«Оптика атмосферы и океана», **12**, № 9 (1999)

УДК 535.33:34

Л.И. Несмелова, О.Б. Родимова, С.Д. Творогов

О ПРИМЕНЕНИИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ ПРИ РАСЧЕТЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОТОКОВ В МОЛЕКУЛЯРНОЙ АТМОСФЕРЕ

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 8.07.99 г.

Ряды экспонент, как прием интегрирования интенсивности излучения по спектру, наиболее эффективны при решении задач о радиационных процессах в атмосфере, если с их помощью писать уравнения для усредненных по спектру величин.

1. Постановка задачи

Обозначим через $J(\mathbf{r},\mathbf{n};\omega)$ спектральную (с частотой ω) интенсивность излучения, идущего через точку $\mathbf{r}$ в направлении орта $\mathbf{n}$. Величина

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{n}\ J(\mathbf{r},\mathbf{n};\omega)\,d\mathbf{n}\ d\omega \tag{1}$$

именуется «потоком излучения в точке $\mathbf{r}$», и

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 4\pi \int d\omega\ \eta(\mathbf{r},\omega) - \int d\omega\, d\mathbf{n}\, \varkappa(\mathbf{r},\omega)\, J(\mathbf{r},\mathbf{n};\omega) \tag{2}$$

входит в уравнение теплового баланса для точки $\mathbf{r}$ (точнее, соответствующего элементарного объема); в (2) η и $\varkappa$ – коэффициенты излучения и поглощения. Разумеется, ситуацию надо полагать стационарной в том смысле, что в среде нет процессов, скорость которых сопоставима со скоростью света, и поэтому время t входит в уравнение переноса лишь как параметр. Тогда (с обычной ссылкой на то, что в уравнении переноса фигурируют лучи геометрической оптики) $\mathbf{n}J$ интерпретируется как вектор Пойнтинга, а (2) оказывается джоулевым теплом.

Далее имеется в виду популярная для радиационных задач ситуация [1, 2] – молекулярная горизонтально однородная плоская атмосфера, когда уравнение переноса обретает вид

$$\cos\theta\ \frac{\partial J(z,\theta;\omega)}{\partial z} = -\,\varkappa(z,\omega)\ J(z,\theta;\omega) + \eta(z,\omega)\,. \tag{3}$$

Здесь z – высота над поверхностью Земли; θ – угол между вертикалью и направлением распространения луча. Напомним еще, что $\eta = B\varkappa$ с функцией Планка $B(\omega, \Theta)$, когда есть локальное термодинамическое равновесие при температуре Θ; иногда (высокие слои атмосферы [3], далекое крыло вращательной полосы паров воды [4]) приходится к B добавлять множитель $\mu(\omega)$, фиксирующий отклонение от ЛТР.

Главная вычислительная проблема связана с надобностью, диктуемой (1) и (2), интегрировать решение (3) по частоте. Казалось бы, современные компьютеры и процедура line-by-line переводят вопрос этот в сферу сугубо техническую; однако появляются некие, и весьма существенные, обстоятельства. Главное в том, что квантовый расчет $\varkappa(\omega)$ сопровождается многочисленными приближениями и вынужденной необходимостью привлекать громадное число эмпирических констант. Но для (1) вовсе не нужна столь детальная спектроскопическая картина – и от «лишней» (и добываемой сложным путем) информации приходится избавляться ценой дополнительных, и далеко не простых, усилий. К тому же гигантское число спектральных линий делает радиационный блок климатических моделей и алгоритмов геофизических приложений атмосферной оптики столь громоздким, что порой ставит под угрозу саму возможность эффективного функционирования подобных моделей и алгоритмов. Поэтому вновь обретают популярность приемы «докомпьютерной эпохи» – своего рода ренессанс идей для вычисления $\int d\omega\ (\ldots)$ в (1).

