

# Метод расчета функции взаимной когерентности оптической волны в турбулентной атмосфере

Д.А. Маракасов, Д.С. Рычков\*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 30.03.2010 г.

Предлагается метод расчета функции взаимной когерентности второго порядка оптической волны с произвольным начальным распределением на основе общего решения параболического уравнения с любым видом спектра корреляционной функции флуктуаций показателя преломления среды с использованием обращения преобразования Френеля и процедуры быстрого преобразования Фурье. Верификация метода проведена на примере несимметричного пучка Лагерра–Гаусса для трасс с неоднородным профилем структурной характеристики.

*Ключевые слова:* лазерный пучок, турбулентность, функция взаимной когерентности, численные методы; laser beam, turbulence, mutual coherence function, numerical methods.

## Введение

При исследовании процессов распространения оптического излучения в турбулентной атмосфере на основе решения волнового уравнения в параболическом приближении широко используется функция взаимной когерентности, при помощи которой производится оценка таких характеристик оптической волны, как средний эффективный размер пучка, степень когерентности, средняя интенсивность и ее пространственное распределение в плоскости, поперечной к направлению распространения, а также осуществляются исследования когерентных свойств вихревых пучков в турбулентной атмосфере [1–7].

Известно общее решение уравнения для функции когерентности второго порядка в виде четырехмерного интеграла [8, 9]. Однако его использование удобно для пучков относительно простой формы [10, 11], в то время как для полей со сложной структурой начального распределения амплитуды и фазы процедура интегрирования требует больших объемов памяти и затрат времени [2–5]. Поэтому чаще всего используются различные приближенные решения уравнения для функции когерентности [1–3, 6, 11, 12].

В настоящей статье предлагается метод расчета функции взаимной когерентности оптической волны с произвольным начальным распределением, распространяющейся в среде со спектром корреляционной функции флуктуаций показателя преломления произвольного вида, на основе общего решения параболического уравнения для второго момента поля.

Использование обращения преобразования Френеля и процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ) обеспечивает приемлемое время расчетов на персональных ЭВМ. Приведены результаты расчета функции взаимной когерентности и средней интенсивности пучка Лагерра–Гаусса в турбулентной атмосфере.

## 1. Метод расчета функции взаимной когерентности

Построим метод расчета функции взаимной когерентности на основе общего решения [8, 9]. Пусть источник создает в плоскости  $x = 0$  ( $x$  — координата в направлении распространения) поле с комплексной амплитудой  $U(0, \rho)$ , где  $\rho = (y, z) = (\rho, \varphi)$  — вектор в плоскости, поперечной к направлению распространения, и его компоненты в декартовой и полярной системах координат. Волна распространяется в турбулентной атмосфере, которая характеризуется спектром флуктуаций показателя преломления  $\Phi_n(x, \mathbf{q})$ , в общем случае изменяющимся вдоль трассы, где  $\mathbf{q} = (q_x, \mathbf{\kappa})$  — трехмерный вектор пространственной частоты. В параксиальном приближении функцию взаимной когерентности в произвольной плоскости  $x$  можно представить следующим образом [8–11]:

$$\begin{aligned} \Gamma(x; \rho_c, \rho_d) &= \left\langle U\left(x, \rho_c + \frac{\rho_d}{2}\right) U^*\left(x, \rho_c - \frac{\rho_d}{2}\right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 x^2} \int d\rho'_c d\rho'_d \Gamma(0; \rho'_c, \rho'_d) \times \\ &\times \exp\left\{ \frac{ik}{x} (\rho_c - \rho'_c)(\rho_d - \rho'_d) - H(\rho_d, \rho'_d) \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

\* Дмитрий Анатольевич Маракасов (mda@iao.ru); Дмитрий Сергеевич Рычков (dsg@iao.ru).

где

$$H(\rho_d, \rho'_d) = 2\pi k^2 x \times$$

$$\times \int_0^1 d\xi \int d\mathbf{k} \left[ 1 - \exp\{i\mathbf{k}(\xi\rho_d + (1-\xi)\rho'_d)\} \right] \Phi_n(\xi x, \mathbf{k}); \quad (2)$$

$\xi$  – нормированная на длину трассы координата текущей точки; векторы  $\mathbf{k} = (\kappa_y, \kappa_z)$ ,  $\rho_c = (y_c, z_c)$ ,  $\rho_d = (y_d, z_d)$  перпендикулярны оптической оси;  $\lambda$  – длина волны;  $k = 2\pi/\lambda$ . Непосредственное использование выражения (1) для численного счета функции когерентности неэффективно, поскольку требует чрезмерных затрат времени и оперирования со значительными объемами данных для вычисления четырехкратного интеграла [4, 5] или применения различных приближений, например квадратичной аппроксимации функции  $H(\rho_d, \rho'_d)$  [6]. Для упрощения процедуры вычислений можно воспользоваться ранее уже отмечавшейся особенностью волнового уравнения в параксиальном приближении, которая состоит в том, что часто удобнее использовать не распределение поля в плоскости источника, а решение задачи распространения в свободном пространстве. Такой прием был применен, в частности, в работе [13] для решения задачи о генерации второй гармоники в одноосных нелинейных кристаллах.

