«Оптика атмосферы и океана», **8**, N 9 (1995)

УДК 535.12

В.П. Аксенов

ФАЗОВАЯ ПРОБЛЕМА, ДИСЛОКАЦИИ ВОЛНОВОГО ФРОНТА И УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ДВУМЕРНОГО ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

На основе полученных аналитических соотношений для восстановления фазы волны через распределение ее интенсивности исследованы особенности формирования структуры двумерного волнового фронта, связанные с интерференционными нулями поля. Показано, что существование нулей поля не является достаточным для существования дислокаций. Впервые осуществлен переход от параболического волнового уравнения к нелинейному интегродифференциальному уравнению для интенсивности поля.

Дислокации фазового фронта, возникающие в интерференционных оптических полях [1, 2], стали в последнее время самостоятельным объектом исследования и индикатором ряда волновых явлений и процессов в нелинейной оптике и лазерной физике [3–5]. Кроме того, формируется направление исследований, связанное с использованием дислокаций для дистанционной диагностики природных сред [6]. Следует, однако, отметить, что практически во всех теоретических работах, посвященных этим проблемам, считается, что для формирования дислокаций достаточным условием является лишь наличие нулей волнового поля. При анализе статистики дислокаций предполагается,что она полностью определяется статистикой нульносителей [7, 8]. Для того чтобы проверить однозначность такого соответствия, рассмотрим процесс формирования дислокаций, одновременно решая проблему восстановления фазы волны по измерениям распределения ее интенсивности (так называемую «фазовую проблему в оптике» [9, 10]. В ходе решения этой задачи получим ряд следствий, полезных, на наш взгляд, в теории распространения волн в целом.

Проведем рассмотрение для случая двумерной волны, распространяющейся в полупространстве $z > 0$. Для описания процесса распространения будем использовать параболическое волновое уравнение [11]

$$2\, i\, k \frac{\partial}{\partial z} U(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, z) + k^2\, \varepsilon'(x, z)\, U(x, z) = 0\,, \tag{1}$$

где $\varepsilon'(x, z) = [\varepsilon(x, z) - \bar{\varepsilon}]/\bar{\varepsilon}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\varepsilon}$ – постоянное среднее значение ε. Это уравнение определяет эволюцию медленной комплексной амплитуды направленного вдоль оси z монохроматического пучка $U(x, z) \exp(-i\,\omega\, t + i\, k\, z)$ в рефракционно неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, z)$. Заменой $U(x, z) = I^{1/2}(x, z) \exp\{i\, s(x, z)\}$, где $I(x, z)$ – интенсивность, а $s(x, z)$ – фаза волны, уравнение (1) преобразуется в систему уравнений переноса

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{I(x, z)\frac{\partial}{\partial x} s(x, z)\right\} + k \frac{\partial}{\partial z} I(x, z) = 0 \tag{2}$$

и эйконала

$$-2\, k \left\{I(x, z)\frac{\partial}{\partial z} s(x, z)\right\} - \left\{I(x, z)\frac{\partial}{\partial x} s(x, z)\right\}^2 / I(x, z) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} I(x, z)\right)^2 / I(x, z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I(x, z)}{\partial x^2} +$$

$$+ k^2\, \varepsilon'(x, z)\, I(x, z) = 0\,. \tag{3}$$

Уравнение (2) выражает сохранение энергии в дифференциальной форме. Оно может быть легко разрешимо относительно выражения в фигурных скобках

$$I(x,z)\frac{\partial}{\partial x}s(x,z)=\left\{I(x,z)\frac{\partial}{\partial x}s(x,z)\right\}\Bigg|_{x=x_0}-k\int\limits_{x_0}^{x}dx'\frac{\partial}{\partial z}I(x',z)\,. \tag{4}$$

Величина, стоящая слева, представляет собой поперечную компоненту вектора Умова—Пойнтинга $L_x(x, z)$ [11]. Так как энергия пучка локализована около направления преимущественного распространения (вдоль оси z), очевидно, что $L_x(x_0, z) \to 0$, если $x_0 \to \pm\infty$. Тогда вместо (4) можно записать

$$L_x(x,z)=I(x,z)\frac{\partial}{\partial x}s(x,z)=-k\int\limits_{-\infty}^{x}dx'\frac{\partial}{\partial z}I(x',z)=-\frac{k}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\,x'\,\operatorname{sgn}(x-x')\frac{\partial}{\partial z}I(x',z)\,, \tag{5}$$