Одна из них – ряды экспонент, применение которых для (3) (см. [5]) приводит к соотношениям

$$I\,(z,\theta) \equiv \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} J(z,\theta;\omega)\ d\omega = \sum_{\nu=1} b_\nu\ I_\nu(z,\theta), \qquad \Delta\omega = \omega'' - \omega'; \tag{4}$$

$$\cos\theta\ \frac{\partial\ I_\nu(z,\theta)}{\partial z} = -\ s(g_\nu; z)\ I_\nu\ +\ \Omega\ (z)\ s(g_\nu; z). \tag{5}$$

Здесь b_ν и g_ν – ординаты и абсциссы квадратурной формулы; $s(g, z)$ – функция, обратная $g(s; z)$ (по аргументу s; z трактуется как параметр):

$$g\,(s;z) = \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\varkappa(\omega;z)\le s,\ \omega\in[\omega',\omega'']} u\,(\omega;z)\,d\omega\ ;$$

$$u\,(\omega;z) = \frac{B\,(z,\omega)}{\Omega\ (z)}\,; \tag{6}$$

$$\Omega\,(z)\ \frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''} d\omega\ B\,(z,\omega)\,.$$

При нарушении ЛТР надо в (6) заменить B на B_μ; зависимость B от z появляется из-за $\Theta = \Theta(z)$.

Соотношение (4) свидетельствует, что (5) – уравнение для уже проинтегрированной по частоте интенсивности. Процедура перехода от (3) к (5) практически точна. Далее проследим последовательное применение (4), (5) для расчета (2).

Два примечания можно сделать относительно программы, апеллирующей к (4)–(6). Во-первых, процедура (6) построения $s(g)$, как выясняется, сводится к определенному упорядочению $\varkappa(\omega)$ по величине. Во-вторых, при надлежащем выборе квадратурной формулы число слагаемых в (4) – всего несколько единиц; и это вместо тысяч слагаемых, которые понадобились бы при прямом $\int d\omega\ (\dots)$ в (4).

Обсуждая постановку задачи, напомним еще, что (2) входит в термодинамическое соотношение [1, 2]:

$$c_p\ \rho\ \frac{\partial\Theta}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{F} + G\,, \tag{7}$$

для изменения температуры в определенной точке. Здесь ρ – плотность воздуха; c_p – теплоемкость при постоянном давлении; в G включены иные, кроме радиационного потока, меняющие температуру факторы (например, конвекция). Как уже отмечалось, именно (7) привнесет в (5) параметрическую зависимость от времени.

2. Решение

Интегралом уравнения (5) будет

$$\begin{aligned} I_\nu(z,\theta) &= \sec\theta\ C\ \mathrm{e}^{-\sec\theta\int_{z_0}^{z} s(g_\nu;z')\,dz'} + \\ &+ \sec\theta\int_{z_0}^{z} dz'\ \Omega(z')\ s(g_\nu;z')\ \mathrm{e}^{-\sec\theta\int_{z'}^{z} s(g_\nu;z'')\,dz''} \end{aligned} \tag{8}$$

с постоянными интегрирования C и z_0. Первое слагаемое (8) – решение соответствующего уравнению (5) однородного уравнения, второе – частное решение неоднородного.

Собственно, последнее имеет смысл излучения атмосферы или диффузного излучения; формально для его вычисления надо положить $C = 0$. Обычно выделяются нисходящее диффузное излучение $I^{\downarrow}$: $z_0 = \infty$; $\pi/2 < \theta < \pi$, и восходящее диффузное излучение $I^{\uparrow}$: $z_0 = 0$; $0 \le \theta < \pi/2$. $I_\nu(z, \pi/2) = 0$, что сразу же следует из (8). Итак,

$$I_\nu^{\downarrow} = -\sec\theta\int_z^{\infty} dz'\,\Omega(z')\,s(g_\nu;z)\ \mathrm{e}^{\sec\theta\int_z^{z'} s(g_\nu;z'')\,dz''}\ ; \tag{9}$$

$$I_\nu^{\uparrow} = \sec\theta\int_0^{z} dz'\,\Omega(z')\,s(g_\nu;z)\,\mathrm{e}^{-\sec\theta\int_{z'}^{z} s(g_\nu;z'')\,dz''}\ . \tag{10}$$