Распространение волны  $U_0(x; \rho)$  в однородной среде можно представить преобразованием Френеля от начального распределения поля [10, 14]. Это интегральное преобразование допускает обращение [14]:

$$U_0(0; \rho) = \frac{-1}{i\lambda x} \int d\rho' U_0(x; \rho') \exp\left\{ \frac{-ik}{2x} (\rho - \rho')^2 \right\}, \quad (3)$$

из которого непосредственно следует соотношение для дифракционных функций когерентности

$$\Gamma_0(0; \rho'_c, \rho'_d) = \frac{1}{\lambda^2 x^2} \int d\mathbf{r}_c d\mathbf{r}_d \Gamma_0(x; \mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d) \times \exp\left\{ -\frac{ik}{x} (\mathbf{r}_c - \rho'_c)(\mathbf{r}_d - \rho'_d) \right\}, \quad (4)$$

которое также можно получить из (1), полагая  $\Phi_n(x, \mathbf{q}) = 0$  и меняя направление распространения на противоположное. Имея в виду, что  $\Gamma(0; \rho_c, \rho_d) = \Gamma_0(0; \rho_c, \rho_d)$ , подставим (4) в (1). Вычисляя интегралы по векторам  $\rho'_c$  и  $\rho'_d$ , получим

$$\Gamma(x; \rho_c, \rho_d) = \frac{1}{\lambda^2 x^2} \int d\mathbf{r}_c \Gamma_0(x; \mathbf{r}_c, \rho_d) \int d\rho'_d \times \exp\left[ \frac{2\pi i}{\lambda x} (\mathbf{r}_c - \rho_c)(\rho'_d - \rho_d) - H(\rho_d, \rho'_d) \right]. \quad (5)$$

Таким образом, при любых условиях распространения значения функции когерентности определяются совокупностью значений функции когерентности этой же волны в свободном пространстве для пар точек с тем же разномом  $\rho_d$ .

Замена переменной интегрирования  $\rho'_d = \rho_d + \lambda x \mathbf{k}$  приводит выражение (5) к интегралу типа свертки, из чего следует, что спектры функций когерентно-

сти в атмосфере и в свободном пространстве прямо пропорциональны:

$$\tilde{\Gamma}(x; \mathbf{k}, \rho_d) = \tilde{\Gamma}_0(x; \mathbf{k}, \rho_d) \exp\{-H(\rho_d, \lambda x \mathbf{k} + \rho_d)\}, \quad (6)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma} \\ \tilde{\Gamma}_0 \end{array} \right\} (x; \mathbf{k}, \rho_d) = \int d\rho_c \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \\ \Gamma_0 \end{array} \right\} (x; \rho_c, \rho_d) \exp\{2\pi i \mathbf{k} \rho_c\}. \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) служат основой предлагаемого метода расчета функции взаимной когерентности лазерных пучков в турбулентной атмосфере. Следуя выражению (6), расчеты можно проводить на двумерных сетках, поскольку в функциях когерентности в обеих частях (6) разностные координаты совпадают, что выгодно отличает предлагаемую форму представления решения (6), (7) от подхода с использованием распределения Вигнера (функции яркости) [10, 15]. В плоскости  $\rho_d = \text{const}$  вычисляются значения  $\Gamma_0(x; \rho_c, \rho_d)$  и  $H(\rho_d, \lambda x \mathbf{k} + \rho_d)$  на двумерных сетках.

Для расчета значений  $\tilde{\Gamma}_0(x; \mathbf{k}, \rho_d = \text{const})$  в случае, когда невозможно получить явное аналитическое выражение, можно использовать алгоритм распространения, основанный на решении параболического уравнения для комплексной амплитуды поля  $U_0(x; \rho)$  методом расщепления по физическим факторам [16], который в отсутствие турбулентности сводится к паре преобразований Фурье. Затем вычислить

$$\Gamma_0(x; \rho_c, \rho_d) = U\left(x, \rho_c + \frac{\rho_d}{2}\right) U^*\left(x, \rho_c - \frac{\rho_d}{2}\right),$$

после чего применить двумерное БПФ к получившейся функции когерентности в плоскости  $\rho_d = \text{const}$ . Иначе, если существует явное выражение для спектра дифракционной функции когерентности  $\tilde{\Gamma}_0(x; \mathbf{k}, \rho_d = \text{const})$ , остается выполнить расчет функции  $H(\rho_d, \lambda x \mathbf{k} + \rho_d)$  для заданной плоскости  $\rho_d = \text{const}$ . После чего, вычислив произведение в правой части (6), применить БПФ, что дает в результате искомого функцию  $\Gamma(x; \rho_c, \rho_d = \text{const})$ . Время выполнения этих операций определяется размером матриц, содержащих  $\Gamma_0(x; \rho_c, \rho_d)$  и  $H(\rho_d, \lambda x \mathbf{k} + \rho_d)$ , и процедурой вычисления функции  $H(\rho_d, \lambda x \mathbf{k} + \rho_d)$ . Число плоскостей  $\rho_d = \text{const}$  регулируется требованиями к разрешению получаемой функции  $\Gamma(x; \rho_c, \rho_d)$  при решении какой-либо задачи.

