

УДК 519.246:681.88

Точностные характеристики определения временных задержек при квадратичной интерполяции максимумов обобщенных взаимно корреляционных функций.

Часть 2. Случайные ошибки

В.А. Федоров*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 6.09.2011 г.

В рамках сделанных предположений анализируются случайные ошибки оценивания временных задержек между информационными сигналами при квадратичной интерполяции максимумов обобщенных взаимно корреляционных функций (рассматривались стандартная взаимно корреляционная функция, сглаженное когерентное преобразование, фазовое преобразование (ФП) и максимально правдоподобное (МП) взвешивание). Оценено влияние различных сигнальных и системных параметров на исследуемую характеристику. В целом наибольшие случайные ошибки наблюдаются при использовании ФП, наименьшие для МП-взвешивания. Показано, что при надлежащем использовании модифицированных частотных взвешивающих функций их можно существенно уменьшить.

Ключевые слова: оценивание временных задержек, дисперсия, случайная ошибка, стандартная взаимно корреляционная функция, обобщенная взаимно корреляционная функция, сглаженное когерентное преобразование, фазовое преобразование, максимально правдоподобное взвешивание; time delay estimation (TDE), variance, random error, basic cross-correlation (BCC) function, generalized cross-correlation (GCC) function, smoothed coherence transform (SCOT), phase transform (PHAT), maximum-likelihood (ML) weighting.

Введение

В работе [1] анализируются систематические ошибки оценивания временных задержек τ_3 между реализациями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при квадратичной интерполяции максимумов их обобщенных взаимно корреляционных функций (ОВКФ) [1–4]. Рассматривались стандартная взаимно корреляционная функция (ВКФ), сглаженное когерентное преобразование (СКП), фазовое преобразование (ФП) и максимально правдоподобное (МП) взвешивание. Полученные результаты базировались на следующей двухканальной модели входных данных [5]:

$$\begin{cases} x_1(n\Delta t) = s(n\Delta t) + n_1(n\Delta t), \\ x_2(n\Delta t) = \alpha s[(n+d)\Delta t] + n_2(n\Delta t), \end{cases} \quad (1)$$

где информационный сигнал $s(n\Delta t)$ и шумы $n_1(n\Delta t)$, $n_2(n\Delta t)$ – попарно некоррелированные вещественные гауссовские стационарные случайные процессы с нулевыми средними; $0 < \alpha \leq 1$ – фактор ослабления сигнала второго канала относительно первого; Δt – интервал дискретизации; $n = 0, 1, \dots, N - 1$; $N = T/\Delta t$ – число обрабатываемых отсчетов, соответствующее длительности реализации T ; $d = \tau_3/\Delta t = p + \delta$; p, δ – целая и дробные части d , причем $|\delta| \leq 1/2$.

Процедура реализации оценки τ_3 является двух-этапной. На первом определяется грубое положение максимума оценки ОВКФ: $\hat{p} = \arg \max_n \hat{R}_{y_1 y_2}^o(n\Delta t)$ (здесь и в дальнейшем « $\hat{}$ » – символ оценки). Затем происходит его уточнение после параболической интерполяции [5]:

$$\hat{\delta} = z/v, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} z &= [\hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} + 1) - \hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} - 1)]/2; \\ v &= 2\hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p}) - \hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} - 1) - \hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} + 1). \end{aligned}$$

И окончательно: $\hat{\tau}_3 = (\hat{p} + \hat{\delta})\Delta t = \hat{d}\Delta t$.

Анализ статистических характеристик $\hat{\tau}_3$, проведенный в [1, 5], основан на предположении, что выполняется условие

$$T \gg |\tau_3| + \tau_{\text{кор}} \quad (3)$$

($\tau_{\text{кор}}$ – радиус корреляции сигнала $s(t)$). Также считалось, что аномальные ошибки оценивания τ_3 отсутствуют. Полагается, что положение грубого максимума ОВКФ измеряется правильно, т.е. $\hat{p} = p$. Тогда точностные характеристики $\hat{\tau}_3$ полностью определяются средними $M[\hat{\delta}]$ и дисперсиями $D[\hat{\delta}]$. В частности, $D[\hat{\tau}_3] = \Delta^2 t D[\hat{\delta}]$. Указанное тре-

* Валерий Александрович Федоров (fva21@iao.ru).