Для нисходящего излучения роль решения однородного уравнения играет, естественно, солнечное излучение – оно формально ограничивает постоянную C. Чтобы избежать некоторых математических тонкостей, можно просто вернуться к (1) и (3): если орт $\mathbf{n}_0$ определяет направление солнечных лучей и $J^{(0)}(\omega)$ – их спектральный состав, то к (9) надо добавить

$$I_\nu^{(0)} = K\ \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)\ \mathrm{e}^{\sec\theta\int_z^{\infty} p\,(g_\nu;z')\,dz'}\ . \tag{11}$$

Снова имеем в виду процедуру (6) с заменами

$$u \to v = \frac{J^{(0)}(\omega)}{K}\ ,\ \ \Omega \to K = \frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega'}^{\omega''} J^{(0)}(\omega)\,d\omega\,,\quad s \to p\,.$$

Совершенно аналогично при расчете восходящего излучения учитывается излучение Земли; оно обычно полагается изотропным по θ и имеющим некоторый спектральный состав $J_0(\omega)$. К (10) прибавляется

$$I_{0\nu} = N\ \mathrm{e}^{-\sec\theta\int_0^{z} q\,(g_\nu;z')\,dz'} \tag{12}$$

и в процедуре (6)

$$u \to n(\omega) = \frac{J_0(\omega)}{N}\ ,\quad N = \frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega'}^{\omega''} J_0(\omega)\ d\omega\,,\ \ s \to q\,.$$

Еще одно слагаемое в восходящем излучении обязано своим происхождением отражению нисходящего излучения от подстилающей поверхности. Как хорошо известно, вопрос этот обсуждается совсем иначе, нежели аналогичный в электродинамике: макроскопическая подстилающая поверхность с ее явной «шероховатостью» и иными радикально «перерабатывающими» падающее на нее излучение факторами отражает как ламбертовская и реагирует на полный (интегральный по ω) поток излучения (т.е. на величину типа (1)). Отсюда появляется определение спектрального альбедо

$$A(\omega) = \frac{\text{отраженный спектральный поток}}{\text{полный пришедший поток } F^{\downarrow}(z=0)}\,.$$

Поэтому спектральная интенсивность отраженного излучения есть

$$\frac{A(\omega)}{\pi}\ F^{\downarrow}(z=0) = \tilde{J}_0(\omega)$$

(π – множитель, соответствующей определению нормировки A). Остальное остается как в (12), и итогом будет

$$I'_{0\nu} = N'\,\mathrm{e}^{-\sec\theta\int_0^{z} q'(g_\nu;z')\,dz'} \tag{13}$$

с заменами

$$n \to n'(\omega) = \frac{A(\omega)}{\dfrac{1}{\Delta\omega}\displaystyle\int_{\omega'}^{\omega''} A(\omega)\,d\omega}\ ,$$

$$N \to N' = \frac{1}{\Delta\omega}\int_{\omega'}^{\omega''}\tilde{J}_0(\omega)\,d\omega\ ,\ q \to q'\,.$$

Итак, интенсивность нисходящего излучения есть

$$I^{\downarrow} = \sum_{\nu=1} b_\nu\,[(9) + (11)]\ ,\ \ \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \tag{14}$$

и интенсивность восходящего излучения –

$$I^{\uparrow} = \sum_{\nu=1} b_\nu\,[(10)+(12)+13)]\,. \qquad (15)$$

Поскольку аргументами в (14) и (15) являются только z и θ, то, по определению (7),

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_3}{\partial z} \equiv \frac{\partial F}{\partial z}\,,$$

$$F = 2\pi\left\{\int_0^{\pi/2}\{(15)\}\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\{(14)\}\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta\right\} \equiv$$

$$\equiv F^{\uparrow} - F^{\downarrow}\,. \qquad (16)$$

Знак минус возникает из-за того, что третья ось системы координат (F_3 – соответствующая компонента $\mathbf{F}$) направлена по вертикали. Появляющиеся в (16) интегралы по θ элементарно сводятся к интегральной показательной функции

$$E_m(y) = \int_1^{\infty}\frac{e^{-y\xi}\,d\xi}{\xi^m}\,,\quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

и значение того, что сохраняется простая экспоненциальная структура решений (8), здесь несомненно.