Таким образом, в предлагаемом методе расчета функции взаимной когерентности, основанном на строгом решении параболического уравнения для этой функции, нет необходимости в больших объемах оперативной памяти ЭВМ, а скорость и точность вычислений ограничиваются стандартными реализациями процедур БПФ и возможностями самой вычислительной техники, в отличие от методов, предложенных авторами [4, 5].

Процедура вычисления функции когерентности (6), (7) допускает различные вариации, позволяющие легко адаптировать ее для поля с любым начальным

распределением амплитуды и фазы и сред с различными спектрами корреляционной функции флуктуаций показателя преломления. Для колмогоровской турбулентности в Приложении приведен разработанный нами способ вычисления функции  $H(\rho_d, \rho'_d)$ , который не требует применения методов численного интегрирования и при этом обеспечивает хорошую точность в широком диапазоне значений параметров турбулентности.

## 2. Функция когерентности несимметричного пучка Лагерра–Гаусса

На примере пучка Лагерра–Гаусса с комплексной амплитудой поля источника

$$U_0(\rho) = \left(\frac{\rho}{a_0}\right)^m \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a_0^2} + \frac{ik\rho^2}{2F}\right) L_n^{(m)}\left(\frac{\rho^2}{a_0^2}\right) \cos m\varphi, \quad (8)$$

где  $a_0, F$  – начальные радиус и фокусное расстояние пучка;  $L_n^{(m)}(u)$  – обобщенный полином Лагерра [17], продемонстрируем применение описанного метода. Отметим, что для частного случая гауссова пучка ( $n = m = 0$ ) соотношения (6), (7) тождественны известному представлению функции когерентности [10]. Распределение средней интенсивности первой аксиально-несимметричной моды ( $n = 0, m = 1$ ) такого пучка в зависимости от его параметров и параметров турбулентной атмосферы рассматривалось в работе [18].

Распределение поля моды ( $n = 0, m = 1$ ) в плоскости приемника в отсутствие турбулентности имеет вид

$$U_0(x; \rho) = A\beta^2(x)y \exp\left\{-\beta(x)\frac{\rho^2}{2}\right\}, \quad (9)$$

где

$$\beta(x) = \left(\beta^{-1}(0) + \frac{ix}{k}\right)^{-1}, \quad \beta(0) = a_0^{-2} + \frac{ik}{F}; \quad A = \frac{1}{a_0\beta^2(0)}$$

– нормировочная константа.

Для функции когерентности пучка (9) в плоскости  $x$  в свободном пространстве и ее спектра имеем

$$\Gamma_0(x; \rho_c, \rho_d) = |A\beta^2(x)|^2 \left(y_c^2 - \frac{y_d^2}{4}\right) \times \exp\left\{-\left[\rho_c^2 + \frac{\rho_d^2}{4}\right] \operatorname{Re}\beta(x) - i\rho_c\rho_d \operatorname{Im}\beta(x)\right\}, \quad (10)$$

$$\tilde{\Gamma}_0(x; \kappa, \rho_d) = \frac{\pi |A\beta^2(x)|^2}{[\operatorname{Re}\beta(x)]^3} \left(\frac{\operatorname{Re}\beta(x)}{2} - \pi^2 \kappa_y^2 + \pi \operatorname{Im}\beta(x) \kappa_y y_d - \frac{x_d^2}{4} |\beta(x)|^2\right) \times \exp\left\{-\frac{\pi^2 \kappa^2 - \pi \operatorname{Im}\beta(x) \kappa \rho_d + \rho_d^2 |\beta(x)|^2 / 4}{\operatorname{Re}\beta(x)}\right\}. \quad (11)$$

Функция  $H(0, \lambda, \kappa)$  не зависит от направления вектора пространственной частоты, что позволяет представить выражение для средней интенсивности в виде однократного интеграла:

$$\langle I(x, \rho) \rangle = \pi^2 \frac{|A\beta^2(x)|^2}{[\operatorname{Re}\beta(x)]^2} \int_0^\infty d\kappa \kappa \exp\left\{-\frac{\pi^2 \kappa^2}{\operatorname{Re}\beta(x)} - H(0, \lambda, \kappa)\right\} \times \left[ \left(1 - \frac{\pi^2 \kappa^2}{\operatorname{Re}\beta(x)}\right) J_0(2\pi\kappa\rho) + \frac{\pi^2 \kappa^2}{\operatorname{Re}\beta(x)} J_2(2\pi\kappa\rho) \cos 2\varphi \right], \quad (12)$$

которое при  $\cos 2\varphi = 1$  совпадает с результатами работы [18] и устраняет ошибку, допущенную в [18] для других значений угла  $\varphi$ , следствием которой является, в частности, обращение в нуль средней интенсивности при  $\cos 2\varphi = 0$ .

Сравним результат расчета средней интенсивности по формуле (12) и результаты применения алгоритма (6), (7) в двух вариантах. В первом из них расчет проводится с использованием выражения для спектра дифракционной функции когерентности, полученной выше [формула (11)], а во втором варианте выполняется вся последовательность действий, начиная с вычисления в плоскости приемника поля, прошедшего трассу в свободном пространстве.