бует наличия достаточно высокого интегрального отношения сигнал/шум

$$q_{\text{инт}} = \sigma_{ss}^2 / \sigma_{nn}^2,$$

где σ_{ss}^2 – дисперсия сигнала, σ_{nn}^2 – дисперсия шума. Для белых шумов предположительно должно выполняться условие $q_{\text{инт}} \geq 1$ [1, 5].

С учетом этих условий общее выражение для случайной ошибки $D[\hat{\delta}]$ приведено в [5]. Фактически оно основано на использовании метода статистической линейаризации [6]. Его применение в полном объеме к функции $\hat{\delta} = f(z, v)$ (2) приводит к следующему соотношению:

$$D[\hat{\delta}] \equiv \{D[z] + M^2[\hat{\delta}]D[v] - 2M[\hat{\delta}]\text{cov}(z, v)\} / M^2[v]. \quad (4)$$

Здесь $\text{cov}(z, v) = M\{[z - M(z)][v - M(v)]\}$ – ковариация между z и v [6]. Однако в [5] пренебрегается вкладом $D(v)$ и $\text{cov}(z, v)$. В результате используется усеченное соотношение (4):

$$D_{\text{ус}}[\hat{\delta}] \equiv D[z] / M^2[v]. \quad (5)$$

Представляется целесообразным получение выражения для дисперсии оценки времени задержки (или $D[\hat{\delta}]$) с учетом вкладов $D(v)$ и $\text{cov}(z, v)$. Оценим влияние различных сигнальных и системных параметров на $D[\hat{\delta}]$. Рассмотрим «усеченные» взвешивающие функции $\Psi_o(f)$, отличные от нуля только на части интервала Найквиста ($-f_N \leq f \leq f_N$), где $f_N = 1/2\Delta t$ – частота Найквиста [6]. С одной стороны, использование таких модифицированных $\Psi_{o,m}(f)$ приводит к ухудшению разрешающей способности оценивания τ_3 [4]. С другой стороны, может существенно повыситься интегральное отношение сигнал/шум в полосе обработки. Также появляется возможность отстройки от нежелательных низкочастотных (НЧ) трендов или от узкополосных помех.

Случайные ошибки оценивания τ_3

Вначале, следуя [1, 5], введем некоторые основные определения. Запишем дискретное преобразование Фурье (ДПФ) временной последовательности $x_i(n\Delta t)$ в виде

$$X_i\left(\frac{k}{N\Delta t}\right) = X_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n\Delta t) \exp(-j2\pi kn/N), \quad (6)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Отсюда вытекает оценка взаимной спектральной плотности двух процессов $x_1(n\Delta t)$ и $x_2(n\Delta t)$:

$$\hat{G}_{x_1x_2}(k) = \frac{\Delta t}{N} X_1(k) X_2^*(k), \quad (7)$$

где «*» – символ комплексного сопряжения. При выполнении условия (3) $\hat{G}_{x_1x_2}(k)$ является несме-

щенной оценкой взаимного спектра $G_{x_1x_2}(k)$ и справедливо [2, 5]:

$$\begin{aligned} M[\hat{G}_{x_1x_2}(k)] &= G_{x_1x_2}(k) = \\ &= \alpha G_{ss}(k) \exp(-j2\pi kp/N) \exp(-j2\pi k\delta/N) \end{aligned} \quad (8)$$

($G_{ss}(k)$ – спектральная плотность информационного сигнала). А оценку дискретной ОВКФ можно записать в виде

$$\hat{R}_{y_1y_2}^o(n\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=-L}^L \Psi_o(k) \hat{G}_{x_1x_2}(k) \exp(j2\pi kn/N). \quad (9)$$

Здесь $\Psi_o(f)$ – функция частотного взвешивания; $L = (N/2) - 1$. Следуя [5] и учитывая (9), представим статистики z и v в соотношении (2) в частотной области:

$$z = \frac{j}{N\Delta t} \sum_{k=-L}^L \Psi_o(k) \hat{G}_{x_1x_2}(k) \exp(j2\pi kp/N) \sin \frac{2\pi k}{N}, \quad (10)$$

$$v = \frac{4}{N\Delta t} \sum_{k=-L}^L \Psi_o(k) \hat{G}_{x_1x_2}(k) \exp(j2\pi kp/N) \sin^2 \frac{\pi k}{N}. \quad (11)$$

Случайные ошибки $\hat{\delta}$ в значительной степени определяются дисперсиями $D[z]$, $D(v)$ и $\text{cov}(z, v)$ (4). Выражение для $D[z]$ приведено без вывода в [5] для частного случая $\Delta t = 1$. Получим его для любых Δt .

