«Оптика атмосферы и океана», **18**, № 9 (2005)

УДК 535:621.37

С.Д. Творогов, В.О. Троицкий

Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной, однородной среде

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 06.06.2005 г.

Рассмотрена задача о распространении монохроматического излучения в одноосной и однородной среде. Продемонстрированы два варианта исследования указанной задачи: скалярное приближение (изменение состояния поляризации распространяющегося излучения не учитывается) и строгий подход, сводящийся к отысканию точного решения векторного волнового уравнения. В основе первого варианта лежат предложенные в работе общие определения обыкновенного и необыкновенного излучения, а для решения волнового уравнения использован метод Кирхгофа–Гельмгольца, обобщенный на векторные задачи. Для обоих вариантов рассмотрено упрощение решений, связанное с переходом к параболическому приближению. Показано, что в этом случае результаты использования скалярного и векторного вариантов будут, как и предполагалось, совпадать тем точнее, чем меньше расходимость лазерного пучка.

Введение

Обозначенная в названии работы проблема сводится [1, 2] к отысканию решений так называемого волнового уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})-(k^0)^2\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}(\mathbf{r})=0, \qquad (1)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ – тензор второго ранга диэлектрической проницаемости среды (магнитную проницаемость считаем равной единице); $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – вектор электрической напряженности монохроматического поля (зависимость от времени – $\exp(-i\omega t)$ – не указываем); $k^0 = \omega/c$.

Наибольший практический интерес задачи такого сорта представляют, по-видимому, для нелинейной оптики, в той ее части, которая имеет дело с теорией генерации гармоник лазерного излучения. Действительно, подавляющее большинство используемых на практике нелинейных кристаллов являются одноосными, а максимальные кпд нелинейного преобразования достигаются в тех случаях, когда лазерное излучение оказывается достаточно монохроматическим. При этом решение (1) представляет собой первый и совершенно необходимый этап собственно нелинейной задачи, позволяющий определить нулевое (линейное) приближение для поля на основной частоте. Во многих случаях (это зависит от конкретного способа решения нелинейной задачи) последнее используется в качестве одного из граничных условий для системы нелинейных уравнений. В этой связи отметим, что основная цель настоящей работы как раз и состоит в отыскании решений линейной задачи, удобных для использования в теории генерации гармоник.

Типичный (по крайней мере, для нелинейной оптики) метод решения уравнения (1) базируется на так называемом приближении медленно меняющихся амплитуд [3]. В рамках этого приближения решение (1) для пучка, распространяющегося вдоль оси Z, ищут в виде [4]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\left[\mathbf{e}\,A(\mu_1 x,\mu_1 y,\mu_2 z)+\mu_2\mathbf{U}(\mathbf{r})\right]e^{ikz}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{e}$ – постоянный единичный вектор поляризации либо обыкновенной ($k = k^0 n_o$), либо необыкновенной ($k = k^0 n^e$) плоской волны, направленной вдоль Z, а μ_1 и μ_2 – малые параметры, связанные с расходимостью α лазерного пучка следующим образом:

$$\mu_1\approx\alpha,\ \ \mu_2\approx\alpha^2. \qquad (3)$$

Подставляя (2) в (1) и ограничиваясь слагаемыми порядка μ_2, получаем так называемые укороченные уравнения для комплексных амплитуд A. В частности, для необыкновенной волны имеем [4]:

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\rho\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{1}{2ik^e}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)=0, \qquad (4)$$

где ρ – угол анизотропии, который для обыкновенной волны полагается равным нулю.

Прагматическая ценность такого подхода не вызывает сомнений. Задачу, базирующуюся на векторном уравнении (1), удается свести к скалярному уравнению (4), решение которого во всех случаях получить гораздо проще. С другой стороны, возникает ряд моментов общего характера, которые представляется целесообразным обсудить более детально.

Дело в том, что конечным результатом рассмотренного метода является функция

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{e}A(\mu_1 x,\mu_1 y,\mu_2 z)\,e^{ikz}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{e}$ и k определены в (2); A является решением (4).

Другими словами, функция $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, введенная в (2) (в том числе и для того, чтобы учесть возмущение состояния поляризации, обусловленное, например, дифракцией), в (5) не присутствует вообще. Наиболее подробные (хотя, на наш взгляд, все равно недостаточные) комментарии по этому поводу приводятся в [3]. Физическое содержание представления (5) для слабо расходящегося лазерного пучка интуитивно вполне понятно. Чем меньше расходимость излучения, тем меньше векторная функция поляризации строгого решения будет отличаться от некого постоянного значения, определяющего поляризацию соответствующей плоской волны. Однако формальная сторона дела при этом сильно страдает, что, на наш взгляд, совершенно недопустимо, когда и если речь идет о строгой теории. Суть проблемы сводится к следующему.

Легко увидеть, что любое строгое решение уравнения (1) обязано удовлетворять условию на дивергенцию

$$\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}) = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad (6а)$$

где $\mathbf{H}$ – вектор магнитной напряженности поля.

В частном случае – изотропная среда – вместо (6а) имеем

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \qquad (6б)$$

Соответственно, и это представляется вполне очевидным, любое приближенное решение (1) должно удовлетворять (6) в пределах используемых ограничений общности. Прямой подстановкой убеждаемся, что (5) этому требованию не отвечает вообще. Одним из проявлений такого несоответствия является и то, что, подставляя (5) в (1), мы не сможем, вообще говоря, получить уравнение (4). В частном случае, если, как, например, в [3], речь идет о плоской (недифрагирующей) волне, никаких проблем с выполнением (6) возникать не будет.

В связи со сказанным выражение (5) будет, по-видимому, более правильным назвать неким модельным представлением строгого решения линейной задачи. Термин «модельное представление» в данном случае должен отражать то обстоятельство, что выражение (5) формально не является приближенным решением (1) – условие (6) не выполняется даже приближенно (частные случае не рассматриваем).

Разумеется, ничто не запрещает использовать, вообще говоря, какие угодно модели, лишь бы это не привело к большим ошибкам в конечном результате, и настоящий случай не является исключением (хотя проверить корректность представления (5) для задачи о генерации гармоник пока не представляется возможным в связи с отсутствием альтернативных решений).