Следующий этап связан с переходом к послойной модели атмосферы: она полагается разделенной на слои (k – номер слоя; z_{k-1} и z_k – его границы, $l_k = z_k - z_{k-1}$ – толщина; $k = 1, 2, \ldots$, начиная от Земли) и термодинамические характеристики (температура, давление, концентрации поглощающих газов) объявляются постоянными в пределах слоя. (Они снабжаются индексом k, например Θ_k, ρ_k в (7)). Назначение этой акции – переход от уравнения (7) с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно Θ_k.

Такая модель предполагает возможным пренебречь микроструктурой слоя (последняя может оказаться существенной, например, при учете конвекции), и формально (7) можно усреднять операцией $(1/l_k)\int_{z_{k-1}}^{z_k} dz$ – слева моментально появится $c_p\,\rho_k\,\partial\Theta_k/\partial t$. Справа возможно прямое интегрирование (16):

$$\frac{1}{l_k}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left(-\frac{\partial F}{\partial z}\right)dz = \frac{1}{l_k}\,[F(z_{k-1}) - F(z_k)]\,, \qquad (17)$$

ведь F уже полагается зависящим именно от средних, макроскопических характеристик слоя, и (7) действительно превратится в систему уравнений относительно их. Соотношение (17) сводит вопрос к вычислению потоков на определенном уровне – границе слоя.

Алгоритм вычисления $F(z_k)$ несложен, и его проиллюстрируем на примере восходящего диффузного потока: в (16) подставляется (8) последовательно для $z = z_1, z_2, \ldots$. В последующих формулах Ω_k, $s_k(g_k)$ есть Ω в слое k; $\tau_k^{(\nu)} = s_k(g_\nu)l_k$.

Все ясно при $z \to z_1$:

$$I_\nu^{\uparrow}(z_1) = \sec\theta\int_{z_0}^{z_1} dz'\;\Omega(z')\,s(g_\nu;z')\;e^{-\sec\theta\int_{z'}^{z} s\,(g_\nu;z'')\,dz''} =$$

$$= \Omega_1\,s_1(g_\nu)\int_{z_0}^{z_1} dz'\;e^{-s_1(g_\nu)\sec\theta\,(z_1 - z')}.$$

Если $z \to z_2$, то $\int_{z_0}^{z_2} dz' = \int_{z_0}^{z_1} dz' + \int_{z_1}^{z_2} dz'$ и для каждого слагаемого подставляются свои Ω_k и s_k:

$$I_\nu^{\uparrow}(z_2) = \Omega_1\,s_1\sec\theta\int_{z_0}^{z_1} dz'\,e^{-\sec\theta\,\left\{s_1(z_1 - z') + s_2\,l_2\right\}} +$$

$$+\,\Omega_2\,s_2\sec\theta\int_{z_1}^{z_2} dz'\;e^{-s_2\sec\theta\,(z_2 - z')}.$$

По той же процедуре

$$I_\nu^{\uparrow}(z_3) = \Omega_1\,s_1\sec\theta\int_{z_0}^{z_1} dz'\,e^{-\sec\theta\,\{s_1(z_1 - z') + s_2\,l_2 + s_3\,l_3\}} +$$

$$+\,\Omega_2\,s_2\sec\theta\int_{z_1}^{z_2} dz'\;e^{-\sec\theta\,\{s_2(z_2 - z') + s_3 l_3\}} +$$

$$+\,\Omega_3\,s_3\sec\theta\int_{z_2}^{z_3} dz'\;e^{-\sec\theta\,s_3(z_3 - z')}$$