Подставляя соотношение (10) для случайной вещественной переменной z в определение искомой дисперсии $D[z] = M[z^2] - M^2[z]$ и проводя необходимые усреднения, получаем

$$\begin{aligned} D[z] &= -\frac{1}{N^2\Delta t^2} \sum_{k=-L}^L \sum_{l=-L}^L \text{cov}_R\{\hat{G}_{x_1x_2}(k), \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} \times \\ &\times \Psi_o(k) \Psi_o(l) \exp(j2\pi kp/N) \exp(j2\pi lp/N) \times \\ &\times \sin \frac{2\pi k}{N} \sin \frac{2\pi l}{N}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \text{cov}_R\{\hat{G}_{x_1x_2}(k), \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} &= \\ &= M\{\hat{G}_{x_1x_2}(k) \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} - M\{\hat{G}_{x_1x_2}(k)\} M\{\hat{G}_{x_1x_2}(l)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Символ R указывает на отличие данного термина от стандартного определения ковариационной функции для комплексных процессов [7]. Из определения (7) следует

$$M\{\hat{G}_{x_1x_2}(k) \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} = \frac{\Delta t^2}{N^2} M\{X_1(k) X_2^*(k) X_1(l) X_2^*(l)\}.$$

Для рассматриваемых гауссовых центрированных реализаций $x_i(n\Delta t)$ (1) отсчеты ДПФ $X_i(k)$ (6) также имеют соответствующие гауссовские распределения с нулевыми средними [6–8]. Тогда выражение (13) можно представить в виде

$$\text{cov}_R\{\hat{G}_{x_1x_2}(k), \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} = E_2(k, l) + E_3(k, l).$$

Здесь

$$E_2(k, l) = \frac{\Delta t^2}{N^2} M\{X_1(k)X_2^*(l)\}M\{X_2^*(k)X_1(l)\},$$

$$E_3(k, l) = \frac{\Delta t^2}{N^2} M\{X_1(k)X_1(l)\}M\{X_2^*(k)X_2^*(l)\}.$$

Рассмотрим соотношение для $E_2(k, l)$ при всех возможных сочетаниях k и l .

При $|l| \neq |k|$, в силу попарной некоррелированности сигнала и шумов (1) и известных асимптотических свойств ДПФ $X_i(k)$ [2, 6–8], получим $E_2(k, l) = 0$.

При $l = k \neq 0$ с учетом (7), (8)

$$E_2(k, k) = G_{x_1x_2}^2(k) = \alpha^2 G_{ss}^2(k) \exp(-j4\pi k d / N).$$

При $l = k = 0$: $E_2(0, 0) = \alpha^2 G_{ss}^2(0)$.

При $l = -k \neq 0$ с учетом эрмитовой симметрии $X_i(k)$

$$E_2(k, -k) = \frac{\Delta t^2}{N^2} M\{X_1(k)X_2(k)\}M\{X_1^*(k)X_2^*(k)\}.$$

Используя периодичность ДПФ $S(k)$ сигнальной последовательности $s(n\Delta t)$ в (1), приходим к $M\{X_1(k)X_2(k)\} = \alpha \exp(j2\pi k d / N) M\{S^2(k)\}$. Записав $S(k)$ в виде вещественной и мнимой частей и учтя их известные статистические свойства [7], получим $M\{S^2(k)\} = 0$ (при $k \neq 0$). Следовательно, $E_2(k, -k) = 0$.

Перейдем к выражению для $E_3(k, l)$.

При $|l| \neq |k|$ величина $E_3(k, l) = 0$.

При $l = k \neq 0$ $E_3(k, k) = 0$.

При $l = k = 0$ $E_3(0, 0) = \alpha^2 G_{ss}^2(0)$.

При $l = -k \neq 0$

$$E_3(k, -k) = \frac{\Delta t^2}{N^2} M\{X_1(k)X_1^*(k)\} \times$$

$$\times M\{X_2^*(k)X_2(k)\} = G_{x_1x_1}(k)G_{x_2x_2}(k),$$

где $G_{x_1x_1}(k) = G_{ss}(k) + G_{n_1n_1}(k)$ – сумма спектральных плотностей сигнала и шума первого измерительного канала, $G_{x_2x_2}(k) = \alpha^2 G_{ss}(k) + G_{n_2n_2}(k)$ – второго.

