

А.Е. Бульшев, Л.Г. Великанова, Н.Г. Преображенский

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ АТМОСФЕРЫ

Разработан и численно исследован достаточно универсальный алгоритм метода статистических испытаний (Монте-Карло) для решения задач оптической томографии полупрозрачной среды. Алгоритм обладает широкими возможностями и позволяет решать сложные томографические задачи, обычно недоступные другим описанным в литературе методам. В частности, легко учитывается пространственная зависимость коэффициента экстинкции, форма объекта может быть невыпуклой, требования к гладкости коэффициентов испускания и поглощения не существенны, общее число необходимых проекционных данных не велико, а степень их зашумленности может быть значительной и т.п. Результаты расчетов проиллюстрированы конкретными примерами.

В [1] описано применение метода Монте-Карло к задачам эмиссионной томографии оптически прозрачной среды (в частности, атмосферы). В том случае, когда среда является оптически плотной, т.е. коэффициент поглощения на некоторой выбранной частоте $\mu(\mathbf{r})$ существенно отличен от нуля, восстановление даже двумерного (2D) поля коэффициента испускания $\varepsilon(\mathbf{r})$ по проекционным эмиссионным данным $f(p)$ становится наиболее трудной задачей, обычно не допускающей обращения с помощью аналитических формул. В этой ситуации роль метода Монте-Карло еще более возрастает. В частности, большие расчетные сложности возникают при необходимости учета эффектов рассеяния или частичной экранировки просвечивающего излучения, при рассмотрении невыпуклых областей задания функций $\varepsilon(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$, в случае, когда по одним лишь эмиссионным данным требуется оценить структуру обеих функций ε и μ и т.п.

Пренебрегая рефракцией среды и волновыми эффектами, возьмем за основу построения алгоритма так называемое экспоненциальное преобразование Радона [2]:

$$f(p) = \int_{\infty}^{\infty} \varepsilon(\mathbf{r}) \exp\left(-\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_D} \mu(\mathbf{r}') dl'\right) \delta(p - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) d^2\mathbf{r}, \quad (1)$$

где p — прицельный параметр; $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$, \mathbf{n} — орт, нормальный к лучу зрения; δ — дельта-функция Дирака и интегрирование в экспоненте производится от точки локализации рассматриваемого эмиттера \mathbf{r} до местоположения детектора \mathbf{r}_D . В рассматриваемой ниже постановке функцию $\mu(\mathbf{r})$ считаем заданной, однако традиционного ограничения о слабой пространственной зависимости коэффициента ослабления, т.е. $\mu(\mathbf{r}) \approx \text{const}$ [2], не используем.

Пусть Ω — произвольная, не обязательно выпуклая исследуемая область, покрытая равномерной прямоугольной сеткой с числом узлов $N \times N$; 2D коэффициент испускания будем искать в виде гистограммы

$$\varepsilon_{ij} = \int_{\Delta_{ij}} \varepsilon(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}, \quad (2)$$

где интеграл берется по одной ячейке Δ_{ij} . Оценка решения строится аналогично [1]. Задается некоторый фиксированный размер «зерна» h_ε и величина ε_{ij} приближается целым числом m_{ij} «зерен»:

$$\varepsilon_{ij} \simeq m_{ij} h_\varepsilon \quad (3)$$

Определение h_ε дано в [1].

Введем на Ω декартову систему координат OXY таким образом, что ось абсцисс OX совпадает с центральной луч-суммой первой проекции. Для определенности свяжем с проекцией координатную ось: в начальный момент (первая проекция) она совпадает с осью OY . Рассмотрим подробнее алгоритм восстановления.

1. Произвольно выбираем номер ячейки области восстановления. Если имеются вполне надежные априорные данные о распределении коэффициента испускания $\varepsilon(x, y)$ на Ω , то выбор ячейки осуществляется в соответствии с этими данными. В общем случае выбор производится равномерно по Ω .

2. Помещаем в выбранную ячейку (i, j) светящееся «зерно» h_ε и оцениваем его вклад во все проекции. В каждую проекцию «зерно» h_ε вносит вклад, вычисляемый по интегральному признаку:

$$h_f = h_\varepsilon h, \quad (4)$$

в предположении, что шаг по проекции совпадает с h -шагом дискретизации в области Ω . Для улучшения статистических характеристик из центра ячейки (i, j) в направлении рассматриваемой лучи суммируется N_0 «квантов».

