

УДК 551.510

# Метод измерения характеристик турбулентности по наблюдениям дрожания астрономических изображений на борту самолета.

## Часть 1. Основные эргодические теоремы

В.В. Носов, В.П. Лукин\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 13.03.2013 г.

Исследованы аспекты построения статистических характеристик случайных функций для дискретно-непрерывного осреднения, соответствующего конечному времени отклика измерителя. При таком осреднении, обычно реализующемся на практике, любая дискретная последовательность эмпирических значений случайной функции является частично осредненной по некоторому интервалу изменения аргумента. Получены оценки скорости сходимости дисперсии отклонения среднего по времени от среднего по ансамблю (обобщения эргодической теоремы Тейлора), обеспечивающие сходимость по вероятности. Показано, что скорость сходимости зависит от интегральных масштабов корреляции случайной функции, которые определяются типом осреднения, фактически различаясь для непрерывного, дискретного и дискретно-непрерывного осреднения. Установлены связи между масштабами. Получено уравнение, связывающее корреляционные функции неосредненного и частично осредненного случайного процессов. Установлено, что функцию корреляции неосредненного процесса можно удовлетворительно восстанавливать из частично осредненных данных, даже при больших интервалах частичного осреднения.

*Ключевые слова:* статистические характеристики, случайные функции, осреднение, эргодическая теорема; *statistical characteristics, random functions, averaging, the ergodic theorem.*

### Введение

Актуальной проблемой настоящего времени являются разработка методов и вывод основных теоретических соотношений, необходимых для обеспечения измерений характеристик турбулентности по наблюдениям дрожания астрономических изображений с борта движущегося носителя (летающего самолета). Для этого необходимо исследовать некоторые аспекты построения статистических характеристик случайных функций для различных типов осреднения, которые применяются на практике. Известные методы не позволяют регистрировать интегральное значение интенсивности турбулентности (интеграл вдоль оптической трассы от структурной характеристики флуктуаций показателя преломления  $C_n^2$ ).

В качестве регистрирующих устройств предлагается использовать два типа оптических приемников: моностатический и бистатический (или дифференциальный). Моностатический приемник представляет собой обычный приемный телескоп, в фокусе которого формируется изображение астрономического источника. При измерениях дрожания изображений

выходной сигнал моностатического приемника пропорционален смещению изображения в фокальной плоскости телескопа. Бистатический фотоприемник состоит из двух моностатических каналов, разнесенных в поперечной к оптической трассе плоскости. В каждом приемном канале измеряются случайные координаты изображений астрономических источников. Возможна ситуация, когда оба канала настроены на один источник. В бистатическом (дифференциальном) приемнике сигнал пропорционален разности смещений изображений, которые возникают в каждом моностатическом приемнике. В отличие от моностатического приемника дифференциальный приемник подавляет низкие пространственные частоты (менее величины, обратной к поперечному разному обоих каналов). Вследствие этого измерения устойчивы к ошибкам, связанным с вибрациями самолета.

Настоящая статья разделена на две части. В первой части доказаны основные эргодические теоремы, позволяющие применять на практике приемники с конечным временем отклика (с дискретно-непрерывным осреднением исходных данных). Эти теоремы обобщают эргодическую теорему Тейлора и дают оценки скорости сходимости временных средних к среднему по ансамблю. Показано, что скорость сходимости зависит от интегральных масштабов

\* Виктор Викторович Носов (nosov@iao.ru); Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru).

корреляции случайной функции (разных для каждого типа осреднения). Установлено, что функцию корреляции неосредненного процесса можно удовлетворительно восстанавливать из частично осредненных данных, даже при большом времени отклика используемой аппаратуры.

Во второй части приведены основные теоретические соотношения, необходимые в методе измерения характеристик турбулентности по наблюдениям дрожания астрономических изображений с борта летящего самолета, и выполнено последовательное сравнение моностатического и дифференциального приемников.

## 1. Дискретно-непрерывное осреднение в эргодической теореме Тейлора

Как известно, для измерения статистических характеристик нужно выполнить осреднение по ансамблю реализаций случайного процесса. Для этого необходимо иметь достаточно большую совокупность реализаций, полученных в одинаковых условиях. На практике, однако, получить такую совокупность сложно. Поэтому осреднить по ансамблю чаще всего не удается. На практике статистические характеристики случайных функций обычно получают осреднением по некоторой области изменения аргумента (по времени) – в пределах одной реализации. Чтобы выполнить такое осреднение, можно использовать эргодическую теорему Тейлора [1].