Объединив $E_2(k, l)$ и $E_3(k, l)$, получим

$$\text{cov}_R\{\hat{G}_{x_1x_2}(k), \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} = \begin{cases} 0, & |l| \neq |k|, \\ \alpha^2 G_{ss}^2(k) \exp(-j4\pi k d / N), & l = k \neq 0, \\ 2\alpha^2 G_{ss}^2(0), & l = k = 0, \\ G_{x_1x_1}(k)G_{x_2x_2}(k), & l = -k. \end{cases} \quad (14)$$

Подставив (14) в (12), после ряда преобразований окончательно имеем

$$D[z] = \frac{2}{N^2 \Delta t^2} \sum_{k=1}^L \Psi_0^2(k) \sin^2 \frac{2\pi k}{N} G_{x_1x_1}(k) G_{x_2x_2}(k) \times \left[1 - |\gamma(k)|^2 \cos \frac{4\pi k \delta}{N} \right]. \quad (15)$$

Здесь

$$|\gamma(k)|^2 = |G_{x_1x_2}(k)|^2 / [G_{x_1x_1}(k)G_{x_2x_2}(k)]$$

– квадрат модуля функции когерентности ($0 \leq |\gamma(k)|^2 \leq 1$) [2–4, 8]. Соотношение (15) при $\Delta t = 1$ соответствует выражению для $D[z]$ в [5] при учете в последнем симметричности суммируемых функций относительно $k = 0$.

Используя соотношение (11), получим

$$D[v] = -\frac{16}{N^2 \Delta t^2} \sum_{k=-L}^L \sum_{l=-L}^L \text{cov}_R\{\hat{G}_{x_1x_2}(k), \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} \times \Psi_0(k)\Psi_0(l) \exp(j2\pi k p / N) \exp(j2\pi l p / N) \times \sin^2 \frac{\pi k}{N} \sin^2 \frac{\pi l}{N}.$$

С учетом выражения (14)

$$D[v] = \frac{32}{N^2 \Delta t^2} \sum_{k=1}^L \Psi_0^2(k) \sin^4 \frac{\pi k}{N} \times G_{x_1x_1}(k) G_{x_2x_2}(k) \left[1 + |\gamma(k)|^2 \cos \frac{4\pi k \delta}{N} \right]. \quad (16)$$

Из (10) и (11) следует

$$\text{cov}[z, v] = \frac{4j}{N^2 \Delta t^2} \sum_{k=-L}^L \sum_{l=-L}^L \text{cov}_R\{\hat{G}_{x_1x_2}(k), \hat{G}_{x_1x_2}(l)\} \times \Psi_0(k)\Psi_0(l) \exp(j2\pi k p / N) \exp(j2\pi l p / N) \times \sin \frac{2\pi k}{N} \sin^2 \frac{\pi l}{N}.$$

С учетом (14) после ряда преобразований

$$\text{cov}[z, v] = \frac{8\alpha^2}{N^2 \Delta t^2} \sum_{k=1}^L \Psi_0^2(k) G_{ss}^2(k) \sin \frac{2\pi k}{N} \sin^2 \frac{\pi k}{N} \sin \frac{4\pi k \delta}{N}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что случайные переменные z и v некоррелированы только при $\delta = 0$, т.е.

$$\text{cov}[z(\delta = 0), v(\delta = 0)] = 0.$$

Подставляя в соотношение (4) выражения, полученные для статистических моментов $D[z]$, $D[v]$, $\text{cov}(z, v)$, а также приведенные в [1] для $M[\hat{\delta}]$, $M[v]$, можно вычислить $D[\hat{\delta}]$ с учетом спектральных характеристик сигнала $G_{ss}(k)$, шумов $G_{n_1n_1}(k)$, $G_{n_2n_2}(k)$ и используемых ОВКФ. При плоских $G_{ss}(k)$, $G_{n_1n_1}(k)$ и $G_{n_2n_2}(k)$ можно получить соответствующие аналитические соотношения. При этом

для $\alpha = 1$ и $G_{n_1 n_1}(k) = G_{n_2 n_2}(k) = G_{nn}$ (например, когда близкорасположенные сигнальные датчики находятся в одном шумовом поле) $D[\hat{\delta}]$ не зависит от используемых взвешивающих функций $\Psi_0(k)$ (при ранее сделанном предположении $q_{\text{ннт}} \geq 1$) [1, 5]. Исходные выражения (4), (15)–(17) заменяются на более простые:

$$D[\hat{\delta}] \equiv \{D_*[z] + M^2[\hat{\delta}]D_*[v] - 2M[\hat{\delta}]\text{cov}^*(z, v)\} / M_*^2[v], \quad (18)$$