Учет пространственной зависимости коэффициента ослабления производится по методу Неймана [3]. При этом вычисляется длина свободного пробега

$$\lambda = - \frac{\ln \gamma}{\max_{(x, y) \in \Omega} \mu(x, y)}, \quad (5)$$

где γ — псевдослучайное равномерно распределенное на $(0, 1)$ число. Переместившись из выбранной ячейки (i, j) на расстояние λ в направлении луча зрения и убедившись, что для новой точки выполнено условие $(x', y') \in \Omega$, разыгрываем акт поглощения. Если для этой точки оказывается, что $(x', y') \notin \Omega$, то считаем, что «квант» не поглотился и воспринят детектором. Для точки $(x', y') \in \Omega$ принимаем, что попавший в нее «квант» продолжает движение внутри объекта дальше, если

$$\xi \max_{(x, y) \in \Omega} \mu(x, y) \geq \mu(x', y'). \quad (6)$$

Здесь ξ — псевдослучайное равномерно распределенное на $(0, 1)$ число. В последнем случае вновь перемещаемся на длину λ в направлении луча зрения и т. д. В конечном счете, «квант» либо поглотится и в итоге не примет участия в формировании проекции, либо будет зарегистрирован детектором. Число «квантов», зафиксированных детектором p_κ -й проекции, определенной углом φ_l , суммируется с предыдущим значением $W^{(0)}$:

$$W^{(1)}(p_\kappa, \varphi_l) = W^{(0)}(p_\kappa, \varphi_l) + h_f \frac{N_1}{N_0}, \quad (7)$$

причем считается, что в начальный момент $W^{(0)} = 0$, N_1 — число «квантов», попавших в ячейку (p_κ, φ_l) , $\kappa = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$.

3. Производится сравнение величин $W^{(1)}(p_\kappa, \varphi_l)$ и $f(p_\kappa, \varphi_l)$. Если $W^{(1)}(p_\kappa, \varphi_l) \leq f(p_\kappa, \varphi_l)$ для всевозможных κ и l , то шаг принимается и ε_{ij} изменяется на $(\varepsilon_{ij} + h_\varepsilon)$, а массив проекционных данных $W^{(0)}$ заменяется на $W^{(1)}$. В противном случае шаг считается отклоненным.

4. Возвращаемся к п. 1. Процесс восстановления прекращается, как только норма отклонения построенного массива проекций W от исходного массива f становится меньше априорно заданной погрешности входных данных. В известном смысле условие прекращения счета играет роль процедуры регуляризации задачи [4].

В качестве параметра регуляции выступает величина шага h_f , которая должна быть согласована с точностью входных данных. Поясним критерий выбора h_f . Точность методов Монте-Карло пропорциональна $M^{-1/2}$, где M — число испытаний [3]. Поэтому для согласования с проекционными данными при зашумленности в $\eta\%$ (надо помнить, что, по сути дела, мы многократно решаем прямую задачу) требуется $M \cong 10^4/\eta$ испытаний. Определяя среднее значение для набора проекционных данных

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_{\kappa=1}^N \sum_{l=1}^L f(p_\kappa, \varphi_l)}{NL}, \quad (8)$$

находим

$$h_f = \frac{\langle f \rangle}{M} = \frac{\sum_{\kappa=1}^N \sum_{l=1}^L f(p_\kappa, \varphi_l)}{NL} \eta \cdot 10^{-4}. \quad (9)$$

Очевидно, что в процессе счета с течением времени «удачные» шаги будут все более редкими, поскольку раз от раза становится все сложнее добавить в выбранную случайную ячейку (i, j) области Ω

«зерно» h_ε так, чтобы полученная функция испускания удовлетворяла при этом всем проекциям. Ясно, что если ячейка оказалась выбранной неудачно, т.е. при добавлении в нее нового «зерна» она уже не может удовлетворить всем проекциям, то ее в дальнейшем рассматривать не следует. Это обстоятельство позволяет существенно ускорить процесс счета. Таким образом, с течением времени исключаем из рассмотрения все ячейки области Ω , после чего расчет считается завершенным.

На основе описанной схемы был разработан комплекс программ и выполнен ряд вычислительных экспериментов по схеме замкнутого цикла [4]:

- а) создавалось распределение коэффициента испускания;
 - б) находились проекции $f(p_k, \varphi_l)$;
 - в) в проекционные данные вносился шумовой фактор (шумом служили аддитивные некоррелированные псевдослучайные числа, распределенные по нормальному закону);
 - г) восстанавливалось в виде гистограммы распределение коэффициента испускания $\varepsilon_y^{(0)}$;
 - д) производилась фильтрация полученного решения;
 - е) решение анализировалось и отображалось графически.
- В качестве модельных выбирались следующие двумерные функции:

– гладкие:

$$\varepsilon_1(x, y) = \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{d_0} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{d_0} \right)^2 \right] + 0,5 \exp \left[- \left(\frac{x - x_1}{d_1} \right)^2 - \left(\frac{y - y_1}{d_1} \right)^2 \right], \quad (10)$$