Кроме того, возникает и еще один, на наш взгляд, достаточно закономерный вопрос. Зачем вообще в таком случае [имеется в виду конечный результат вида (5)] строить теорию на уравнении (1)? По всей видимости, это только усложняет задачу, поскольку автоматически возникает необходимость обосновывать вид функции $\mathbf{U}$ в (2), а затем объяснять, в силу каких причин эта функция исчезает при подстановке (2) в (1). Существует, на наш взгляд, более простой вариант (хотя, разумеется, это дело вкуса), который мы продемонстрируем на примере решения (1) для поля в изотропной среде.

Если среда изотропная, то, следовательно, выполняется (6б) и (1) обычным образом превращается в так называемое векторное уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \qquad (7)$$

Если теперь (5) подставить в (7), умножить скалярно обе части на постоянный вектор $\mathbf{e}$ и сохранить слагаемые порядка μ_2 из (3), то мы как раз и получим требуемое укороченное уравнение вида (4). Более того, по отношению к (7) выражение (5) оказывается уже не модельным, а приближенным решением, которое будет тем точнее совпадать со строгим решением (7), чем менее расходящимся будет лазерный пучок. Разумеется, что суть дела от этого никоим образом не меняется. Просто теперь мы заранее договариваемся, что изменение состояния поляризации нас по каким-то причинам интересовать не будет, и на этом основании решение задачи начинаем сразу с уравнения (7). При этом все дальнейшие действия – выбор решения в форме (5), переход к скалярному уравнению Гельмгольца и его последующая замена укороченным уравнением (4), уже никаких противоречий не содержат. В этом смысле такой подход (будем называть его для определенности скалярным приближением) выглядит даже более предпочтительным.

Грубые, предварительные оценки показывают, что вектор поляризации строгого решения (1) (хоть для изотропной, хоть для одноосной среды) в самом общем случае может быть записан в виде

$$\mathbf{e} = \left\{ e_x\, \mathrm{e}^{i\varphi_x}, e_y\, \mathrm{e}^{i\varphi_y}, e_z\, \mathrm{e}^{i\varphi_z} \right\}, \qquad (8)$$

где все e_i и φ_i являются функциями координат. В связи с этим возникает, на наш взгляд, вполне естественный вопрос. Будет ли эффективность нелинейного преобразования зависеть от того, насколько сильно (8) отличается от вектора поляризации плоской волны, используемого в (5)? Из приведенных выше рассуждений следует, что ответить на него в рамках разработанной к настоящему времени теории генерации гармоник не представляется возможным в силу того, что указанная теория построена на скалярном приближении. Поскольку авторам сформулированный вопрос не кажется тривиальным и этой проблемой они собираются заняться, то отыскание подходящих представлений для векторного поля в линейной одноосной среде превращается в совершенно необходимое условие.

Работа построена следующим образом. Сначала в разд. 1 рассматривается, на наш взгляд достаточно строго, переход к скалярному приближению для поля в одноосной среде. В разд. 2 продемонстрирован метод, позволяющий получить точное решение уравнения (1). К сожалению, использовать этот точный результат для нашей конечной цели не удается — решения нелинейных уравнений в общем случае становятся слишком сложными (по этой же причине мало подходящими оказываются и результаты исследований [5, 6]). В силу сказанного, основное внимание в разд. 2 уделяется проблеме отыскания приближенного решения уравнения (1) для задач о распространении слабо расходящихся лазерных пучков. Иными словами, речь идет о параболическом приближении, но уже для принципиально векторной задачи.

1. Скалярное приближение для поля в одноосной среде

Направим ось X системы координат вдоль оптической оси среды. Положение осей Y и Z при этом может быть произвольным. В такой системе координат, которую будем называть главной (или ε-координаты), для ненулевых компонент тензора $\tilde{\varepsilon}$ имеем [7]:

$$\varepsilon_{11} = n_e^2 \neq \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = n_o^2, \qquad (9)$$

где n_o и n_e — главные показатели преломления одноосной среды.

В рамках настоящей статьи мы будем иметь дело с лазерными пучками, продольная ось которых (направление распространения) составляет с оптической осью среды произвольный угол θ и располагается в плоскости XZ главной системы координат. Последнее замечание не ограничивает общности рассматриваемой задачи, поскольку тензор диэлектрической проницаемости инвариантен относительно поворотов системы координат вокруг оптической оси (ось X). В плане использования параболического приближения такие поля удобнее рассматривать в системе координат (x', y', z'), у которой ось Z' совпадает с продольной осью пучка, а ось Y' с осью Y системы ε-координат, в результате чего плоскость $X'Y'$ оказывается поперечным сечением пучка. Эти новые координаты будем называть E-координатами, подчеркивая тем самым, что они связаны с лазерным пучком, а не с симметрией кристалла. Переход к новой системе обеспечивается поворотом прежней на угол $\pi/2 - \theta$ вокруг общей оси Y против часовой стрелки. Одни координаты выражаются через другие следующим образом:

$$x = \sin\theta\, x' + \cos\theta\, z',\ y = y',\ z = -\cos\theta\, x' + \sin\theta\, z'. \qquad (10)$$

В ε-координатах векторное уравнение (1) эквивалентно системе трех скалярных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) - k_e^2 E_x = 0, \qquad (11а)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - k_o^2 E_y = 0, \qquad (11б)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - k_o^2 E_z = 0, \qquad (11в)$$

где $k_o = k^0 n_o$, $k_e = k^0 n_e$.

Для условия на дивергенцию (6а) в этой же системе находим

$$\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}) = n_e^2 \frac{\partial E_x}{\partial x} + n_o^2\left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right). \qquad (12)$$

Теперь нам необходимо дать определения обыкновенного (o-волна) и необыкновенного (e-волна) электромагнитного излучения.

Обычно, когда говорят об o- или e-волнах, подразумевают определение, сформулированное в рамках приближения плоских волн (см., например, [1, 7]). Напомним его. Пусть плоская волна распространяется в одноосной среде в направлении **s**. Вектор **s** и главная оптическая ось среды образуют плоскость, которую называют главной оптической плоскостью (ГОП). Волну, вектор поляризации которой перпендикулярен к ГОП, называют обыкновенной плоской волной. Необыкновенной плоской волной является та, вектор поляризации которой лежит в ГОП.