где $\operatorname{sgn} x$ – знаковая функция. С помощью (5) и уравнения эйконала (3) можно определить через интенсивность и продольную компоненту вектора Пойнтинга

$$L_z(x,z)=I(x,z)\left[k+\frac{\partial}{\partial z}s(x,z)\right]=\left[k+k\frac{\varepsilon'(x,z)}{2}\right]I(x,z)+\frac{1}{4\,k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}I(x,z)-\frac{1}{8\,k}\left\{\frac{\partial\,I(x,z)}{\partial x}\right\}^2/I(x,z)-$$

$$-\frac{1}{2\,k}\left(\frac{k}{2}\right)^2\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\,\operatorname{sgn}(x-x')\frac{\partial}{\partial z}I(x',z)\right\}^2/\,I(x,z)\,. \tag{6}$$

Для параболического уравнения известно следствие закона сохранения полной энергии [11]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}I(x,z)\,dx=\text{const.}$$

Из (5) получается еще одно следствие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}L_x(x,z)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}I(x,z)\frac{\partial}{\partial x}s(x,z)\,dx=0.$$

Уравнения (5) и (6) дают возможность восстановить фазу волны. Действительно, если интенсивность поля нигде в пространстве $\{x, z\}$ не обращается в нуль, можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x}s(x,z)=\left\{-\frac{k}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\,\operatorname{sgn}(x-x')\frac{\partial}{\partial z}I(x',z)\right\}/I(x,z)\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}s(x,z)=\frac{k}{2}\varepsilon'(x,z)+\frac{1}{I(x,z)}\frac{1}{4k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}I(x,z)-\frac{1}{8k}\left\{\frac{\partial I(x,z)}{\partial x}\right\}^2/I^2(x,z)-$$

$$-\frac{1}{2\,k}\left(\frac{k}{2}\right)^2\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\,\operatorname{sgn}(x-x')\frac{\partial}{\partial z}I(x',z)\right\}^2/I^2(x,z)\,. \tag{8}$$

Решения этих уравнений будут иметь вид

$$s(x,z)=s(x_0,z)-\frac{k}{2}\int\limits_{x_0}^{x}dx'\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx''\,\operatorname{sgn}(x'-x'')\frac{\partial}{\partial z}I(x'',z)}{I(x',z)}\,, \tag{9}$$

$$s(x_0, z) = s(x_0, 0) + \int\limits_0^z dz' \left\{ \frac{k}{2}\,\varepsilon'(x_0, z') + \frac{1}{4\,k}\frac{1}{I(x_0, z')}\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x_0, z') - \frac{1}{8\,k}\frac{1}{I^2(x_0, z')}\left[\frac{\partial}{\partial x} I(x_0, z')\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{8}\frac{1}{I^2(x_0, z')}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' \,\mathrm{sgn}\,(x_0 - x')\frac{\partial}{\partial z'} I(x', z')\right]^2 \right\} \tag{10}$$

и позволяют вычислить значение фазы во всем пространстве $z > 0$, если известна фазовая константа $s(x_0, 0)$ в плоскости $z = 0$. Такая определенность достигается ценой измерения интенсивности во всем пространстве от исходной плоскости до точки наблюдения. Пусть теперь в некоторых точках пространства $x = x_d$, $z = z_d$ интенсивность волнового поля обращается в нуль. Для описания такой ситуации вернемся к уравнениям (5) и (6). Так как для многих оптических задач необходимо лишь относительное распределение фазы, рассмотрим только уравнение (5), считая z параметром. Можно показать, что окрестности точек, где $I(x_{di}, z_\mathrm{d}) = 0$, дифференциальное уравнение (5) допускает представление

$$\frac{1}{2}(x - x_{di})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x_{di}, z_d)\frac{\partial\, s(x, z)}{\partial x} = -\frac{k}{2}(x - x_{di})^2 \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x} I(x_{di}, z_d)\ ,$$

а в самих точках $x = x_{di}$ обращается в тождество. В этих точках фаза может принимать произвольные значения, а проходящие через них интегральные линии будут представлять собой прямые, параллельные оси ординат. На участках от одной такой точки до другой решение (5) будет совпадать с классическим решением (9). Так как начальное значение фазы $s(x_0, z)$ может быть определено только с точностью до постоянной $2\pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm N$), частным решением на участках между точками сингулярности x_{di} может быть любая из кривых, получаемых из (9) смещением на $2\pi n$. Интегральные кривые на всем протяжении оси x могут состоять из ветвей решения (9) и вертикальных отрезков длиной $2\pi n_i$ (i – номер любой точки) до перехода на следующую ветвь. Такое решение, имеющее изолированные разрывы в точках x_{di} и непрерывные участки от x_{di} до x_{di+1}, будет обобщенным решением дифференциального уравнения (5) [12]. Обобщенной функцией будет и производная от такого решения

$$\frac{\partial}{\partial x} s(x, z) = \left\{\frac{\partial}{\partial x} s(x, z)\right\} + \sum_i\, [s(x_{di}, z_d)]\ \delta(x - x_{di})\ ,$$