– ступенчатые:

$$\varepsilon_2(x, y) = \begin{cases} 1 & -0,5 \leq x \leq 0,5; \quad 0,2 \leq y \leq 0,7; \\ 0,5 & -0,5 \leq x \leq 0,5; \quad -0,7 \leq y \leq -0,2; \\ 0 & \text{во всей остальной области.} \end{cases} \quad (11)$$

Коэффициент экстинкции $\mu(x, y)$ задавался в виде

$$\mu(x, y) = a + bx^2 + cy. \quad (12)$$

В качестве области Ω брался круг с центром в начале координат и радиусом $R_1 = 1$. По-видимому, впервые восстановление производилось и на сложной невыпуклой области

$$\Omega' = \{ \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x+1)^2 + y^2 \geq 1\} \}. \quad (13)$$

Одним из преимуществ проведения вычислительных экспериментов по схеме замкнутого цикла является возможность сравнения построенного изображения $\{\varepsilon_{ij}^{(0)}\}$ с исходным $\{\varepsilon_{ij}\}$, где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(x_i + h/2, y_j + h/2)$. В таких сравнительных оценках использовались два критерия:

$$S = \left(\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\varepsilon_{ij}^{(0)} - \varepsilon_{ij})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}^{(0)2}} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

где S иногда называют среднеквадратической мерой различия, и

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(0)}|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}}, \quad (15)$$

где R – нормативная абсолютная мера различия. Отметим, что мерой S преимущественно учитывается малое число больших по величине ошибок, а мерой R – большое число малых ошибок. На рис. 1–4 приводятся выборочные результаты восстановления коэффициента испускания $\varepsilon(x, y)$.

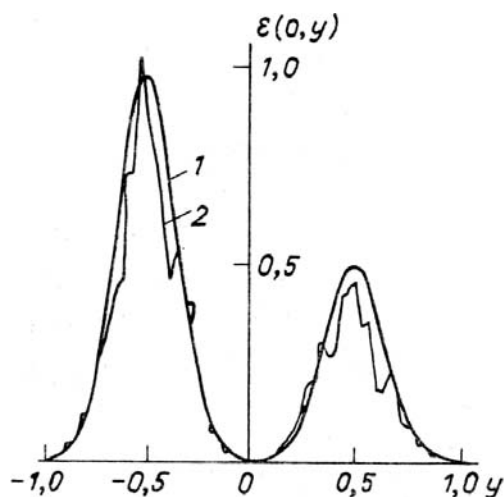


Рис. 1. Центральное сечение $\varepsilon(0, y)$ точного решения (16) — кривая 1; то же сечение, восстановленное по 16 проекциям (кривая 2)

На рис. 1 дано центральное сечение ($x = 0$), когда в качестве модельного распределения бралась функция

$$\varepsilon(x, y) = \exp[-25x^2 - 25(y+0,5)^2] + 0,5\exp[-25x^2 - 25(y-0,5)^2] \quad (16)$$

(кривая 1). Восстановленное распределение (кривая 2) характеризуется величинами $S = 28\%$ и $R = 24\%$. На рис. 2 изображены изолинии соответствующих томограмм. Восстановление производилось по 16 проекциям.

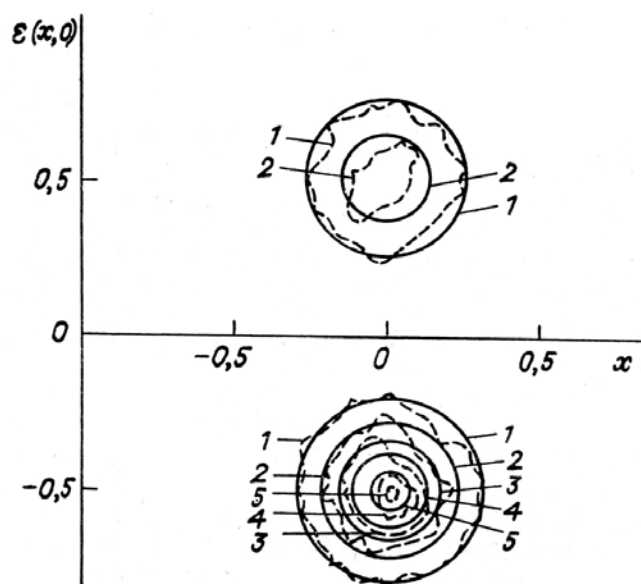


Рис. 2. Изолинии распределений точного коэффициента испускания (16) (сплошные) и восстановленного (штриховые линии). Уровни интенсивностей: 1—0,1; 2—3; 3—0,5; 4—0,7; 5—0,9

На рис. 3 показаны центральное сечение ($x = 0$) для исходного модельного распределения коэффициента испускания (кривая 1) и результат восстановления (кривая 2). Распределение $\varepsilon(x, y)$ из класса ступенчатых функций (11) задавалось на невыпуклой области (13). Критериальные формулы (14), (15) дают: $S = 36\%$, $R = 28\%$; число проекций $L = 4$. На рис. 4 изображены изолинии томограмм. Результаты восстановления, приведенные на рисунках, получены с большим зашумлением исходных проекционных данных вплоть до 30%. Передаточный коэффициент ошибок из проекционного массива в результаты восстановления — порядка единицы.