Имея в виду сказанное, сделаем интересующее нас обобщение. Назовем o-волной поле, вектор электрической напряженности которого не имеет проекции на главную оптическую ось среды. Если решение проводится в ε-координатах, то это означает, что o-волной будет поле **E**, у которого отсутствует компонента E_x, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = \{0, E_{oy}(\mathbf{r}), E_{oz}(\mathbf{r})\}. \qquad (13)$$

Общее определение необыкновенной волны сформулируем следующим образом. Назовем e-волной поле, вектор магнитной напряженности которого не имеет проекции на главную оптическую ось среды. Если решение проводится в главной системе координат, то это означает, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = \{E_{ex}(\mathbf{r}), E_{ey}(\mathbf{r}), E_{ez}(\mathbf{r})\}, \qquad (14а)$$

где

$$\frac{1}{ik^0}\left(\frac{\partial E_{ez}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ey}}{\partial z}\right) = H_{ex} = 0. \qquad (14б)$$

Подставляем (13) в (12) и после дифференцирования получаем два соотношения:

$$-\frac{\partial^2 E_{oy}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 E_{oz}}{\partial y \partial z}, \quad -\frac{\partial^2 E_{oz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_{oy}}{\partial y \partial z}. \qquad (15)$$

Теперь подставляем (13) в (11), используем (15) и убеждаемся, что и само поле (13), и любая его компонента (E_{oy} или E_{oz}) обязаны удовлетворять уравнению Гельмгольца (векторному или скалярному)

$$\hat{L}_o \mathbf{E}_o = \hat{L}_o E_{oi} = 0, \qquad (16)$$

где $\hat{L}_o = \nabla^2 + k_o^2$, $i = y, z$.

Теперь нечто подобное необходимо проделать для e-волны. Прежде всего, замечаем, что из (14б) следуют два равенства:

$$\frac{\partial^2 E_{ez}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 E_{ey}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 E_{ey}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 E_{ez}}{\partial y^2}, \tag{17}$$

а после дифференцирования (12) получаем еще три:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 E_{ex}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 E_{ey}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_{ez}}{\partial x \partial z},$$

$$-\frac{\partial^2 E_{ex}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial^2 E_{ey}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{ez}}{\partial y \partial z}\right),$$

$$-\frac{\partial^2 E_{ex}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial^2 E_{ey}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 E_{ez}}{\partial z^2}\right), \tag{18}$$

где $\beta = n_e / n_o$.

Теперь, подставляя (17) и (18) в (11), убеждаемся, что и само поле (14), и любая из его компонент обязаны удовлетворять уравнению

$$\hat{L}_e \mathbf{E}_e = \hat{L}_e E_{ei} = 0, \tag{19}$$

где

$$\hat{L}_e = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_e^2, \; i = x, y, z.$$

Уравнение (19) будем называть уравнением Гельмгольца для необыкновенной волны.

Рассмотрим два уравнения для функций Грина:

$$\hat{L}_o g_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{20а}$$

$$\hat{L}_e g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{20б}$$

Решение (20а) хорошо известно [8] и имеет вид

$$g_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathrm{e}^{ik_o R} / R,$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{21}$$

Уравнение (20б) решаем аналогичным образом и в результате получаем

$$g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathrm{e}^{ik_e R'} / R'\beta,$$

$$R' = \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{\beta^2} + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{22}$$

С помощью этих функций Грина решения уравнений (16) и (19) записываются следующим образом [2, 9]:

$$\mathbf{E}_{o,e}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(g_{o,e}\frac{\partial \mathbf{E}_{o,e}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{E}_{o,e}\frac{\partial g_{o,e}}{\partial \mathbf{n}}\right) dS, \tag{23}$$

где индекс «*o*» относится к обыкновенной волне (уравнение (16)), а индекс «*e*» — к необыкновенной волне (уравнение (19)); S — произвольная замкнутая поверхность; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S. Используя (20), легко убедиться в том, что (23) действительно являются точными решениями уравнений (16) и (19).

На этом, вообще говоря, переход к скалярному приближению можно считать завершенным. Действительно, если мы договариваемся о том, что лазерный пучок по условиям задачи может быть представлен в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}U(\mathbf{r}) = \mathbf{e}A(\mu_1 x, \mu_1 y, \mu_2 z)\,\mathrm{e}^{ik_{o,e}z}, \tag{24}$$

то, подставляя (24) в (23), мы немедленно находим решение соответствующих уравнений для скалярных амплитуд $U_{o,e}(\mathbf{r})$ векторных полей $\mathbf{E}_{o,e}(\mathbf{r})$. Однако нам еще остается найти решения (и соответствующие укороченные уравнения) для медленно меняющихся амплитуд (см. (24)) *o*- и *e*-волн, распространяющихся под произвольным углом θ к оптической оси.

Для этой цели в качестве поверхности S из (23) выбираем плоскость $X'Y'$ системы E-координат (ось пучка при этом будет совпадать с осью Z') и замыкаем ее полусферой бесконечного радиуса в полупространстве $z' > 0$. Используем (10) и записываем решение (23) в системе E-координат. После несложных, но достаточно громоздких вычислений (мы их здесь приводить не будем) вместо (23) получаем (штрихи при записи координат не указываем)

$$U_{o,e}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(U_{o,e}\frac{\partial g_{o,e}}{\partial z} - g_{o,e}\frac{\partial U_{o,e}}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy, \tag{25}$$

где интеграл по полусфере положили равным нулю [2, 9].

Функции Грина $g_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ и $g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в (25) — это (21) и (22), записанные в системе E-координат. При этом вид (21) остается прежним, а для (22) получаем

$$g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sqrt{a}\exp\left(ik^e R'\right) / \beta R', \tag{26}$$

где

$$R' = \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2}(x - x_0 + \rho z_0 - \rho z)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$\rho \approx \mathrm{tg}\rho = \sin\theta\cos\theta\left(\beta^2 - 1\right) / a$$

— угол анизотропии.

При повороте системы координат уравнение (16) не изменяется, а вместо (19) находим

$$\hat{L}_e U_e = 0, \tag{27}$$

где

$$\hat{L}_e = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\rho\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{b}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(k^e\right)^2,$$

$$b = \cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta.$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что функция Грина (26) оказывается точным решением уравнения

$$\hat{L}_e g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{28}$$

На основании этого заключаем, что интеграл (25) для e-волны является точным решением уравнения (27). Очевидно, что при $\theta = \pi/2$ (27) совпадает с (19). Если в (27) положить $\rho = 0$ – среда изотропная, то получаем уже уравнение (16).