где

$$D_*[z] = \frac{2}{q^2} \sum_{k=1}^L \left[(1+q)^2 - q^2 \cos \frac{4\pi k \delta}{N} \right] \sin^2 \frac{2\pi k}{N},$$

$$D_*[v] = \frac{32}{q^2} \sum_{k=1}^L \left[(1+q)^2 + q^2 \cos \frac{4\pi k \delta}{N} \right] \sin^4 \frac{\pi k}{N};$$

$$\text{cov}^*(z, v) = 8 \sum_{k=1}^L \sin \frac{2\pi k}{N} \sin^2 \frac{\pi k}{N} \sin \frac{4\pi k \delta}{N};$$

$q = G_{ss}/G_{nn}$ — отношение уровней спектральных плотностей сигнала и шума. Соотношения для $M[\hat{\delta}]$ и $M_*[v]$ представлены в [1].

В качестве примера приведем выражения для составляющих $D[\hat{\delta}]$ для модели полосового высокочастотного (ВЧ) сигнала на фоне аддитивного белого шума [1]. Пусть $s(n\Delta t)$ — ВЧ-процесс с плоским спектром в полосе B с некоторой центральной частотой $f_{\text{ц}}$. Для определенности положим $f_{\text{ц}} = f_{\text{д}}/4$, где $f_{\text{д}} = 1/\Delta t$ — частота дискретизации. Тогда при $N \gg 1$

$$D_*[z] = G_1 - G_2(\delta). \quad (19)$$

Здесь

$$G_1 = N\{(1+2/q)[\beta + S_i(1)] + 1/q^2\}/2,$$

$$G_2(\delta) = N \cos \pi \delta \{2S_i(\delta) + S_i(1+\delta) + S_i(1-\delta)\}/4;$$

$\beta = 2B/f_{\text{д}} = B/2f_{\text{ц}}$ характеризует степень широкополосности (узкополосности $k_{\text{узк}} = f_{\text{ц}}/B$) сигнального спектра; $S_i(x) = \sin \pi \beta x / \pi x$;

$$D_*[v] = G_3 + G_4(\delta); \quad (20)$$

$$G_3 = 2N\{(1+2/q)[3\beta - S_i(1)] + 3/q^2\},$$

$$G_4(\delta) = N\{\cos \pi \delta [6S_i(\delta) - S_i(1+\delta) - S_i(1-\delta)] + 4 \sin \pi \delta [S_i((1+2\delta)/2) - S_i((1-2\delta)/2)]\};$$

$$\text{cov}^*(z, v) = N\{\sin \pi \delta [S_i((1-2\delta)/2) + S_i((1+2\delta)/2)] + \cos \pi \delta [S_i(1-\delta) - S_i(1+\delta)]/2\};$$

$$M[\hat{\delta}] = \frac{\delta}{2} \frac{\sin \pi \beta / 2 \text{ctg} \pi \beta \delta / 2 - \delta \cos \pi \beta / 2}{(1-\delta^2) \text{ctg} \pi \beta \delta / 2 + \delta (\cos \pi \beta / 2 - \delta \sin \pi \beta / 2 \text{ctg} \pi \beta \delta / 2)},$$

$$M_*(v) = N\{2 \cos \pi \delta / 2 S_i(\delta/2) - \sin \pi \delta / 2 [S_i((1-\delta)/2) - S_i((1+\delta)/2)]\}.$$

Отсюда следует, что дисперсия оценки времени задержки обратно пропорциональна длительности измерений T (т.е. числу обрабатываемых отсчетов N). Это является общим свойством определения τ_3 по непрерывным [2, 4, 9] и дискретным реализациям. Из представленных соотношений также вытекает, что в отличие от непрерывного случая [2, 4, 9] в дискретном — $\lim_{q \rightarrow \infty} D[\hat{\tau}_3] \neq 0$, кроме трех особых точек: $\delta = 0$ и $\delta = \pm 1/2$. Так, при $\delta = 0$

$$D[\hat{\delta}]_0 = \frac{2[\beta + S_i(1)]/q + 1/q^2}{8\beta^2 N}.$$

Для $\delta = \pm 1/2$

$$D[\hat{\delta}]_{1/2} = \frac{\pi^2(1+2\beta q)}{4q^2 N [\sin(\pi\beta/4) + \sin(3\pi\beta/4)/3]^2}.$$