Выполненная серия расчетов позволяет сделать следующие выводы.

1. Восстановление распределения коэффициента испускания методом Монте-Карло можно производить для разнообразных пространственных зависимостей коэффициента ослабления. При этом точность восстановления существенным образом определяется оптической толщиной слоя μR_1 . В на-

ших расчетах оптическая толщина, равная $8 \div 10$, являлась уже в некотором смысле критической: с дальнейшим ее возрастанием качественное восстановление (например, выделение контуров областей испускания и среднего уровня эмиссии) остается удовлетворительным, но количественных особенностей в структуре оно уже фактически выявить не может.

2. Метод Монте-Карло при восстановлении распределения коэффициента испускания в условиях поглощения достаточно устойчив к погрешностям проекционных данных. Значительная часть расчетов выполнена даже при 20–30%-м зашумлении проекций, однако передаточный коэффициент погрешностей остается $O(1)$.

3. Впервые были реконструированы двумерные распределения коэффициента испускания при наличии резко неоднородного поглощения на сложных, в том числе невыпуклых областях. Это позволяет ставить и решать обратные задачи оптики полупрозрачных сред и в условиях частичной экранировки просвечивающего излучения.

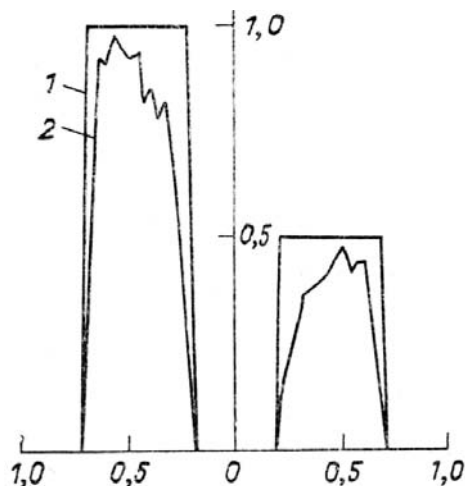


Рис. 3. Центральное сечение $\epsilon(0, y)$ точного решения (11)—кривая 1; то же сечение, восстановленное по 4 проекциям на невыпуклой области Ω (кривая 2)

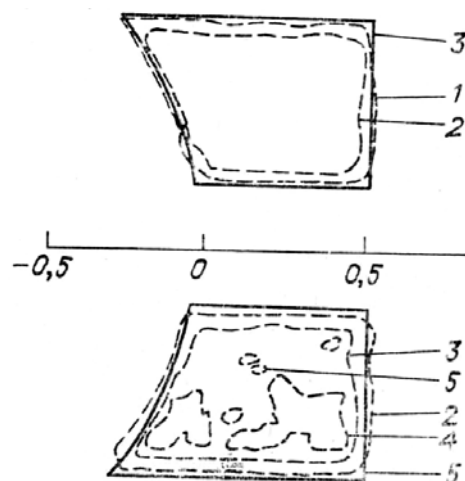


Рис. 4. Изолинии распределений точного коэффициента испускания (11) (сплошные) и восстановленного (штриховые линии). Уровни интенсивностей: 1—0,1; 2—0,3; 3—0,5; 4—0,7; 5—0,9

1. Булышев А.Е., Великанова Л.Г., Преображенский Н.Г. // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 65. Вып. 5. С. 1139–1144.
2. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
3. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 263 с.
4. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука, 1982. 238 с.
5. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. М.: Мир, 1983. 350 с.

Научно-исследовательский институт
физических проблем им. Ф.В. Лукина

Поступила в редакцию
29 мая 1990 г.

A. Bulishev, L. Velikanova, N. Preobrazhensky. Use of Monte- Carlo Method in Emission Tomography of a Turbulent Atmosphere.

A universal Monte-Carlo algorithm has been developed and studied numerically for solving the problems of optical tomography for translucent atmosphere. The algorithm has wide possibilities and makes it possible to solve complicated tomography problems inaccessible for the other methods described in literature. In particular, this method allows one to take into account the spatial structure of the extinction coefficient field, the object may be not only convex, the demands for the smoothness of the emission and absorption coefficients are inessential, the total number of the needed projection data is not great, the noise level being large, etc. The results of calculations are illustrated by the results on certain practical cases.