Поскольку в (25) интегрирование проводится по плоскости $z = 0$, то вместо (25) можно использовать более простую форму [2, 9]:

$$U_{o,e}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{o,e}(x,y)\left(\frac{\partial g_{o,e}}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy. \qquad (29)$$

В [9] доказывается, что для o-волны (29) является единственным точным решением уравнения (16), которое при $z_0 \to 0$ совпадает с граничным условием $U_0(x, y)$, определенным (заданным) на этой плоскости. Теорему единственности решения (29) для e-волны можно, наверное, доказать по аналогии, но мы этот вопрос не рассматривали.

Подставляем скалярную амплитуду U из (24) в (16) и (27), собираем слагаемые, пропорциональные μ_2, и приходим к уравнениям для комплексных медленно меняющихся амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн:

$$\frac{\partial A_o}{\partial z} + \frac{1}{2ik_o}\left(\frac{\partial^2 A_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_o}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad (30)$$

$$\frac{\partial A_e}{\partial z} + \rho\frac{\partial A_e}{\partial x} + \frac{1}{2ik^e}\left(\frac{b}{a}\frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 A_e}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (31)$$

Уравнение (30) представляет собой искомое укороченное уравнение для обыкновенной волны в одноосной среде. А вот (31) нуждается еще в одной модификации.

Для того чтобы второе слагаемое в (31) имело второй порядок малости ($\sim \mu_2$), необходимо потребовать выполнения условия

$$|\rho| \sim \left|\beta^2 - 1\right| \sim \mu_1. \qquad (32)$$

Последнее означает, что рассматриваемая одноосная среда является слабо анизотропной. В плане теории генерации гармоник это ограничение не существенно, поскольку большинство используемых на практике нелинейных кристаллов таковыми и являются. Однако, если (32) имеет место, то это означает, что в (31) теперь будут слагаемые, имеющие третий порядок малости ($\sim \mu_1\mu_2$). Исключая их из уравнения, т.е. ограничиваясь решением задачи во втором приближении, вместо (31) получаем искомое укороченное уравнение (4).

Решениями уравнений (30) (для o-волны) и (4) (для e-волны) будут, очевидно, выражения (29), в которых необходимо сохранить члены, пропорциональные $\sim \mu_2$, т.е. записать решения с той же точностью, что и сами уравнения. Для этого поступаем следующим образом (все соотношения будем приводить для случая e-волны, поскольку условие $\rho = 0$ превращает их в аналогичные выражения для o-волны).

Замечаем, что для слабо расходящихся пучков выполняется

$$\frac{|x - x_0 + \rho z_0 - \rho z|}{z_0 - z} \sim \frac{|x_0|}{z_0} \sim \frac{|y - y_0|}{z_0 - z} \sim \mu_1. \qquad (33)$$

Уравнение (33) позволяет представить выражение для R' из (26) в виде степенного ряда

$$R' = z_0 - z + \frac{a^2}{b^2}\frac{(x - x_0 + \rho z_0 - \rho z)^2}{2(z_0 - z)} +$$

$$+ a\frac{(y - y_0)^2}{2(z_0 - z)} + O\left(\mu_1^4, \mu_1^6 \ldots\right) =$$

$$= z_0 - z + \frac{(x - x_0 + \rho z_0 - \rho z)^2}{2(z_0 - z)} +$$

$$+ \frac{(y - y_0)^2}{2(z_0 - z)} + O\left(\mu_1^3,\ \mu_1^4 \ldots\right), \qquad (34)$$

где $O\left(\mu_1^3, \mu_1^4 \ldots\right)$ – величины порядка $\mu_1^3,\ \mu_1^4 \ldots$, и мы учли (32).

Теперь предполагаем, что выполняется неравенство

$$k^e z_0 \gg 1 \text{ или } \left(ik^e - \frac{1}{R'}\right) \approx ik^e, \qquad (35)$$

и вычисляем производную из (29), сохраняя слагаемые $\sim \mu_2$ для R' в показателе экспоненты и ограничиваясь нулевым приближением для R', стоящих вне экспоненты. В результате вместо (29) находим

$$U_e(\mathbf{r}_0) = A_e(\mathbf{r}_0)\, \mathrm{e}^{ik^e z_0}, \qquad (36а)$$

где

$$A_e(\mathbf{r}_0) = -\frac{ik^e}{2\pi z_0} \times$$

$$\times \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_e(x,y,0) \exp\left[ik^e \frac{(x - x_0 + \rho z_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z_0}\right] dxdy.$$

(36б)

Прямой подстановкой убеждаемся, что (36б) является точным решением (4), а при $\rho = 0$ – точным решением (30).

Отметим важное для нас соотношение

$$\left(\frac{\partial g_{o,e}}{\partial x}\right) \sim \left(\frac{\partial g_{o,e}}{\partial y}\right) \sim \mu_1\left(\frac{\partial g_{o,e}}{\partial z}\right). \qquad (37)$$

Справедливость (37), очевидно, следует непосредственно из (33). Тем не менее мы специально выделяем этот момент, поскольку в следующем разделе мы будем часто на него ссылаться.

На этом вопрос о скалярном приближении для электромагнитного поля в одноосной, однородной среде мы для себя полагаем исчерпанным, а в заключение еще раз отметим основной, на наш взгляд, результат из всех, представленных выше. Речь идет об определениях (13) и (14) обыкновенной и необыкновенной волн в одноосной среде. Именно используя эти определения и удается совершенно строго осуществить переход от волнового уравнения (1) к уравнениям Гельмгольца (16) и (19) для скалярных амплитуд *o*- и *e*-волн. Все последующие рассуждения и расчеты каких-то принципиально новых моментов не содержат, и мы приводим здесь эти результаты, главным образом, в силу того, что они потребуются нам в следующем разделе настоящей статьи.

2. Учет векторных свойств лазерного пучка в одноосной среде

Пусть тензор Грина $\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ (ранг два) является решением уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{G}-(k^0)^2\tilde{\varepsilon}\tilde{G}=4\pi\left[\tilde{\chi}\operatorname{rot}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right], \qquad (38)$$

где $\tilde{\chi}$ – единичный тензор второго ранга.