Расчеты средней интенсивности и функции когерентности проводились на сетке размером  $512 \times 512$  ячеек с шагом 0,5 мм, при этом время, затрачиваемое на расчет одной плоскости  $\rho_d = \text{const}$ , не превосходило 2 с.

На рис. 1 показаны распределения средней интенсивности, нормированной на ее максимальное значение в свободном пространстве

$$I_0(x) = |A\beta^2(x)|^2 / \operatorname{Re}\beta(x), \quad (13)$$

в направлении оси  $y$  для коллимированного пучка ( $F \rightarrow \infty$ ) длиной волны  $\lambda = 6,328 \cdot 10^{-7}$  м, начальным радиусом  $a_0 = 10^{-2}$  м на трассе  $x = 10^3$  м, с постоянным вдоль трассы значением структурной характеристики и внутренним масштабом турбулентности  $l_0 = 5$  мм.

Турбулентные условия на трассе, которые характеризовались значением параметра  $\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 x^{11/6} k^{7/6}$ , изменялись от режима слабой ( $\beta_0^2 \ll 1$ ) до режима сильной ( $\beta_0^2 \gg 1$ ) турбулентности, захватывая также промежуточный режим. На рис. 1 сплошные линии – результаты расчета средней интенсивности по формуле (12), точки – усеченный алгоритм с использованием выражения (11), крестики – результат применения алгоритма (6), (7) в полном варианте, в котором осуществлялся последовательный расчет распределения поля в плоскости приемника и дифракционной функции когерентности.

Видно, что для всех значений параметра  $\beta_0^2$ , для которых проводились расчеты средней интенсивности в трех вариантах [формула (12), усеченный алгоритм, полный алгоритм], результаты совпадают, причем погрешность предложенного алгоритма

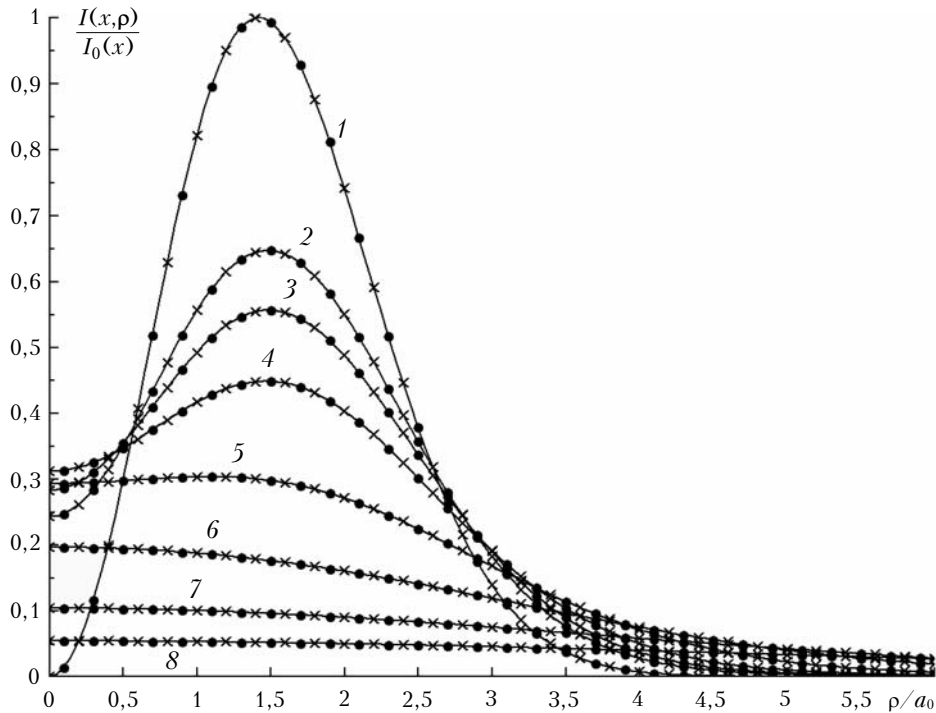


Рис. 1. Профили интенсивности коллимированного пучка Лагерра–Гаусса на трассе в турбулентной атмосфере с постоянным значением  $C_n^2$ . Кривая 1 – однородная среда; 2–8 –  $\beta_0^2 = 0,5; 0,74; 1,1; 2,3; 5; 11; 23$

в обоих вариантах не превышает 1% относительно расчета по формуле (12). В области, где сосредоточена основная (90%) энергия пучка, эта ошибка составляла не более 0,1%.

При росте параметра  $\beta_0^2$  минимум интенсивности пучка на оптической оси постепенно замывается (см. рис. 1). Для значений  $\beta_0^2 > 5$  распределение интенсивности в исследуемом пучке трансформируется в гауссоиду, и его интенсивность в максимуме быстро падает.

Как отмечено в [18], положение максимумов заметно изменяется только при больших значениях  $\beta_0^2$ , соответствующих почти полной засветке центральной зоны вблизи оптической оси (рис. 1, кривые 4–6).