В целом при наличии шума $D[\hat{\delta}]$ монотонно возрастает с увеличением модуля $|\delta|$ от минимального значения $D[\hat{\delta}]_0$ до максимального $D[\hat{\delta}]_{1/2}$. Иными словами, случайная ошибка измерения временной задержки минимальна, если положение истинного значения τ_3 совпадает с одним из отсчетов ОВКФ, т.е. при $\tau_3 = p\Delta t$. И эта ошибка максимальна, если τ_3 попадает в середину двух соседних отсчетов, т.е. при $\tau_3 = (p \pm 1/2)\Delta t$. Разница может быть достаточно существенной. Так, при $q \gg 1$ для узкополосных сигналов (т.е. при $\beta \ll 1$) отношение $k = D[\hat{\delta}]_{1/2}/D[\hat{\delta}]_0 \approx 2$, а для широкополосных (например, при $\beta = 1$) $k \approx 3\pi/2$.

На рис. 1 отражены зависимости различных нормированных случайных ошибок

$$\sigma_{\text{норм}}[\hat{\delta}] = \sqrt{D[\hat{\delta}]N} = \sigma[\hat{\delta}]\sqrt{N}$$

(кривые $\sigma_{\text{норм}}$) от параметра δ (из-за их четности показана область только положительных значений δ).

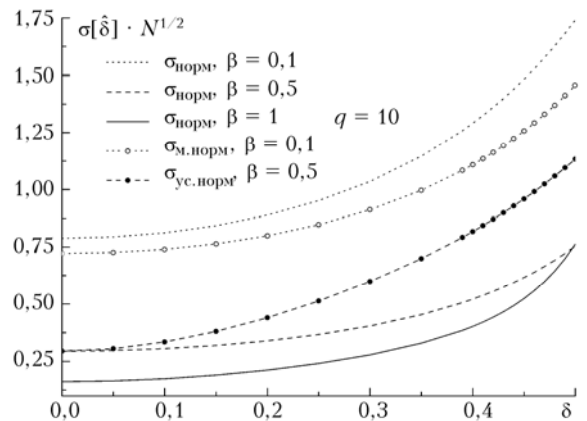


Рис. 1. Нормированные случайные ошибки для ВЧ плоских сигнальных спектров и белого шума

Отметим, что с увеличением степени широкополосности сигнала β ошибка $\sigma[\hat{\delta}]$ уменьшается. Это соответствует поведению случайной ошибки измерения τ_3 при обработке непрерывных реализаций [9].

Рассмотрим влияние модифицированных взвешивающих функций $\Psi_{o,m}(f)$ на анализируемые случайные ошибки. Пусть $\Psi_{o,m}(f)$ совпадает с исходной $\Psi_o(f)$ в частотной полосе ВЧ-сигнала ($f_c/4 \pm B/2$) Гц. В остальной части интервала Найквиста $\Psi_{o,m}(f) = 0$. Тогда при переходе от $D[\hat{\delta}]$ к искомой $D_m[\hat{\delta}]$ необходимо в выражениях (18)–(20) провести следующие замены:

$$D_*[z] = G_{1M} - G_2(\delta), \quad D_*[v] = G_{3M} + G_4(\delta),$$

где

$$G_{1M} = N(1+q)^2[\beta + S_i(1)]/2q^2,$$

$$G_{3M} = 2N(1+q)^2[3\beta - S_i(1)]/q^2.$$

Одна из зависимостей $\sigma_{m,норм}[\hat{\delta}] = \sqrt{D_m[\hat{\delta}]N}$ при $\beta = 0,1$ нанесена на рис. 1 (кривая $\sigma_{m,норм}$). Можно сделать вывод о значимом уменьшении анализируемой случайной ошибки даже при достаточно высоком отношении уровней сигнал/шум $q = 10$.