Умножим (1) справа на $\tilde{G}$, а (38) – слева на $\mathbf{E}$ и вычтем из первого второе. В результате получим

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})\tilde{G}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{G}-\left(k^0\right)^2\left(\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}\tilde{G}-\mathbf{E}\tilde{\varepsilon}\tilde{G}\right)=$$

$$=-4\pi\mathbf{E}\operatorname{rot}\left[\tilde{\chi}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right]. \qquad (39)$$

Используем следующие определения [10]:

$$\tilde{\varepsilon}\,\mathbf{E}=\mathbf{U},\ \ U_\alpha=\sum_\beta\varepsilon_{\alpha\beta}\,E_\beta;$$

$$\mathbf{E}\,\tilde{\varepsilon}=\mathbf{U},\ \ U_\alpha=\sum_\beta E_\beta\,\varepsilon_{\beta\alpha};$$

$$\tilde{\varepsilon}\tilde{G}=\tilde{U},\ \ U_{\alpha\beta}=\sum_\gamma\varepsilon_{\alpha\gamma}\,G_{\gamma\beta},$$

где переменные индексы принимают значения от одного до трех.

Замечаем, что для симметричных тензоров $\tilde{\varepsilon}$ третье слагаемое в левой части (39) обращается в нуль, интегрируем (39) по произвольному объему V, ограниченному поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$, и в результате находим

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\left\{(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})\tilde{G}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{G}\right\}dV, \qquad (40)$$

где мы учли, что для всех r_0, не лежащих на S, выполняется

$$\int\limits_V\mathbf{E}\operatorname{rot}\left[\tilde{\chi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right]dV=$$

$$=\int\limits_V\left\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\operatorname{rot}\mathbf{E}-\operatorname{rot}\left[\mathbf{E}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right]\right\}dV=$$

$$=\int\limits_V\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\operatorname{rot}\mathbf{E}\,dV-\int\limits_S\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)[\mathbf{nE}]\,dS=\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}_0).$$

По определению тензора второго ранга имеем

$$\tilde{G}=\sum_\alpha\mathbf{e}_\alpha\,\mathbf{G}_\alpha=\sum_\beta\mathbf{G}_\beta^{(\mathrm{T})}\mathbf{e}_\beta,$$

$$\mathbf{G}_\alpha=\sum_\beta G_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\beta,\ \ \mathbf{G}_\beta^{(\mathrm{T})}=\sum_\alpha\mathbf{e}_\alpha\,G_{\alpha\beta},$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ – базисные векторы.

Используя это определение, для подынтегральной функции из (40) находим

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})\tilde{G}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{G}=$$

$$=\sum_\alpha\left\{(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})\,\mathbf{G}_\alpha^{(\mathrm{T})}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G}_\alpha^{(\mathrm{T})}\right\}\mathbf{e}_\alpha=$$

$$=\sum_\alpha\operatorname{div}\left[(\operatorname{rot}\mathbf{E})\mathbf{G}_\alpha^{(\mathrm{T})}+\mathbf{E}\operatorname{rot}\,\mathbf{G}_\alpha^{(\mathrm{T})}\right]\mathbf{e}_\alpha, \qquad (41)$$

где мы использовали известное векторное тождество

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}]=\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}.$$

Подставляем (41) в (40), меняем местами суммирование и интегрирование, используем теорему Гаусса–Остроградского и приходим к выражению

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_\alpha\int\limits_S\left\{\mathbf{n}\left[\operatorname{rot}\mathbf{E}\,\mathbf{G}_\alpha^{(\mathrm{T})}\right]+\mathbf{n}\left[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{G}_\alpha^{(\mathrm{T})}\right]\right\}dS\,\mathbf{e}_\alpha. \qquad (42)$$

Теперь к (42) применяем правило перестановок в смешанном произведении, снова меняем местами суммирование и интегрирование, переходим от векторов к тензорам и получаем окончательный результат

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi\,i\,k^0}\times$$

$$\times\int\limits_S\left\{[\mathbf{En}]\operatorname{rot}\tilde{G}+[\operatorname{rot}\mathbf{En}]\tilde{G}\right\}dS, \qquad (43)$$

где мы использовали уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik^0\mathbf{H}. \qquad (44)$$

Если тензорное уравнение (38) записать в системе главных координат, то можно увидеть, что для одноосных сред оно распадается на три независимые системы из трех скалярных уравнений, отдельно для каждого из столбцов тензора $\tilde{G}$. Решая эти системы уравнений, находим

$$G_{11}=0,\ \ G_{21}=\frac{\partial g_o}{\partial z},\ \ G_{31}=-\frac{\partial g_o}{\partial y},$$

$$G_{12}=-\frac{\partial g_e}{\partial z},\ G_{32}=\frac{\partial g_o}{\partial z}+\frac{\partial^3 I}{\partial x\,\partial z^2},$$

$$G_{13}=\frac{\partial g_e}{\partial y},\ \ G_{23}=-\frac{\partial g_o}{\partial x}\frac{\partial^3 I}{\partial x\,\partial y^2},\ \ G_{33}=\frac{\partial^3 I}{\partial x\,\partial y dz}, \qquad (45)$$

где $g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ и $g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ – функции Грина (21) и (22) и использовано обозначение

$$I(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{\Delta_0}{2\pi^2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{\left(k_o^2-\alpha^2\right)\left(k_e^2-\alpha^2+\Delta_0\alpha_x^2\right)}d\boldsymbol{\alpha}, \qquad (46)$$

$$\Delta_0=\left(n_o^2-n_e^2\right)/n_o^2, \quad \alpha^2=\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2.$$

Если $\Delta_0=0$, то интеграл (46) также становится равным нулю, а (43) с (45) превращаются в строгое решение уравнения (1) для поля в изотропной среде.

Непосредственно из (38) следует условие

$$\operatorname{div}\left(\tilde{\varepsilon}\tilde{G}\right)=0. \qquad (47)$$

Подставляя (45) в (47), получаем, что неизвестная нам функция (46) обязана быть точным решением уравнения

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}=\beta^2 g_e-g_o. \qquad (48)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{B}=[\mathbf{En}]=\{B_1,B_2,B_3\}, \quad \mathbf{D}=[\operatorname{rot}\mathbf{En}]=\{D_1,D_2,D_3\}. \qquad (49)$$