Рассмотрим эволюцию функции когерентности пучка при изменении  $\beta_0^2$ . Расчет функции когерентности проведем для пучка с теми же параметрами, что и на рис. 1, на атмосферной трассе той же длины. На рис. 2 построены распределения модуля (слева) и аргумента (справа) степени когерентности

$$\gamma(x; \rho_c, \rho_d) = \frac{\Gamma(x; \rho_c, \rho_d)}{\sqrt{I\left(x; \rho_c + \frac{\rho_d}{2}\right) I\left(x; \rho_c - \frac{\rho_d}{2}\right)}} \quad (14)$$

при  $y_d = 10^{-2}$  м,  $z_d = 1,4 \cdot 10^{-2}$  м для значений индекса мерцаний плоской волны  $\beta_0^2 = 0,1; 1,25; 5$ .

В слабой турбулентности есть три максимума степени когерентности, соответствующие максимумам интенсивности и центральному минимуму пучка (рис. 2, а). С ростом  $\beta_0^2$  число областей с максимальной когерентностью поля уменьшается до двух (рис. 2, б). При больших значениях  $\beta_0^2$  пара макси-

мумов в распределении степени когерентности сохраняется для  $\rho_d \neq 0$  (рис. 2, в), несмотря на то что средняя интенсивность пучка уже приобрела гауссову форму.

На рис. 2 стрелками отмечены точки полной некогерентности поля, которые при росте параметра  $\beta_0^2$  уходят от оптической оси по мере трансформации пучка к гауссовой форме.

Когда турбулентный слой занимает только часть трассы, структура пучка меняется с ростом структурной характеристики заметно медленнее.

На рис. 3 показаны профили интенсивности, рассчитанные для пучка, распространяющегося на трассе длиной 1 км, когда турбулентный слой толщиной

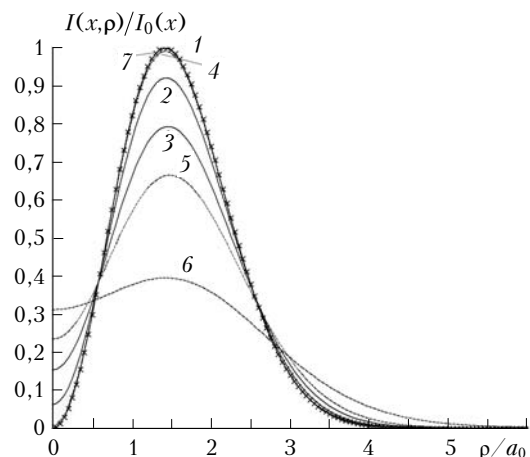


Рис. 3. Профили интенсивности коллимированного пучка Лагерра–Гаусса, прошедшего слой турбулентности в зависимости от положения слоя на трассе