и так далее. Последующие интегрирования по z' и θ исполняются сразу же, и для восходящего диффузного потока получится выражение

$$F_\nu^{\uparrow}(z_1) = \pi\,\Omega_1 - 2\pi\,E_3(\tau_1^{(\nu)}),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
F_\nu^{\uparrow}(z_k) = {} & \pi\,\Omega_k - 2\pi(\Omega_k - \Omega_{k-1})E_3(\tau_k^{(\nu)}) - \\
& - 2\pi(\Omega_{k-1} - \Omega_{k-2})E_3(\tau_k^{(\nu)} + \tau_{k-1}^{(\nu)}) - \\
& - 2\pi(\Omega_{k-2} - \Omega_{k-3})E_3(\tau_k^{(\nu)} + \tau_{k-1}^{(\nu)} + \tau_{k-2}^{(\nu)}) - \ldots - \\
& - 2\pi(\Omega_2 - \Omega_1)E_3(\tau_k^{(\nu)} + \tau_{k-1}^{(\nu)} + \ldots + \tau_2^{(\nu)}) - \\
& - 2\pi\;\Omega_1 E_3(\tau_k^{(\nu)} + \tau_{k-1}^{(\nu)} + \ldots + \tau_1^{(\nu)}).
\end{aligned} \qquad (18)$$

Совершенно аналогично вычисляется и нисходящий диффузный поток (индексом j отмечен верхний слой; знак минус уже учтен):

$$F_\nu^{\downarrow}(z_{j-1}) = -\pi\,\Omega_j + 2\pi\,E_3(\tau_j^{(\nu)}),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$F_\nu^{\downarrow}(z_{j-k}) = -\pi\,\Omega_{j-k+1} + 2\pi(\Omega_{j-k+1} - \Omega_{j-k+2})E_3(\tau_{j-k+1}^{(\nu)}) +$$

$$+\,2\pi(\Omega_{j-k+2}-\Omega_{j-k+3})E_3(\tau^{(\nu)}_{j-k+1}+\tau^{(\nu)}_{j-k+2})+\ \ldots +$$

$$+\,2\pi(\Omega_{j-1}-\Omega_j)E_3(\tau^{(\nu)}_{j-k+1}+\tau^{(\nu)}_{j-k+2}+\ldots+\tau^{(\nu)}_{j-1})+$$

$$+\,2\pi\,\Omega_j E_3(\tau^{(\nu)}_{j-k+1}+\tau^{(\nu)}_{j-k+2}+\ \ldots+\tau^{(\nu)}_{j}).$$

Все просто для потоков солнечного излучения: постоянная K из (11) умножается на $\cos\theta_0$ (θ_0 – направление солнечных лучей) и, для уровня z_{j-k}, на

$$\exp\,(-\tilde{\tau}^{(\nu)}_{j-k+1}-\tilde{\tau}^{(\nu)}_{j-k+2}-\ldots-\tilde{\tau}^{(\nu)}_{j})$$

с $\tilde{\tau}^{(\nu)}_k=l_k\,p_k(g_\nu)$. Потоки от подстилающей поверхности есть постоянные N и N' из (12) и (13), умноженные на $2\pi E_3$, аргументы которой для уровня z_k есть $e_1q_1(g_\nu)+e_2q_2(g_\nu)+\ldots+e_kq_k(g_\nu)$ или $e_1q_1'(g_\nu)+e_2q_2'(g_\nu)+\ldots+e_kq_k'(g_\nu)$.

3. Последующие приближения

Для многих расчетных методик (см., например, [6]) характерно стремление написать потоки через функцию пропускания

$$Q=\frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\omega'}^{\omega''}e^{-x\varkappa(\omega)}\,d\omega$$

для пути луча длиною x в однородной среде. Неоднородность среды учитывается затем через «средние» давление и температуру [3, 7], а диффузность излучения – интегрирование (16) – увеличением оптической плотности $\tau=x\varkappa$ на должным образом подобранный множитель [3]. Прагматическая значимость подобной акции очевидна – ведь тогда можно ориентироваться на экспериментальную (или иную) информацию непосредственно для функции поглощения $1-Q$.