Используем (45) и после несложных расчетов для (43) находим

$$H_x(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi i k^0}\int\limits_S dS\left\{D_2\frac{\partial g_o}{\partial z}-D_3\frac{\partial g_o}{\partial y}-B_1\left(\frac{\partial^2 g_o}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g_o}{\partial z^2}\right)+B_2\left(\frac{\partial^2 g_o}{\partial x\partial y}\right)+B_3\left(\frac{\partial^2 g_o}{\partial x\partial z}\right)\right\}, \qquad (50а)$$

$$H_y(\dot{\mathbf{r}}_0)=\frac{1}{4\pi i k^0}\int\limits_S dS\left\{-D_1\frac{\partial g_e}{\partial z}+D_2\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial y\partial z}+D_3\left(\frac{\partial g_o}{\partial x}+\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial z^2}\right)+B_1\frac{\partial g_o}{\partial x\partial y}-\right.$$

$$\left.-B_2\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 g_o}{\partial x^2}+\frac{\partial^4 I}{\partial x^2\partial z^2}\right)+B_3\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^4 I}{\partial x^2\partial y\partial z}\right)\right\}, \qquad (50б)$$

$$H_z(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi i k^0}\int\limits_S dS\left\{D_1\frac{\partial g_e}{\partial y}-D_2\left(\frac{\partial g_o}{\partial x}+\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial y^2}\right)-D_3\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial y\partial z}+B_1\frac{\partial g_o}{\partial x\partial z}+\right.$$

$$\left.+B_2\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^4 I}{\partial x^2\partial y\partial z}\right)-B_3\left(\frac{\partial^2 g_o}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2}+\frac{\partial^4 I}{\partial x^2\partial y^2}\right)\right\}. \qquad (50в)$$

Выражение (50) будем считать точным решением векторной задачи для поля в одноосной среде. Из (21), (22) и (49) следует, что для всех $x_i=x,\ y,\ z$ и $x_{0i}=x_0,\ y_0,\ z_0$

$$\frac{\partial g_{o,e}}{\partial x_i}=-\frac{\partial g_{o,e}}{\partial x_{0i}}, \quad \frac{\partial I}{\partial x_i}=-\frac{\partial I}{\partial x_{0i}}. \qquad (51)$$

Используя (51), легко увидеть первое общее свойство полученного решения. Для любых граничных условий (при любых значениях векторов **B** и **D**) дивергенция поля (50) равна нулю.

Основным негативным моментом полученного решения является его зависимость от интеграла (46), точное значение которого нам определить не удалось. В связи с этим появляется необходимость поиска приближенных способов его вычисления, и одну из таких возможностей мы продемонстрируем ниже.

Организуем две функции:

$$I_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{R^2}{k_o^2p^2}g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0), \qquad (52а)$$

$$I_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-\frac{R'^2}{k_o^2p^2}g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0), \qquad (52б)$$

где $p^2=(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$.

Теперь вычислим точное значение выражения

$$\frac{\partial^2 I_o}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 I_o}{\partial z^2}=$$

$$=-g_o\left\{1+\frac{1}{ik_o}\left(\frac{1}{R}-\frac{2R'}{p^2}\right)+\frac{1}{(ik_o)^2}\left(\frac{4R^2}{p^4}-\frac{2}{p^2}-\frac{1}{R^2}\right)\right\}. \qquad (53)$$

Легко увидеть, что исполнение условия

$$ik_o\frac{p^2}{R}\gg 1 \qquad (54)$$

превращает (53) в следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 I_o}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 I_o}{\partial z^2}=-g_o. \qquad (55а)$$

Совершенно аналогично можно показать, что при условии (54) выполнятся

$$\frac{\partial^2 I_e}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 I_e}{\partial z^2}=\beta^2 g_e. \qquad (55б)$$

В результате приходим к выводу: если (54) выполняется, то интересующий нас интеграл (46) можно представить в виде суммы двух функций (52), причем эта сумма приближенно удовлетворяет условию (48). Исследуя (54), можно увидеть, что это условие для достаточно больших z_0 [см. (35)] не выполняется фактически только в одном случае — пучок распространяется почти вдоль оптической оси. Но эта ситуация, по крайней мере для теории генерации гармоник, никакого интереса не представляет, в связи с чем можно считать, что рассмотренное приближение вносит ограничений не больше, чем принципиально необходимое для параболического приближения условие (35).

Если теперь интеграл (46), записанный в виде суммы двух функций (52), подставить в решение (50), то последнее совершенно естественным образом разобьется на два. Слагаемые, зависящие от функции $g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$, будут, очевидно, определять поведение o-волны, а все остальное будет относиться к e-волне. Причем в силу того, что функции $g_{o,e}$ являются точными решениями уравнений (20), все компоненты вектора $\mathbf{H}$ из (50) будут точно удовлетворять скалярным уравнениям Гельмгольца (16) или (19). Воспользовавшись уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\,ik^0(\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}), \tag{56}$$

можно будет легко определить и компоненты векторов $\mathbf{E}_{o,e}$. Последние будут так же точно удовлетворять уравнениям (16) и (19) и условию на дивергенцию (6а). Обращаясь к (50), легко увидеть, что вектор $\mathbf{H}_e$ не имеет проекции на оптическую ось ($H_{ex} = 0$), а с помощью равенства (55) можно показать, что таким же свойством будет обладать решение для вектора $\mathbf{E}_o$.

Таким образом, все проверки, которые можно провести, не конкретизируя вид граничных условий, показывают, что выражения (50) действительно определяют искомое решение векторной задачи, точность которого регламентируется выполнением условия (54). Тем не менее остается не ясным весьма важный момент: будет ли решение (50) отвечать требованию единственности. Сомнения на этот счет могут возникнуть, если принять во внимание следующее достаточно заметное обстоятельство. Если к сумме функций (52) добавить произвольную функцию, зависящую только от x, то эта сумма будет с тем же успехом удовлетворять условию (48). Какой из этих приближенных вариантов будет лучше совпадать с точным значением интеграла (46), лично нам определить не представляется возможным. Единственность решения надо либо доказывать строго, либо попытаться установить четкую связь решения (50) с решениями, полученными в скалярном приближении, для которых теоремы единственности уже доказаны. Второй вариант выглядит, на наш взгляд, более предпочтительным, и мы ниже займемся его реализацией, надеясь заодно и несколько упростить выражения (50), которые нам кажутся все-таки слишком громоздкими.