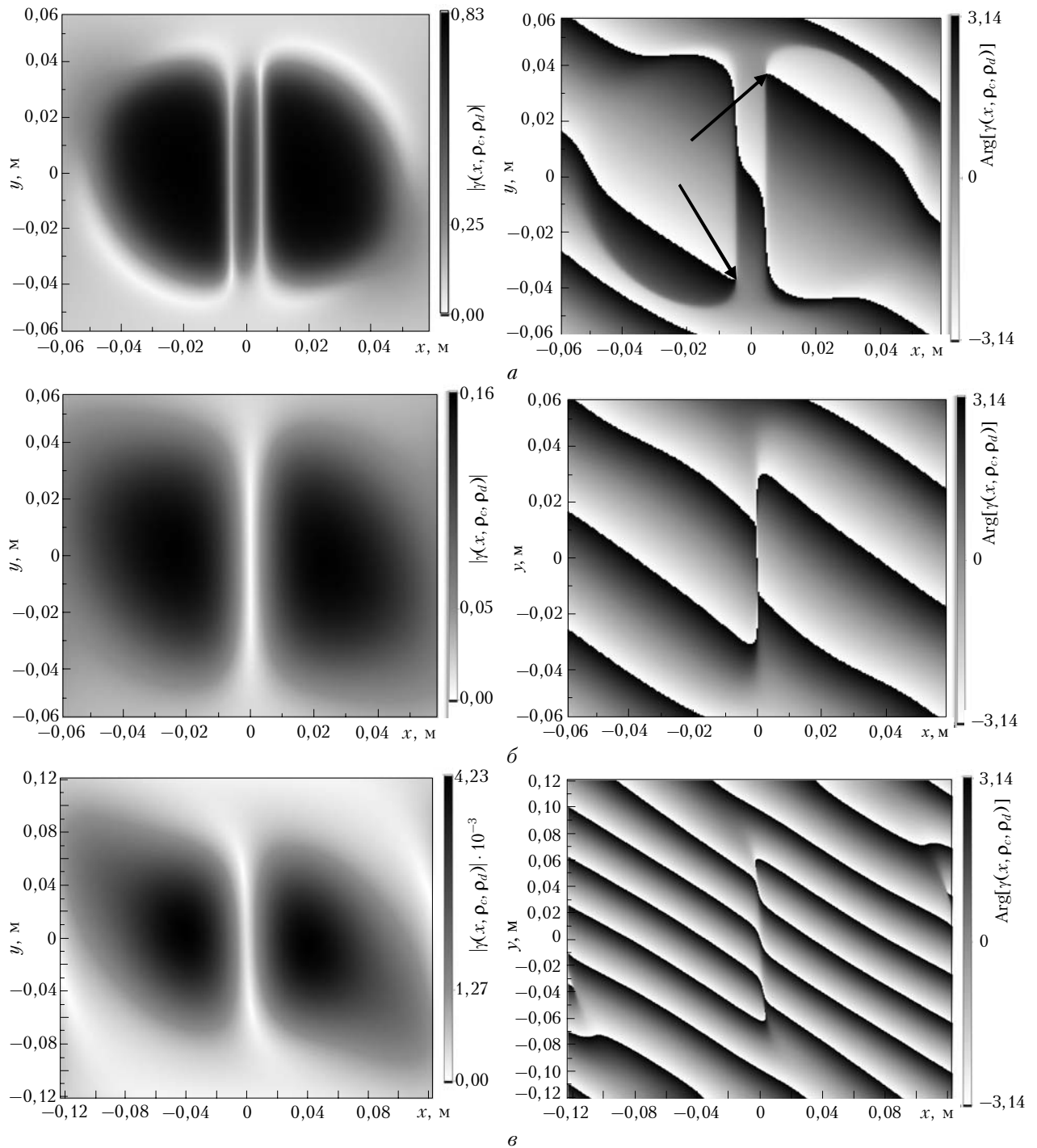


Рис. 2. Степень когерентности коллимированного несимметричного пучка Лагерра–Гаусса на трассе в турбулентной атмосфере,  $\beta_0^2 = 0,1; 1,25; 5$ . Стрелками показаны положения точек полной некогерентности

$\Delta x = 100$  м расположен вблизи приемника (см. рис. 3, кривые 1, 4), в середине трассы (кривые 2, 5) и вблизи источника (кривые 3, 6). Параметры пучка те же, что и для рис. 1, 2.

Расчеты проведены для двух значений  $C_n^2 = 1,77 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$  (кривые 1–3) и  $10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$  (кривые 4–6). Для сравнения также показан профиль интенсивности пучка в однородной среде (кривая 7, крестик).

## Заключение

Предложен метод расчета функции взаимной когерентности для оптического поля с произвольным начальным распределением, распространяющегося в турбулентной среде со спектром корреляционной функции флуктуаций показателя преломления произвольного вида, на основе общего решения параболического уравнения для второго момента поля.

Применение обращения преобразования Френеля и процедуры быстрого преобразования Фурье позволяет существенно сократить затраты времени и вычислительных ресурсов.

Верификация метода выполнена на примере несимметричного пучка Лагерра–Гаусса, для которого ранее в работе [18] были проведены расчеты профиля средней интенсивности, причем ошибка вычисления средней интенсивности не превосходит 1%. Исследована эволюция функции когерентности такого пучка на трассе с однородным профилем структурной характеристики. Рассмотрены случаи неоднородного вдоль трассы профиля структурной характеристики.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-91224 СТ\_а.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Алгоритм расчета функции $H(\rho_d, \rho'_d)$

Для колмогоровской турбулентности с внутренним масштабом  $l_0$  неоднородностей со спектром  $\Phi_n(x', \kappa) = 0,033C_n^2(x')\kappa^{-11/3} \exp\{-(\kappa/\kappa_0)^2\}$  функция  $H(\rho_d, \lambda x \kappa + \rho_d)$  (2) может быть представлена в виде интеграла

$$H(\rho_d, \rho'_d + \rho_d) = k^2 x \int_0^1 C_n^2(x(1-\xi)) f(\kappa_0 |\rho_d + \xi \rho'_d|) d\xi, \quad (П1)$$

$$f(t) = 0,066\pi^2 \kappa_0^{-5/3} \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \left[1 - M\left(-\frac{5}{6}, 1; -\frac{t^2}{4}\right)\right], \quad (П2)$$

где  $\kappa_0 = 5,92/l_0$ ;  $t = \kappa_0 |\rho_d + \xi \rho'_d|$ ;  $M(a, b; t)$  – функция Куммера [17]. Переход в выражении (П2) к пределу  $\kappa_0 \rightarrow \infty$  дает  $f(\kappa_0, r) \rightarrow 1,46r^{5/3}$ , что соответствует колмогоровскому спектру без масштабов [8].

Рассмотрим процедуру расчета  $H(\rho_d, \rho'_d + \rho_d)$ . Если профиль структурной характеристики задан в виде набора значений  $C_n^2(x(1-\xi)) = C_{nj}^2$ , где  $\xi \in (\xi_{j-1}, \xi_j)$ ,  $\xi_0 = 0$  – плоскость источника,  $\xi_N = 1$  – плоскость приемника;  $j \in [1, N]$ ,  $N$  – число слоев с постоянным значением  $C_n^2$ , то функция  $H(\rho_d, \rho'_d + \rho_d)$  может быть представлена в виде суммы:

$$H(\rho_d, \rho'_d + \rho_d) = -4,351k^2 x \kappa_0^{-5/3} \sum_{j=1}^N C_{nj}^2 S_j; \quad (П3)$$

$$S_j = \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} d\xi \left[1 - M\left(-\frac{5}{6}, 1; -\frac{\kappa_0^2}{4} |\rho_d + \xi \rho'_d|^2\right)\right]. \quad (П4)$$