На рис. 2 показаны зависимости $\sigma[\hat{\delta}]$ при $N = 400$, рассчитанные по соотношениям (4), (15)–(17), где в качестве $G_{ss}(k)$ используется гауссов ВЧ-спектр [1]:

$$G_{ss}\left(f_k = \frac{k}{N\Delta t}\right) = \frac{\sigma_{ss}^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma_f} \exp[-(f_k - f_c)^2/2\sigma_f^2].$$

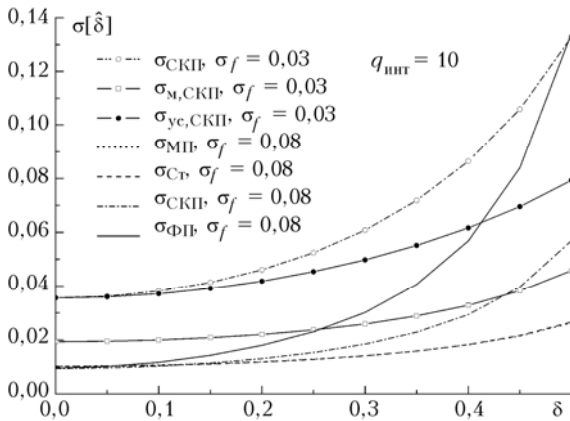


Рис. 2. Случайные ошибки $\sigma[\hat{\delta}]$ при $N = 400$ для гауссовых ВЧ сигнальных спектров и белого шума

Как и для плоского ВЧ-спектра, центральная частота сигнала $f_c = 1/4\Delta t$. Без потери общности полагаем $\Delta t = 1$ и среднеквадратичную спектральную ширину σ_f задаем в долях единичной частоты дискретизации. Также считаем, что $\alpha = 1$, а шумы белые, причем $G_{n_1}(k) = G_{n_2}(k) = G_{nn}$ и выполняется условие $q_{инт} \geq 1$.

Зависимости случайных ошибок $\sigma[\hat{\delta}] = \sqrt{D[\hat{\delta}]}$ = $\sigma[\hat{\tau}_3]$ от δ , N и коэффициентов узкополосности

$k_{узк} = f_c/2\sigma_f = 1/8\sigma_f$ соответствуют таковым для плоских сигнальных спектров. Но при этом существенное влияние на $\sigma[\hat{\delta}]$ оказывает вид применяемой ОВКФ. Наименьшие случайные ошибки наблюдаются при использовании МП (рис. 2, кривая $\sigma_{МП}$). Несколько большие значения получаются при применении стандартной ВКФ (кривая $\sigma_{СТ}$). На рис. 2 отличие $\sigma_{МП}$ от $\sigma_{СТ}$ невелико. Но при других значениях системных параметров эта разница может быть более значима. Случайные ошибки существенно увеличиваются при использовании СКП (кривая $\sigma_{СКП}$) и еще в большей степени для ФП (кривая $\sigma_{ФП}$). Причем разница $\sigma_{МП}$, $\sigma_{СТ}$, $\sigma_{СКП}$, $\sigma_{ФП}$ минимальна при $\delta = 0$ и увеличивается с ростом расстрой δ , достигая максимальных значений при $\delta = 1/2$. Наименее чувствительны к изменению δ дисперсии оценок временной задержки, основанные на МП-преобразовании и стандартной ВКФ. Наибольшей чувствительностью характеризуются оценки τ_3 на основе ФП.

Рис. 2 иллюстрирует уменьшение $\sigma[\hat{\delta}]$ при использовании модифицированных взвешивающих функций для СКП (кривая $\sigma_{M,СКП}$). В данном случае обратное ДПФ оценки комплексной функции когерентности [1–4] осуществляется при практически полном охвате гауссова ВЧ-спектра, т.е. в симметричных полосах $\pm(0,25 \pm Q\sigma_f)$, где $Q = 3$. Как показали дальнейшие расчеты, минимальные $\sigma_{M,СКП}$ наблюдаются при $Q \approx 1 \div 2$ (для $q_{инт} = 10$). Они меньше показанных на рис. 2 примерно на 35%. При увеличении Q $\sigma_{M,СКП}$ приближается к $\sigma[\hat{\delta}]_{СКП}$. Так, при $Q = 4$ значения $\sigma_{M,СКП}$ превышают $\sigma_{СКП}$ при $Q = 3$ примерно на 46%. Видимо, это является следствием уменьшения интегрального отношения сигнал/шум в полосе обработки.

Сравним величины случайных ошибок оценок δ , соответствующие полученному выражению для $D[\hat{\delta}]$ (4) и известному «усеченному» соотношению $D_{yc}[\hat{\delta}]$ (5) [5]. Так как $\hat{\delta}$ является несмещенной оценкой при $\delta = 0$ [1, 5], то из (4) следует равенство $D[\hat{\delta}] = D_{yc}[\hat{\delta}]$ при $\delta = 0$. Отличия появляются при $\delta \neq 0$. С ростом $|\delta|$ разница их значений, как правило, также увеличивается. При этом $\sigma_{yc}[\hat{\delta}] = \sqrt{D_{yc}[\hat{\delta}]}$ может быть как значительно больше $\sigma[\hat{\delta}]$ (см. рис. 1, кривая $\sigma_{yc,норм}$), так и значительно меньше (см. рис. 2, кривая $\sigma_{yc,СКП}$). Следовательно, пренебрегать вкладом $D[v]$ и $\text{cov}(z, v)$ в случайную ошибку оценки времени задержки нельзя.