Эргодическую теорему Тейлора можно рассматривать как одну из предельных теорем математической статистики (см. [2, 3]). С увеличением размера выборки эмпирическое среднее по времени сходится по вероятности к среднему по ансамблю (более строго, стационарный процесс будет эргодическим, если вероятность каждого стационарного его подмножества равна 0 или 1). В то же время скорость сходимости зависит от используемого типа осреднения. Оценки скорости сходимости представляют практический интерес. В особенности они необходимы при использовании эргодической теоремы для случайных процессов с малым временем корреляции. Такими процессами обычно являются процессы со слабой памятью о предыстории (или с полным отсутствием такой памяти), например марковские дельта-коррелированные, броуновские и т.д.

Пусть  $u(t)$  – случайная функция (случайный процесс), для которой мы хотим получить среднее значение путем осреднения по времени. Под  $u$  мы можем подразумевать как саму случайную функцию  $f(t)$ , так и ее квадрат, произведение  $f(t)f(t + \tau)$  при фиксированном сдвиге  $\tau$ . Будем считать, что  $u(t)$  – действительный стационарный случайный процесс с известной корреляционной функцией вида

$$B_u(t_1 - t_2) = \langle [u(t_1) - \langle u \rangle] [u(t_2) - \langle u \rangle] \rangle.$$

Вследствие стационарности среднее значение функции  $u(t)$  по ансамблю постоянно,  $\langle u \rangle = \text{const}$ ,

а корреляционная функция действительного процесса четна, т.е.  $B_u(-t) = B_u(t)$ .

Далее рассмотрим различные возможные типы осреднения по времени.

### 1.1. Непрерывное осреднение за интервал изменения аргумента длиной $T$

Для каждого значения аргумента  $t$  среднее по времени значение  $\bar{u}_C$  случайной функции  $u(t)$  за интервал  $T$  при непрерывном осреднении обычно определяется формулой

$$\bar{u}_C(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau+t) d\tau. \quad (1)$$

Эта величина, так же как и  $u$ , является случайной. При повторном определении  $\bar{u}$  по различным участкам аргумента функции  $u(t)$  в общем случае будут получаться отличающиеся значения непрерывного среднего  $\bar{u}_C(t)$ . Схема непрерывного осреднения, в результате которого получается величина  $\bar{u}_C(t)$ , приведена на рис. 1.

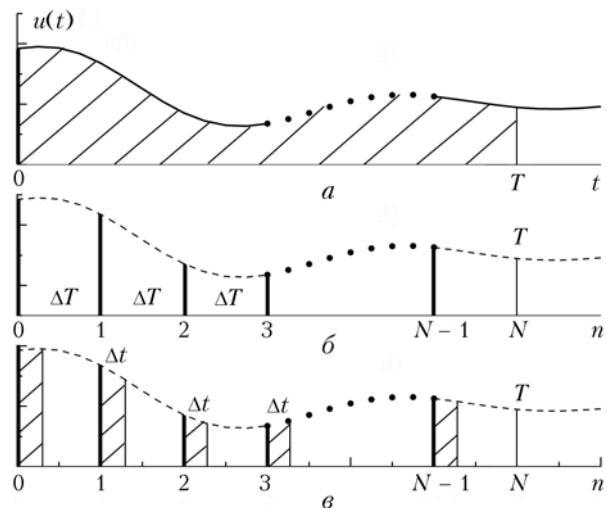


Рис. 1. Схемы процессов осреднения случайной функции  $u(t)$  (схемы получения осредненных величин):  $a$  – непрерывное осреднение;  $b$  – дискретное осреднение;  $v$  – дискретно-непрерывное осреднение

### 1.2. Дискретное осреднение за интервал изменения аргумента длиной $T$

Временной интервал  $T$  разбивается на  $N$  участков, имеющих длину  $\Delta T$ , таких что  $T = N\Delta T$ . Дискретное осреднение по времени обычно определяется в виде среднего арифметического значений функции  $u(n\Delta T)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , на начальных границах каждого интервала дискретизации  $\Delta T$  (для дискретной последовательности значений аргумента):

$$\bar{u}_D(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n\Delta T + t), \quad N\Delta T = T. \quad (2)$$

Дискретное среднее  $\bar{u}_D(t)$  от случайной функции  $u(t)$ , так же как и  $u$ , является случайным. В связи с быстрым развитием цифровых вычислительных средств на практике обычно применяется дискретное осреднение. Схема дискретного осреднения, в результате которого получается величина  $\bar{u}_D(t)$ , приведена на рис. 1.