Применение рядов экспонент для величины Q дает ряд [8]:

$$Q=\sum_\nu b_\nu\,e^{-x\,s(g_\nu)}\,, \qquad (19)$$

где $s(g)$ – функция, обратная

$$g(s)=\frac{1}{\Delta\omega}\int\limits_{\varkappa(\omega)\le s,\ \omega\in[\omega',\,\omega'']}d\omega\,.$$

Сопоставление последнего соотношения с (16) гласит, что условием перехода к обсуждаемому варианту является $u\cong 1$; то же самое можно сказать по поводу v, n, n', выписанных после (11), (12), (13).

Еще более простая схема (см., например, [9]) возникает, когда для потока (например, восходящего) выписывается эвристическое, по существу, выражение

$$F(z_k)-F(z_{k-1})=-(1-Q)F(z_{k-1})+D_k(1-Q) \qquad (20)$$

с совершенно ясным смыслом слагаемых. Через D_k обозначен полный поток излучения абсолютно черного тела для Θ_k. В наших обозначениях $D_k=\pi\Theta_k$, если $\int d\omega$ полагается исполненным по всему спектру.

Конечно, (20) можно трактовать просто как определение некоей величины

$$1-Q=\frac{F(z_k)-F(z_{k-1})}{\pi\Omega_k-F(z_{k-1})}\,, \qquad (21)$$

и надо только увидеть, когда Q есть действительно функция пропускания рассматриваемого слоя. Этот вопрос рассмотрим с позиций формул (18), полагая, конечно же, что в (21) фигурирует F^{-}_{ν}. Определенности ради положим $k=4$; впрочем, вариант этот для пояснения приближения полностью репрезентативен.

Итак, при наших соглашениях числителем и знаменателем (21) станут

$$\pi(\Omega_4-\Omega_3)[1-2E_3(\tau_4^{(\nu)})]+$$
$$+\,2\pi(\Omega_3-\Omega_2)[E_3(\tau_3^{(\nu)})-E_3(\tau_3^{(\nu)}+\tau_4^{(\nu)})]+$$
$$+\,2\pi(\Omega_2-\Omega_1)[E_3(\tau_2^{(\nu)}+\tau_3^{(\nu)})-E_3(\tau_2^{(\nu)}+\tau_3^{(\nu)}+\tau_4^{(\nu)})]+$$
$$+\,2\pi\Omega_1[E_3(\tau_1^{(\nu)}+\tau_2^{(\nu)}+\tau_3^{(\nu)})-E_3(\tau_1^{(\nu)}+\tau_2^{(\nu)}+\tau_3^{(\nu)}+\tau_4^{(\nu)})]\,;$$

$$\pi(\Omega_4-\Omega_3)+2\pi(\Omega_3-\Omega_2)E_3(\tau_3^{(\nu)})+$$
$$+2\pi(\Omega_2-\Omega_1)E_3(\tau_2^{(\nu)}+\tau_3^{(\nu)})+2\pi\Omega_1\,E_3(\tau_1^{(\nu)}+\tau_2^{(\nu)}+\tau_3^{(\nu)}).$$

Далее, как следует из определения E_m,

$$E_3(a)-E_3(a+b)=E_3(a)\left(1-\frac{E_3(a+b)}{E_3(a)}\right)=$$
$$=E_3(a)\left\{\frac{E_2(a)}{E_3(a)}b-\frac{E_1(a)}{E_3(a)}\,\frac{1}{2!}\,b^2+\frac{E_0(a)}{E_3(a)}\,\frac{1}{3!}b^3+\ldots\right\},$$

когда $b\ll a$. Если еще считать, что $a\gg 1$, то $E_{m'}/E_m\to 1$ и при выдвинутых предположениях фигурную скобку станет возможным заменить на $[1-\exp(-b)]$. Это же выражение будет асимптотическим для $[1-2E_3(b)]$ при том же $b\gg 1$.