Поступаем следующим образом. Записываем выражения (50) в системе E-координат и, тем самым, получаем решение задачи о пучке, распространяющемся под произвольным углом θ к оптической оси. Затем объявляем пучок слабо расходящимся и договариваемся решать задачу в первом приближении. Последнее означает, что в силу (37) все производные от функций Грина по поперечным координатам (x и y) второй и более высокой кратности полагаем равными нулю. Учитываем, что функции (52) в E-координатах могут быть представлены в виде [везде ниже для g_e следует использовать (26)]

$$I_o = \frac{1}{\sin^2\theta\, k_o^2}\,g_o + O\left(\mu_1^2\right),\quad I_e = \frac{1}{\sin^2\theta\, k_o^2}\,g_e + O\left(\mu_1^2\right), \tag{57}$$

и получаем для векторов $\mathbf{E}_o$ и $\mathbf{H}_e$ соответственно

$$\mathbf{E}_o(\mathbf{r}_0) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi k_o^2}\int\limits_{-}^{+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\mathbf{i}C\left[D_2\frac{1}{S}\frac{\partial^2 g_o}{\partial y\partial z} + B_1 k_o^2\frac{\partial g_o}{\partial y} + B_3\frac{C}{S}\frac{\partial^3 g_o}{\partial y\partial z^2}\right] + \right.$$

$$+\mathbf{j}\left[-D_2 k_o^2 g_o - D_3\frac{1}{S}\frac{\partial^2 g_o}{\partial y\partial z} - B_1 k_o^2\left(C\frac{\partial g_o}{\partial x} - S\frac{\partial g_o}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. +B_2\frac{C}{S}\frac{\partial^3 g_o}{\partial y\partial z^2} - B_3 k_o^2\left(S\frac{\partial g_o}{\partial x} + C\frac{\partial g_o}{\partial z}\right)\right] -$$

$$\left. -\mathbf{k}S\left[D_2\frac{1}{S}\frac{\partial^2 g_o}{\partial y\partial z} + B_1 k_o^2\frac{\partial g_o}{\partial y} + B_3\frac{C}{S}\frac{\partial^3 g_o}{\partial y\partial z^2}\right]\right\}dxdy; \tag{58}$$

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi i\, k^0}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\left\{-\mathbf{i}C\left[D_1\frac{\partial g_e}{\partial y} + D_3\frac{C}{S}\frac{1}{k_o^2}\frac{\partial^3 g_e}{\partial y\partial z^2} + \right.\right.$$

$$\left. +B_2\left(S\frac{\partial^2 g_e}{\partial y\partial z} - \frac{C^2}{S}\frac{1}{k_o^2}\frac{\partial^4 g_e}{\partial y\partial z^3}\right)\right] +$$

$$+\mathbf{j}\left[D_1\left(C\frac{\partial g_e}{\partial x} - S\frac{\partial g_e}{\partial z}\right) + D_3\beta^2\left(S\frac{\partial g_e}{\partial x} + C\frac{\partial g_e}{\partial z}\right) + B_2 k_e^2 g_e\right] +$$

$$+\mathbf{k}S\left[D_1\frac{\partial g_e}{\partial y} + D_3\frac{C}{S}\frac{1}{k_o^2}\frac{\partial^3 g_e}{\partial y\partial z^2} + \right.$$

$$\left.\left. +B_2\left(S\frac{\partial^2 g_e}{\partial y\partial z} - \frac{C^2}{S}\frac{1}{k_o^2}\frac{\partial^4 g_e}{\partial y\partial z^3}\right)\right]\right\}dxdy, \tag{59}$$

где для упрощения записи мы использовали обозначения $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$.

Теперь нам необходимо конкретизировать вид граничных условий. Обращаясь к (58) и (59), замечаем, что для всех $z_0 > 0$ векторы электрической напряженности o- и e-волн можно представить в виде

$$\mathbf{E}_o = \left\{\mu_1 E_{ox}, E_{oy}, \mu_1 E_{oz}\right\},\ \ \mathbf{E}_e = \left\{E_{ex}, \mu_1 E_{ey}, \mu_1 E_{ez}\right\}. \tag{60}$$

Кроме того, все компоненты векторов (60) имеют медленно меняющиеся амплитуды, т.е.

$$\left(\mathbf{E}_{o,e}\right)_i = \left(A_{o,e}\right)_i\ (\mu_1 x, \mu_1 y, \mu_2 z)\,e^{ik_o^e z}. \tag{61}$$

Поскольку мы решаем задачу в первом приближении, то граничные условия (т.е. компоненты векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$), которые необходимо подставить в (58) и (59), следует записывать в первом приближении. В результате для компонент векторов (49) обыкновенной волны в первом приближении получаем

$$B_1 = -SE_y \square \mu_1^0, \; B_2 = E_x \square \mu_1, \; B_3 = CE_y \square \mu_1^0; \qquad (62а)$$

$$D_1 = -ik_o SE_x \square \mu_1, \;\; D_2 = -ik_o E_y \square \mu^0,$$

$$D_3 = ik_o CE_x \square \mu_1. \qquad (62б)$$

Граничные условия для необыкновенной волны принимают вид

$$B_1 = -SE_y \square \mu_1, \; B_2 = E_x \square \mu_1^0, \; B_3 = CE_y \square \mu_1, \qquad (63а)$$

$$D_1 = -ik^e SE_x \square \mu_1^0, \; D_2 = -ik^e E_y \square \mu_1,$$

$$D_3 = ik^e CE_x \square \mu_1^0. \qquad (63б)$$

Подставляем (62) в (58), отбрасываем вновь образовавшиеся слагаемые второго порядка малости и для вектора электрической напряженности o-волны получаем окончательное выражение

$$\mathbf{E}_o(\mathbf{r}_0) = \mathbf{i}\left(\frac{1}{ik_o}\frac{C}{S}\frac{\partial T_o}{\partial y_0}\right) + \mathbf{j}T_o - \mathbf{k}\left(\frac{1}{ik_o}\frac{\partial T_o}{\partial y_0}\right), \qquad (64а)$$

где

$$T_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x,y)\left[\frac{\partial g_o}{\partial z}\right]_{z=0} dxdy. \qquad (64б)$$

Подставляем граничные условия (63) в решение (59). Используем уравнение Максвелла (56). Учитываем, что в E-координатах ненулевые компоненты тензора диэлектрической проницаемости определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = n_o^2 b, \;\; \varepsilon_{22} = n_o^2, \;\; \varepsilon_{33} = n_o^2 a, \;\; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = n_o^2 \rho\, a. \qquad (65)$$

После чего, сохраняя величины нулевого и первого порядка малости, для вектора электрической напряженности необыкновенной волны получаем в окончательном виде