Заметим, что представленные выводы о поведении $\sigma[\hat{\delta}]$ для ВЧ-сигналов полностью соответствуют результатам аналогичных расчетов для низкочастотных сигналов с плоским и гауссовым спектрами [1].

Заключение

В рамках сделанных предположений проанализированы случайные ошибки оценивания временных задержек при квадратичной интерполяции

максимумов ОВКФ (рассматривались стандартная ВКФ, СКП, ФП и МП-взвешивание). Получены выражения для дисперсии $D[\hat{\delta}]$ с учетом $D[v]$ и $\text{cov}(z, v)$. Показано, что пренебрегать их вкладом в данную ошибку нельзя.

В качестве примера представлены аналитические соотношения $D[\hat{\delta}]$ для модели ВЧ-полосового сигнала на фоне аддитивного белого шума. При этом отмечено, что когда близкорасположенные сигнальные датчики находятся в одном шумовом поле и $q_{\text{инт}} \geq 1$, $D[\hat{\delta}]$ не зависит от используемых взвешивающих функций $\Psi_o(k)$. В других ситуациях влияние вида применяемых ОВКФ существенно. В частности, для НЧ и ВЧ гауссовых сигнальных спектров наибольшие случайные ошибки измерения δ (т.е. фактически τ_3) наблюдаются при использовании ФП, наименьшие при МП-взвешивании. При надлежащем использовании модифицированных взвешивающих функций $\Psi_{o,m}(f)$ можно существенно уменьшить $D[\hat{\delta}]$.

Заметное влияние на $D[\hat{\delta}]$ оказывает величина расстройки δ положения истинного пика ОВКФ $d\Delta t$ относительно используемой временной дискретной сетки $n\Delta t$. Причем с ростом $|\delta|$ $D[\hat{\delta}]$ увеличивается. Значимое воздействие оказывает и степень широкополосности информационного сигнала. При ее увеличении $D[\hat{\delta}]$ уменьшается. Также дисперсия оценки времени задержки обратно пропорциональна длительности измерений T .

Автор выражает признательность С.Л. Одинцову за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Гос. контракт № 14.740.11.0076) и программы ОФН РАН «Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред», проект № 3.10.1.

1. Федоров В.А. Точностные характеристики определения временных задержек при квадратичной интерполяции максимумов обобщенных взаимно корреляционных функций. Часть 1. Систематические ошибки // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 7. С. 566–571.
2. Knapp C.H., Carter G.C. The Generalized Correlation Method for Estimation of Time Delay // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc. 1976. V. ASSP-24, N 4. P. 320–327.
3. Картер Г.К. Оценка когерентности и временной задержки // ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 2. С. 64–85.
4. Gao Y., Brennan M.J., Joseph P.F. A comparison of time delay estimators for the detection of leak noise signals in plastic water distribution pipes // J. Sound Vibration. 2006. V. 292. P. 552–570.
5. Boucher R.E., Hassab J.C. Analysis of Discrete Implementation of Generalized Cross Correlator // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc. 1981. V. ASSP-29, N 3. P. 609–611.
6. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 1. М.: Мир, 1971. 320 с.
7. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 759 с.
8. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 2. М.: Мир, 1972. 288 с.
9. Azaria M., Hertz D. Time Delay Estimation by Generalized Cross Correlation Methods // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc. 1984. V. ASSP-32, N 2. P. 280–285.

V.A. Fedorov. Performance characteristics of determination of time delays with quadratic interpolation of maxima of generalized cross-correlation functions. Part 2. Random errors.

Under our assumptions, the random errors in estimation of time delay between the information signals with quadratic interpolation of maxima of generalized cross-correlation functions (the basic cross-correlation function, smoothed coherence transform, the phase transform (PHAT) and maximum-likelihood (ML) weighing) have been analyzed. The effect of various signals and system parameters on the studied response was estimated. In general, the largest random errors occur when using PHAT, the smallest for the ML-weighting. It is shown that under proper use of modified frequency weighting functions they can be significantly reduced.