В нашем случае роль b играет $\tau_4^{(\nu)}$ – оптическая плотность выбранного слоя. И надо полагать, что она мала в сравнении с суммой оптических плотностей «предыдущих» слоев, которая «достаточно большая»; сама же $\tau_k^{(\nu)}$ должна быть «не слишком большой». При таких условиях отношение числителя и знаменателя станет $[1-\exp(-\tau_k^{(\nu)})]$, что, в силу (19), по существу совпадает с Q в (20).

Выражениям типа (18) порой выгоднее придать форму, где фигурируют производные от $\Omega(z)$ – они обращаются в нуль для изотермической атмосферы, что, несомненно, упрощает анализ определенных физических ситуаций, скажем, близких к изотермическим. Здесь предварительно надо исполнить интегрирование в (16) после подстановки соответствующих подынтегральных функций, преобразовать $\int dz'$ интегрированием по частям и, во время перехода к «послойной» атмосфере, воспользоваться известными свойствами E_m. Тогда, например, вместо (18) появится

$$I_\nu^{\uparrow}(z_k) = \pi\Omega(z_k) -$$

$$- 2\pi \frac{\Omega_1'}{s_1(g_\nu)}\left[E_4(\tau_k^{(\nu)}+\ldots+\tau_2^{(\nu)}) - E_4(\tau_k^{(\nu)} + \tau_{k-1}^{(\nu)}+\ldots+\tau_1^{(\nu)})\right] +$$

$$+ \frac{\Omega_2'}{s_2(g_\nu)}\left[E_4(\tau_k^{(\nu)} + \ldots + \tau_3^{(\nu)}) - E_4(\tau_k^{(\nu)} + \tau_{k-1}^{(\nu)} + \ldots+\tau_2^{(\nu)})\right] +$$

$$+ \ldots + \frac{\Omega_{k-1}'}{s_{k-1}(g_\nu)}\left[E_4(\tau_k^{(\nu)}) - E_4(\tau_k^{(\nu)} + \tau_{k-1}^{(\nu)})\right] +$$

$$+ \frac{\Omega_k'}{s_k(g_\nu)}\left[E_4(0) - E_4(\tau_k^{(\nu)})\right].$$

Здесь Ω_k' – значение $d\Omega(z)/dz$ для слоя k.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 97-05-65985.

1. *Кондратьев К.Я.* Лучистый теплообмен в атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1956. 420 с.
2. *Перенос* радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. Стандартные методы расчета / Под ред. Ж. Ленобль. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 264 с.
3. *Гуди Р.М.* Атмосферная радиация. I. Основы теории. М.: Мир, 1966. 522 с.
4. *Несмелова Л.И., Родимова О.Б., Творогов С.Д.* Контур спектральной линии и межмолекулярное взаимодействие. Новосибирск: Наука, 1986. 216 с.
5. *Творогов С.Д.* // Оптика атмосферы и океана. 1999. Т. 12. № 9. С. 763–766.
6. *Stephens G.L.* // Monthly Weather Review. 1984. V. 112. P. 826–867.
7. *Зуев В.Е.* Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М.: Советское радио, 1970. 496 с.
8. *Творогов С.Д.* // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 4–5. С. 403–412.
9. *Гинзбург А.С., Фейгельсон Е.М.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1971. Т. 7. № 4. С. 377–384.

Nesmelova L.I., Rodimova O.B., Tvorogov S.D. **On Application of Series of Exponents when Calculating Radiation Fluxes in the Molecular Atmosphere.**

Series of exponents as a procedure of integration of the radiation intensity over spectrum is most efficient in problems of radiation processes in the atmosphere if it is applied for derivation of equations for values averaged over spectrum.