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0) = \mathbf{i}(aT_e) - \mathbf{j}\left(\frac{C}{S}\frac{1}{ik^e}\frac{\partial T_e}{\partial y_0}\right) - \mathbf{k}\left(\frac{1}{ik^e}\frac{\partial T_e}{\partial x_0} + \rho T_e\right), \quad (66а)$$

где

$$T_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x,y)\left[\frac{\partial g_e}{\partial z}\right]_{z=0} dxdy. \qquad (66б)$$

Сделаем несколько комментариев. Положение оптической оси в системе E-координат определяется, очевидно, вектором

$$\mathbf{O} = \{\sin\theta, 0, \cos\theta\}. \qquad (67)$$

Тогда легко увидеть, что скалярные произведения векторов (67) и (66), а также векторов (67) и (59) тождественно обращаются в нуль. Следовательно, по определениям (13) и (14), поле (64) оказывается o-волной, а (66) – e-волной. Все компоненты векторов (64) и (66) точно удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (16) и (27), а сами векторы в первом приближении удовлетворяют условию на дивергенцию (6а). И наконец, самое основное. В нулевом приближении решения (64) и (66) совпадают с соответствующими точными решениями, полученными в скалярном приближении. Малые компоненты векторов (64) и (66) определяются простым дифференцированием этого скалярного решения. Таким образом, каждое из решений (64) и (66) определяет один единственный вектор, который совпадает при $z_0 = 0$ с соответствующим граничным условием, заданным на этой плоскости.

Из приведенных комментариев следует, что в первом приближении задача о распространении принципиально векторного поля в одноосной однородной среде можно считать полностью решенной. Все требования, которым должно удовлетворять такое решение, оказались выполненными. Поскольку решения (64) и (66) получены в результате формальных упрощений общего выражения (50), то появляются серьезные основания полагать, что и само представление (50) является точным решением волнового уравнения (1).

Заключение

Отметим один момент общего характера, который мы совсем не обсуждали в рамках настоящей работы. Суть его сводится к ответу на вопрос: может ли в одноосной среде волна одного типа быть источником волны другого типа? Или другими словами: можно ли на входе в одноосную среду задать такие граничные условия, которые гарантировали бы наличие в среде волны только одного типа? Из представленных выше решений (64) и (66) следует, что, вообще говоря, ответ на первый вопрос должен быть положительным, а на второй – отрицательным. Например, если o-волна имеет компоненту E_x (или «приобретает» ее в процессе распространения), то эта компонента согласно (66) обязана стать источником e-волны (количественную сторону вопроса при этом не обсуждаем, а интересуемся только принципиальной возможностью). Совершенно аналогичным образом приходим к выводу о том, что в одноосной среде может появиться o-волна, которой не было на входе в одноосную среду.

Из сказанного вполне естественно вытекает следующий вопрос. Является ли такое взаимное влияние (или, если угодно, взаимодействие) o- и e-волн свойством, всегда, вообще говоря, присущим процессу распространения поля в одноосной среде, или это результат использования целого ряда приближений, привлеченных нами для упрощения строгого решения (50)? В этом плане наиболее «подозрительным» оказывается сама возможность строгого представления интеграла (46) в виде суммы двух функций вида (52), поскольку именно эта акция и лежит в основе разделения общего решения (50) на два – отдельно для o- и e-волны. Наверное, существует строгое доказательство возможности или невозможности разложения функции (46) на два слагаемых, но на настоящий момент нам оно не известно. Разумеется, ответ нашелся бы сам собой, если бы указанный интеграл удалось вычислить точно. Но и это нам, к сожалению, пока сделать не удается. Другое дело, что косвенную информацию на этот счет можно попытаться получить, если обратиться к частному случаю — изотропная среда.

Пусть в изотропной среде пучок распространяется вдоль оси Z системы E-координат. Зафиксируем произвольно направление (67) и попробуем отыскать решение уравнение (1), у которого будет отсутствовать проекция на это направление. Если такое решение удастся найти, то это будет полный аналог o-волны, но для изотропной среды. Подобным образом, используя (14), можно организовать «изотропную» e-волну. Понятно, что такие «квази»-o- и -e-волны будут иметь совершенно одинаковые свойства и отличаться только ориентацией векторов поляризации.

В результате такой постановки задачи появляется возможность снова вернуться к вопросу о взаимном влиянии, но только теперь уже «квазиволн». При этом предполагаем, что в плане интересующего нас свойства способ появления фиксированного направления (естественный или искусственный) принципиального значения иметь не будет. Таким образом, вероятность доведения расчетов до конечного результата существенно возрастает, поскольку все проблемы, связанные с вычислением интеграла (46), при переходе к изотропной среде снимаются автоматически.

Мы не готовы в настоящий момент детально обсуждать такую схему решения, в связи с чем ограничимся только одним замечанием. Строгое решение стандартной задачи о поле в изотропной среде нами уже, по существу, получено: достаточно обратиться к (50) и положить в нем $n_o = n_e = n$. Замечаем, что при этом сам интеграл (46) также обращается в нуль. Однако и это представляется достаточно любопытным: если речь идет о распространении «квазиволн», то для получения соответствующих решений интеграл (46) (в более простой, «изотропной» форме) придется снова вводить в выражение (50), но уже искусственным образом.

1. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2004. 512 с.
2. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. 2-е изд. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики. (Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). М.: ВИНИТИ, 1965. 295 с.
4. *Сухоруков А.П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 232 с.
5. *Гончаренко А.М.* Гауссовы пучки света. Минск: Наука и техника, 1977. 143 с.
6. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 555 с.
7. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 719 с.
8. *Бобровников М.С., Старовойтова Р.П., Пономарев Г.А.* Интегральные преобразования в задачах дифракции и распространения радиоволн. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. 116 с.
9. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 655 с.
10. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 632 с.

S.D. Tvorogov, V.O. Troitskii. **Exact and approximate representations for a laser beam in the uniaxial homogeneous medium.**

We have considered the problem of the monochromatic radiation propagation in the uniaxial and homogeneous medium. Two versions are shown for investigating the above-mentioned problem: the scalar approximation (the variation of polarization state of propagating radiation is not taken into account) and the rigorous approach of exact solution of the vector wave equation. The basis for the first version is the suggested general determination of ordinary and extraordinary radiation, and for solving the wave equation we used the Kirchhoff–Helmholtz method generalized to vector problems. For both versions, simplification of solutions was considered connected with parabolic approximation. It is shown that in this case the results of using the scalar and vector versions will, as was assumed, coincide more closely for the less divergence of the laser beam.