### 1.3. Дискретно-непрерывное осреднение за интервал изменения аргумента длиной $T$ (частичное непрерывное осреднение каждого значения дискретной последовательности)

Так же, как и в случае дискретного осреднения, временной интервал  $T$  разбивается на  $N$  участков, имеющих длину  $\Delta T$ , таких что  $T = N\Delta T$ . Однако вместо точечных значений функции  $u(n\Delta T)$  рассматриваются значения функции  $u(t)$  на начальных границах каждого интервала, предварительно непрерывно осредненные по времени за некоторый интервал  $\Delta t$ , меньший чем  $\Delta T$ ,  $\Delta t \leq \Delta T$ . Тогда дискретно-непрерывное среднее  $\bar{u}_{DC}(t)$  от случайной функции  $u(t)$ , в соответствии с выражениями (2) и (3), можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{DC}(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta T}^{n\Delta T + \Delta t} u(\tau + t) d\tau = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' u(t' + n\Delta T + t). \end{aligned} \quad (3)$$

Как видно из выражений (2) и (3), дискретно-непрерывное осреднение случайного процесса  $u(t)$  одновременно является дискретным осреднением случайного процесса  $f(t)$ . Этот процесс  $f(t)$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt u(\tau) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt u(\tau + t), \\ B_f(\tau) &= \langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_0^{\Delta t} dx' \int_0^{\Delta t} dx'' B_u(x' - x'' - \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, тогда

$$\bar{u}_{DC}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta T + t).$$

Процесс  $f(t)$  является результатом частичного осреднения (на длине  $\Delta t$ ) процесса  $u(t)$ .

Дискретно-непрерывное осреднение является более общим понятием, чем дискретное или непрерывное. Так как длина интервала непрерывного осреднения меньше длины дискретизации  $\Delta T$ , то при  $\Delta t \rightarrow \Delta T$  из выражения (4) получаем определение непрерывного среднего (1), а при  $\Delta t \rightarrow 0$  – определение дискретного среднего (2). Дискретно-непрерывное среднее  $\bar{u}_{DC}(t)$  от случайной функции  $u(t)$ , так же как и  $u$ , является случайным.

Схема дискретно-непрерывного осреднения, в результате которого получается величина  $\bar{u}_{DC}(t)$ , приведена на рис. 1.

На практике для построения статистических характеристик случайных функций обычно применяется дискретное осреднение. В то же время необходимо учитывать, что любая дискретная последовательность эмпирических значений случайной функции  $u(n\Delta T)$  является частично осредненной по некоторому временному интервалу  $\Delta t$ . Ясно, что если длина интервала частичного осреднения  $\Delta t$  не превышает характерных масштабов функции  $u(t)$  (например, минимального радиуса или времени корреляции), то влиянием частичного осреднения можно пренебречь. Противоположный случай требует дополнительного исследования. При больших интервалах частичного осреднения для построения статистических характеристик необходимо решить задачу их восстановления из сильно осредненных экспериментальных данных. Чаще всего такие задачи приходится решать в случае процессов с малым временем корреляции, когда (вследствие недостаточного разрешения аппаратуры, со временем отклика  $\Delta t$ ) трудно получить точное значение случайной функции, соответствующее точечному дискретному аргументу. Отметим, что в определениях (1)–(4) можно рассматривать централизованные случайные функции  $u(t) - \langle u \rangle$ .

## 2. Эргодическая теорема Тейлора для различных типов осреднения

В этом разделе прежде всего дадим формулировки эргодической теоремы для рассмотренных типов осреднения. Для непрерывного и дискретного осреднений эти доказательства известны. Они приводятся здесь для связности изложения и как основа (аналогия) для последующего доказательства эргодической теоремы в интересующем нас случае дискретно-непрерывного осреднения. В общем случае эргодическая теорема сводится к оценкам скорости сходимости дисперсии отклонения среднего значения по времени от среднего по ансамблю. Из сходимости такой дисперсии к нулю при увеличении интервала осреднения  $T$  следует сходимость в среднем, которая влечет за собой сходимость по вероятности.