В плоскости  $\rho'_d = 0$  вычисление интеграла в (П4) очевидно:

$$S_j = (\xi_j - \xi_{j-1}) \left[1 - M\left(-\frac{5}{6}, 1; -\frac{\kappa_0^2}{4} |\rho_d|^2\right)\right]. \quad (П5)$$

В противном случае для вычисления величин  $S_j$  воспользуемся следующим алгоритмом. Аппроксимируем функцию Куммера с аргументами  $a = -5/6$ ,  $b = 1$ ,  $u \geq 0$  рядом

$$M(a, b; -u) \cong \tilde{M}(u) = \sum_{n=1}^{N_1} A_n (u+p)^{1-a-n}. \quad (П6)$$

Потребуем, чтобы при устремлении  $u \rightarrow \infty$  возрастающие члены асимптотического разложения функции Куммера [17] совпадали с соответствующими членами ряда в правой части (П6). Это позволяет сразу определить первый коэффициент

$$A_1 = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} = 1,0631, \quad (П7)$$

а остальные  $N_1 - 1$  этих коэффициентов определим, потребовав совпадения первых  $N_1 - 1$  слагаемых в разложениях в ряд Маклорена функции Куммера и слагаемых в правой части (П6). Это требование можно представить в виде матричного уравнения  $\mathbf{b} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{C}^{-1}$ , в котором вектор  $\mathbf{b}$  – искомые коэффициенты, а вектор  $\mathbf{d}$  и матрица  $\mathbf{C}$  определены как

$$d_l = (a)_{l-1} \left( \frac{p^{l+a-1}}{(b)_{l-1}} - A_1 \right), \quad l = \overline{1 \dots N_1 - 1}, \quad (П8)$$

$$C_{jl} = (a + l)_{j-1} p^{-l}, \quad j, l = \overline{1 \dots N_1 - 1}, \quad (П9)$$

где  $(a)_m$  – символ Похгаммера [17].

Значение величины  $p(N_1)$  при выбранной длине суммы (П6) определяется положением минимума вспомогательной функции

$$T_{\max}(p) = \max(T(p, N_1, u), u = 0 \dots \infty),$$

$$T(p, N_1, u) = \left| \frac{M\left(-\frac{5}{6}, 1; -u\right) - 1}{\tilde{M}(u) - 1} - 1 \right|, \quad (П10)$$

где  $T(p, N_1, u)$  – относительная погрешность аппроксимации функции  $f(t)$  посредством (П5). Как абсолютная, так и относительная ошибки приближения (П6) ограничены уже при  $N_1 \geq 2$  для всех положительных значений  $u$  и быстро убывают при росте  $N_1$  (рисунок). Увеличение аргумента  $u$  также ведет к быстрому уменьшению ошибки.

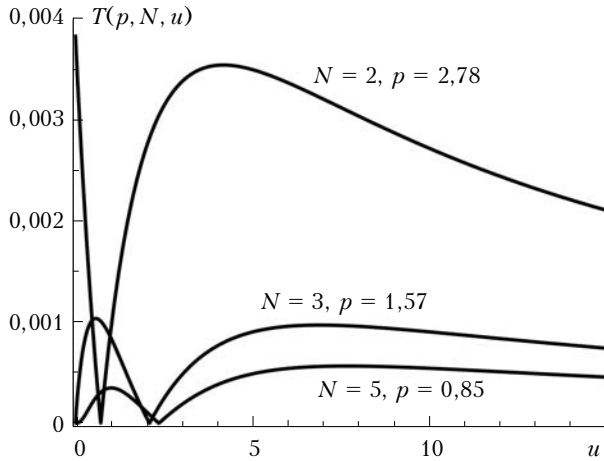
Используя (П6), интеграл в (П4) можно вычислить аналитически:

$$S_j \cong (\xi_j - \chi) \left[1 - \sum_{n=1}^{N_1} A_n (\tau^2 + p)^{11/6-n} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(-\frac{11}{6} + n, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{v^2(\xi - \chi)^2}{\tau^2 + p}\right)\right]_{\xi_{j-1}}^{\xi_j}, \quad (П11)$$

где

$$\tau = \frac{|\rho_d \times \rho'_d| \kappa_0}{2\rho'_d}; \quad v = \frac{\rho'_d \kappa_0}{2}; \quad \chi = 1 + \frac{\rho_d \rho'_d}{\rho_d^2}, \quad (П12)$$

${}_2F_1$  – гипергеометрическая функция Гаусса [17]. Для расчета величин  $S_j$  с относительной ошибкой  $\varepsilon < 0,4\%$  достаточно двух первых слагаемых ряда (П6) при значениях констант  $A_1 = 1,0631$ ,  $A_2 = -1,7646$ ,  $p = 2,775$ .



