat S.G.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 315. N 1. P. 69–87.
12. *Jawerth B. and Sweldens W.* An overview of wavelet based multiresolution analyses // The Wavelet Digest V. 2. Issue 2 (maxwell.math.sc.edu/pub/wavelet/papers/overview.ps.)
13. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Commun. Pure and Appl. Math. 1988. V. 41. P. 909–996.
14. *Новиков Л.В.* Спектральный анализ сигналов в базе вейвлетов // Науч. приборостр. 2000. Т. 10. № 3. С. 57–64.
15. *Стиридонов В.* Самоподобие, всплески и квазикристаллы // Компьютерра. 1988. № 8 (<http://www.computerra.ru/offline/1998/236/1124/>)
16. *Алексеев К.А.* Теория и практика шумоподавления в задаче обработки сейсмоакустических сигналов (<http://www.matlab.ru/wavelet/book5/index.asp>)
17. *Donoho D.L.* De-noising by soft-thresholding // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1995. V. 41. № 3. P. 613–627.
18. *Donoho D.L., Johnstone I.M.* Neo-classical minimax problems, thresholding, and adaptation // Bernoulli. 1996. № 1. P. 39–62.
19. *Геттенер В., Ланнэ А., Черниченко Д.* МАТЛАБ для DSP. Использование GUI WAVEMENU для решения инженерных задач. Часть 2 <http://www.chipinfo.ru/literature/chipnews/200007/16.html>
20. *Киселев А.* Приложения вейвлет-анализа. BaseGroup Labs (http://www.basegroup.ru/filtration/wavelet_applications.htm)
21. *Киселев А.* Библиотека инструментов вейвлет-преобразования. BaseGroup Labs (http://www.basegroup.ru/filtration/wavelet_utils.htm)
22. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* Вейвлеты и их использование // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171. № 5. С. 465–501.
23. *Сигналы и помехи в лазерной локации.* М.: Радио и связь, 1985. 264 с.
24. *Балин Ю.С., Самохвалов И.В., Шаманов В.С.* К вопросу определения дальности действия лидара // Лазерное зондирование атмосферы. М.: Наука, 1976. С. 118–121.
25. *Cohen A., Daubechies I., and Feauveau J.* Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets // Commun. Pure and Appl. Math. 1992. V. 45. P. 485–560.
26. *Donoho D.L., Johnstone I.M.* Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage // Biometrika. 1994. V. 81. N 3. P. 425–455.
27. *Antoniadis A. and Fan J.* Regularization of Wavelet Approximations // J. of the American Statistical Association. 1999. V. 96. N 455. P. 939–965.
28. *Stein C.* Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Annals of Statistics. 1981. V. 9. P. 1135–1151.

A.D. Ershov. Suppression of the noise component of lidar signals based on discrete wavelet transform.

The paper considers the procedure of noise suppression in lidar signals based on wavelets. Multiresolution analysis is reviewed briefly. It is shown that discrete wavelet transform can be used successfully in such practical applications as noise suppression in lidar data. In such cases, noise can be suppressed rather efficiently with the signal structure kept unchanged.