### 2.1. Непрерывное осреднение

Рассмотрим средний квадрат разности между непрерывным средним по времени  $\bar{u}_C(t)$  и средним по ансамблю  $\langle u \rangle$ :

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_C = \langle [\bar{u}_C(t) - \langle u \rangle]^2 \rangle. \quad (5)$$

Подставляя сюда выражение для  $\bar{u}_C$ , получим

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_C = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B_u(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T dt \int_0^t B_u(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Докажем теперь, что при выполнении условия

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B_u(\tau) d\tau = 0 \quad (7)$$

будет выполняться соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_u^2|_C = 0 \quad (8)$$

(см. [1, 4, 5]). Действительно, из (7) следует, что для любого  $\delta/2 > 0$  найдется такое  $T_0$ , при котором

$$\left| \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| < \frac{\delta t}{2} \text{ при } t > T_0.$$

С другой стороны, для любого  $t$  имеет место неравенство

$$\left| \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| < B_u(0)t,$$

так как  $B_u(0) \geq B_u(t)$ . Таким образом,

$$\left| \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| < \begin{cases} B_u(0)t & \text{при } t < T_0, \\ \frac{\delta}{2}t & \text{при } t > T_0. \end{cases} \quad (9)$$

Интегрируя это неравенство в пределах  $(0, T)$ , где  $T > T_0$ , получим

$$\left| \int_0^T dt \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| \leq \frac{B_u(0)T_0^2}{2} + \frac{\delta}{4}(T^2 - T_0^2).$$

Если  $T > T_0 \sqrt{2B_u(0)/\delta}$ , то первое слагаемое в правой части не превышает второго, а их сумма (как и сумма всех трех слагаемых) не больше  $\delta T^2/2$ . Отсюда следует неравенство

$$\left| \int_0^T dt \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\delta}{2}T^2,$$

из которого, с учетом (6), вытекает соотношение (8). Таким образом, условие (7) обеспечивает возможность замены статистических средних на средние по времени.

Если существует интеграл от корреляционной функции, определяющий интегральный масштаб корреляции  $r_C$  случайной функции  $u(t)$  при непрерывном осреднении (непрерывный масштаб  $r_C$ ):

$$r_C = \frac{1}{B_u(0)} \int_0^\infty B_u(\tau) d\tau < \infty, \quad (10)$$

то условие (7) всегда выполняется. В этом случае можно дать простую оценку дисперсии отклонения среднего по времени от среднего по ансамблю. Производя в выражении для  $\sigma_u^2$  замену порядка интегрирования по переменным  $t$  и  $\tau$ , а также выполняя интегрирование по  $t$ , получим

$$\sigma_u^2|_C = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_u(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Если  $T \gg r_C$ , то вторым слагаемым в скобках можно пренебречь по сравнению с единицей, а интеграл от первого слагаемого выразить через  $r_C$ . В результате получаем приближенную формулу

$$\sigma_u^2|_C \approx \frac{2B_u(0)r_C}{T}. \quad (12)$$

Этой формулой удобно пользоваться для выбора необходимого интервала осреднения, исходя из заданной точности.

Оценки величины непрерывного масштаба  $r_C$ , присутствующего в (12), на практике обычно не вызывают больших затруднений. Для атмосферных случайных процессов непрерывный интегральный пространственный масштаб корреляции, как правило, совпадает с внешним масштабом турбулентности. Временной же непрерывный интегральный масштаб  $r_C$  есть результат деления внешнего масштаба на среднюю скорость ветра (течения). Методы оценки размеров внешнего масштаба турбулентности дает, например, теория подобия Монина—Обухова [4, 5]. Различные методы измерений внешнего масштаба рассмотрены также в наших работах [6–10]. Оценку внешнего масштаба [и следовательно, непрерывного масштаба  $r_C$  в формуле (12)] можно дать также путем измерения эффективного внешнего масштаба турбулентности для атмосферы в целом [6].

Формула (12) была получена Тейлором [1] при построении теории турбулентной диффузии. Эта формула, впервые установленная для непрерывного осреднения, является основой эргодической теоремы [1, 4, 5]. Она дает оценку скорости сходимости среднего по времени к среднему по ансамблю. Из сходимости дисперсии  $\sigma_u^2|_C$  к нулю при  $T \rightarrow \infty$  следует сходимость в среднем, из которой вытекает сходимость по вероятности.