Поведение относительной погрешности аппроксимации  $T(p, N, u)$  (П5) в зависимости от аргумента  $u$  для различной длины аппроксимирующего ряда

Гипергеометрические функции Гаусса, входящие в (П11), для положительных значений  $u$  можно рассчитывать, используя формулы линейного преобразования [17]:

$$\begin{aligned}
 & {}_2F_1\left(a+n-1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -u\right) = \\
 & = (1+u)^{-a-n+1} {}_2F_1\left(a+n-1, 1; \frac{3}{2}; \frac{u}{u+1}\right), \quad u \leq 1, \quad (\text{П13})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & {}_2F_1\left(a+n-1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -u\right) = \\
 & = -\frac{(1+u)^{-a-n+1}}{2a+2n+1} {}_2F_1\left(a+n-1, 1; a+n-\frac{1}{2}; \frac{1}{u+1}\right) + \\
 & + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\Gamma(a+n-3/2)}{\Gamma(a+n-1)} u^{-1/2}, \quad u > 1. \quad (\text{П14})
 \end{aligned}$$

Аргументы  $t = \left\{ \frac{u/(u+1)}{1/(u+1)} \right\}$  функций  ${}_2F_1$  в правых частях (П13), (П14) неотрицательны и не превосходят  $1/2$ , что позволяет использовать для их вычисления быстро сходящиеся степенные ряды

$${}_2F_1(a+n-1, 1; q; t) = \sum_{n=0}^{N_2} \frac{(a+n-1)_n}{(q)_n} t^n + R_{N_2}, \quad (\text{П15})$$

где

$$q = \left\{ \frac{3/2}{a+n-1/2} \right\}; \quad R_{N_2} = O(|t|^{-N_2-1})$$

**D.A. Marakosov, D.S. Rytchkov. Method of evaluation of mutual coherence function of an optical wave propagating in turbulent atmosphere.**

Method of evaluation of mutual coherence function of an optical wave propagating in turbulent atmosphere based on using of conversation of Fresnel integral and 2-D Fast Fourier Transformation procedure is proposed. The method is suitable for optical waves with arbitrary initial distribution of amplitude and phase, and for various spectra of correlation function of refractive index fluctuations and profiles of structural characteristic of refractive index. For verification of developed method, evaluations of mutual coherence function of asymmetric Laguerre–Gaussian mode of laser beam carried out and the results are presented.

– остаток [17]. При этом для значений  $n < 12$  погрешность вычисления (П15) с  $N_2 = 40$  не превосходит  $10^{-12}$ , что более чем достаточно для наших целей при расчете функции  $H(\rho_a, \rho'_a)$ .

1. Eyyuboglu H.T., Baykal Y. Average intensity and spreading of cosh-Gaussian laser beams in the turbulent atmosphere // Appl. Opt. 2005. V. 44, N 6. P. 976–983.
2. Rao L., Pu J. Spatial correlation properties of focused partially coherent vortex beams // J. Opt. Soc. Amer. A. 2007. V. 24, N 8. P. 2242–2247.
3. Chu X., Liu Z., Wu Y. Propagation of a general multi-Gaussian beam in turbulent atmosphere in a slant path // J. Opt. Soc. Amer. A. 2008. V. 25, N 1. P. 74–79.
4. Arpali C., Yazicioglu C., Eyyuboglu H.T., Arpali S.A., Baykal Y. Simulator for general-type beam propagation in turbulent atmosphere // Opt. Express. 2006. V. 14, N 20. P. 8918–8928.
5. Eyyuboglu H.T., Sermutlu E. Calculation of average intensity via semi-analytic method // Appl. Phys. B. 2010. V. 98, N 10. P. 865–870.
6. Li J., Zhang H., Lu B. Partially coherent vortex beams propagating through slant atmospheric turbulence and coherence vortex evolution // Opt. & Laser Technol. 2010. V. 42, N 2. P. 428–433.
7. Лукин И.П. Флуктуации фазы бesselь-гауссовых пучков в случайно-неоднородных средах // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 1. С. 66–70.
8. Долин Л.С. Уравнения для корреляционных функций волнового пучка в хаотически неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофиз. 1968. Т. 11, № 6. С. 840–849.
9. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
10. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 318 с.
11. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 270 с.
12. Колосов В.В. Лучевой метод решения уравнения для функции когерентности // Оптика атмосф. и океана. 1992. Т. 5, № 4. С. 397–404.
13. Троцкий В.О. Генерация второй гармоники при фокусировке пучка в одноосный кристалл скрещенными цилиндрическими линзами. Приближение заданного поля // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19, № 8. С. 741–747.
14. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. Спиральные пучки света // Успехи физ. наук. 2004. Т. 174, № 12. С. 1273–1300.
15. Dudorov V.V., Vorontsov M.A., Kolosov V.V. Speckle-field propagation in «frozen» turbulence: brightness function approach // J. Opt. Soc. Amer. A. 2006. V. 23, N 8. P. 1924–1936.
16. Кандидов В.П. Метод Монте-Карло в нелинейной статистической оптике // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166, № 12. С. 1309–1338.
17. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
18. Банах В.А., Миронов В.Л., Мышкина Т.В. Средняя интенсивность несимметричного пучка оптического излучения в турбулентной атмосфере // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1973. Т. 9, № 5. С. 539–543.