где $\left\{\frac{\partial}{\partial x} s(x, z)\right\}$ – кусочно-непрерывная функция на x [12]; $[s(x_{di}, z_d)] = s(x_{di} + 0) - s(x_{di} - 0)$ – скачок в точке x_{di}. Эта функция удовлетворяет закону сохранения энергии (5), в том числе и в точках сингулярности $x = x_d$, $z = z_d$, так как для $I(x_{di}, z_d) = 0$ выполняется равенство теории обобщенных функций $I(x_d, z_d)\,\delta(x - x_d) = 0$ [12]. По-видимому, в рамках рассматриваемой теории невозможно установить правило выбора (управляющий параметр) какого-либо конкретного кусочно-непрерывного решения. Поэтому среди бесконечной совокупности возможных решений оказывается решение и вообще без скачков, а значит, и без дислокаций. Строго говоря, равенство нулю интенсивности в какой-либо точке пространства позволяет лишь предположить наличие дислокаций волнового фронта в этой точке.

Выражения (7), (8) производных фазы через интенсивность позволяют получить еще одно интересное, на наш взгляд, соотношение. Действуя на (7), (8) соответственно операторами $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial x}$ и приравнивая результаты дифференцирования, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{I(x, z)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx'\,\mathrm{sgn}\,(x' - x)\, I(x', z)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\,\varepsilon'(x, z) + \frac{1}{2\,k^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{I(x, z)}\frac{\partial^2 I(x, z)}{\partial x^2}\right\} -$$

$$- \frac{1}{4\,k^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{I^2(x, z)}\left[\frac{\partial I(x, z)}{\partial x}\right]^2\right\} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{I^2(x, z)}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx'\,\mathrm{sgn}\,(x' - x)\, I(x', z)\right]^2\right\} \tag{11}$$

– нелинейное интегродифференциальное уравнение для интенсивности. Из (11) при $k \to \infty$ следует необычное геометро-оптическое приближение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{I(x,z)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' \operatorname{sgn}(x'-x)\, I(x',z)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon'(x,z)\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{I^2(x,z)}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \operatorname{sgn}(x'-x)\, I(x',z)\right]^2\right\}, \quad (12)$$

не содержащее ни эйконала, ни фазы. Ввиду сложности уравнения (11) и (12) вряд ли послужат серьезной альтернативой традиционным уравнениям волновой и геометрической оптики. Однако их анализ и исследование возможных путей решения, на наш взгляд, будут полезными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-02-04995-а.

1. Berry M.V. // Singularities in waves and rays, Les Houches Summer School, Amsterdam. 1980. P. 453.
2. Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. // ЖЭТФ. 1981. N 80. C. 1789.
3. Arecchi F.T., Giacomelli G., Ramazza P.L. and Residori S. // Phys. Rev. Lett. 1990. N 67. P. 3749.
4. Neubecker R., Kreuzer M. and Tschudi T. // Opt. Commun. 1993. N 96. P. 117.
5. Розанов Н.Н. Оптика и спектроскопия. 1993. N 75. C. 861.
6. Журавлев В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. и др. // Акустический журнал. 1993. Т. 39. С. 764.
7. Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я., Мамаев А.В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1981. N 33. C. 206.
8. Журавлев В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. // ЖЭТФ. 1992. N 102. C. 483.
9. Ферверда Х.А. Обратные задачи в оптике. М.: Машиностроение, 1984. С. 21.
10. Кузнецова Т.И. // Успехи физических наук. 1988. Т. 1954. С. 677.
11. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1980. 464 с.
12. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
20 февраля 1995 г.

V.P. Aksenov. **Phase Problem, Wave Front Dislocations, and Equation for Two-dimensional Optical Field Intentsity.**

Based on analytical relations obtained for a wave phase reconstructing through distribution of its intensity, peculiarities of two-dimensional wave front structure formation are investigated, which are connected with interferential zeros of the field. The zeros existance is shown to be insufficient for existance of dislocations. A transition from parabolic wave equation to nonlinear integro-differential one for the field intensity is performed for the first time.