## 2.2. Дискретное осреднение

Рассмотрим средний квадрат разности между дискретным средним по времени  $\bar{u}_D(t)$  и средним по ансамблю  $\langle u \rangle$ :

$$\sigma_u^2|_D = \langle [\bar{u}_D(t) - \langle u \rangle]^2 \rangle. \quad (13)$$

Подставляя сюда выражение для  $\bar{u}_D(t)$ , получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sigma_u^2|_D &= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} B_u((n-n')\Delta T) = \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=n-(N-1)}^n B_u(p\Delta T) = \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{p=0}^n B_u(p\Delta T) + \sum_{p=1}^n B_u(-p\Delta T) \right] = \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{B_u(0)}{2} + \sum_{p=1}^n B_u(p\Delta T) \right] = \frac{2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^n B_u'(p\Delta T). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned} \sum_{p=n-(N-1)}^n B_u(p\Delta T) &= \sum_{p=0}^n B_u(p\Delta T) + \sum_{p=n-(N-1)}^{-1} B_u(p\Delta T), \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=n-(N-1)}^{-1} B_u(p\Delta T) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=1}^{(N-1)-n} B_u(-p\Delta T) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=1}^n B_u(-p\Delta T), \end{aligned}$$

использована четность функции  $B_u(p\Delta T)$  и введено обозначение

$$B_u'(p\Delta T) = B_u(p\Delta T), \quad p > 0; \quad B_u'(0) = B_u(0)/2, \quad p = 0.$$

Докажем теперь, что при выполнении условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} B_u'(n\Delta T) = 0 \quad (15)$$

будет выполняться соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{u}}^2|_D = 0. \quad (16)$$

Действительно, из (15) следует, что для любого  $\delta/2 > 0$  найдется такое  $N_0 > 0$  (зависящее от  $\delta$ ), при котором

$$\left| \sum_{n'=0}^n B_u'(n'\Delta T) \right| < n \frac{\delta}{2}, \quad \text{когда } n > N_0.$$

С другой стороны, для любого  $n$  имеет место нера-

венство  $\left| \sum_{p=0}^n B_u'(p\Delta T) \right| < B_u(0)(n+1)$ , так как

$B_u(0) = 2B_u'(0) \geq B_u'(t)$ . Таким образом, просуммировав эти неравенства по  $n$ , имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^n B_u'(n'\Delta T) \right| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{n'=0}^n B_u'(n'\Delta T) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \begin{cases} n \frac{\delta}{2}, & N > N_0, \\ B_u(0)(n+1), & N \leq N_0 \end{cases} = B_u(0) \sum_{n=0}^{N_0} (n+1) + \frac{\delta}{2} \sum_{n=N_0+1}^{N-1} n, \end{aligned}$$

где можно считать, что  $N-1 \geq N_0+1$ . Вычисляя имеющиеся здесь суммы, получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^n B_u'(n'\Delta T) \right| &\leq \frac{C_0}{2} + \frac{\delta}{4} N^2 - \frac{\delta}{4} [N_0(1+N_0) + N], \\ C_0 &= B_u(0)(N_0+1)(N_0+2). \quad (17) \end{aligned}$$

Если  $N$  достаточно велико, например,  $N > \sqrt{2C_0/\delta}$ , то первое слагаемое в правой части неравенства (17) не превышает второго, а их сумма (как и сумма всех трех слагаемых в правой части) не больше  $\delta N^2/2$ . Таким образом, из (17) следует неравенство

$$\frac{2}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^n B_u'(p\Delta T) \right| < \delta,$$

из которого, с учетом (14), вытекает соотношение (16). Таким образом, условие (15) обеспечивает возможность замены статистических средних на дискретные средние по времени.

Если существует бесконечная сумма, определяющая интегральный масштаб корреляции  $r_D$  случайной функции  $u(t)$  при дискретном осреднении (дискретный масштаб  $r_D$ ):

$$r_D = \frac{\Delta T}{B_u(0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_u'(n\Delta T) < \infty, \quad (18)$$

то условие (15) всегда выполняется. В этом случае можно дать простую оценку дисперсии отклонения дискретного среднего по времени от среднего по ансамблю. Производя в выражении (14) для  $\sigma_{\bar{u}}^2|_D$  замену порядка суммирования по переменным  $n$  и  $p$  и выполняя суммирование по  $n$ , получим

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_D = \frac{2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^n B_u'(p\Delta T) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} B_u'(n\Delta T) \left(1 - \frac{n}{N}\right). \quad (19)$$

В случае, если  $T = N\Delta T \gg r_D$ , вторым слагаемым в скобках можно пренебречь по сравнению с единицей, а сумму от первого слагаемого выразить через  $r_D$ . В результате получаем приближенную формулу для дискретного осреднения

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_D \approx \frac{2r_D B_u(0)}{N\Delta T}. \quad (20)$$

Формулой (20) можно пользоваться для выбора необходимого интервала осреднения при заданной точности, если известна величина дискретного масштаба корреляции  $r_D$ . Масштаб  $r_D$  можно выразить через более просто оцениваемый масштаб  $r_C$  (см. ниже, разд. 3). Сравнивая формулы (20) и (12) при  $N\Delta T = T$ , легко видеть, что они отличаются только величинами интегральных масштабов корреляции [ $r_D$  в (20) и  $r_C$  в (12)].

### 2.3. Дискретно-непрерывное осреднение

Рассмотрим средний квадрат разности между дискретно-непрерывным средним по времени  $\bar{u}_{DC}(t)$  и средним по ансамблю  $\langle u \rangle$ :

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC} = \langle [\bar{u}_{DC}(t) - \langle u \rangle]^2 \rangle.$$

Подставляя сюда выражение для  $\bar{u}_{DC}$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{u}}^2|_{DC} &= \frac{1}{N^2(\Delta t)^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' B_u(t' - t'' + (n - n')\Delta T) = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} B_f((n - n')\Delta T), \quad (21) \end{aligned}$$

$$B_f((n - n')\Delta T) = \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' B_u(t' - t'' + (n - n')\Delta T).$$

Вычисляя сумму в правой части (21), запишем  $\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC}$  в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC} &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} B_f((n-n')\Delta T) = \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{B_f(0)}{2} + \sum_{p=1}^n \frac{B_f(p\Delta T) + B_f(-p\Delta T)}{2} \right].\end{aligned}$$

Учитывая четность функции  $B_f(x)$ ,  $B_f(x) = B_f(-x)$ , и вводя функцию

$$\begin{aligned}B_f'(p\Delta T) &= B_f(p\Delta T), \quad p > 0; \\ B_f'(0) &= B_f(0)/2, \quad p = 0,\end{aligned}\quad (22)$$

находим

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC} = \frac{2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{B_f(0)}{2} + \sum_{p=1}^n B_f(p\Delta T) \right] = \frac{2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^n B_f'(p\Delta T). \quad (23)$$

Выражения (21), (23) для дисперсии  $\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC}$  совпадают с выражением (14) для  $\sigma_{\bar{u}}^2|_D$ , если в (14) заменить функцию  $B_u(t)$  на функцию  $B_f(t)$ . Следовательно, если будет выполняться условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} B_f'(n\Delta T) = 0, \quad (24)$$

тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{u}}^2|_{DC} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, условие (24) обеспечивает возможность замены статистических средних на дискретно-непрерывные средние по времени.

Если существует сумма, определяющая интегральный масштаб корреляции  $r_{DC}$  случайной функции  $u(t)$  при дискретно-непрерывном осреднении (дискретно-непрерывный масштаб  $r_{DC}$ )

$$r_{DC} = \frac{\Delta T}{B_u(0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_f'(n\Delta T), \quad (26)$$

то условие (24) всегда выполняется. В этом случае можно дать простую оценку дисперсии отклонения дискретно-непрерывного среднего по времени от среднего по ансамблю. Производя в выражении (23) для  $\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC}$  замену порядка суммирования и выполняя суммирование, получим

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} B_f'(p\Delta T) \left(1 - \frac{n}{N}\right). \quad (27)$$

В случае, если  $T = N\Delta T \gg r_{DC}$ , вторым слагаемым в скобках можно пренебречь по сравнению с единицей, а сумму от первого слагаемого выразить

через  $r_{DC}$ . В результате получаем приближенную формулу для дискретно-непрерывного осреднения

$$\sigma_{\bar{u}}^2|_{DC} \approx \frac{2}{N} \frac{r_{DC} B_u(0)}{\Delta T}, \quad N\Delta T = T. \quad (28)$$

Формулой (28) также можно пользоваться для выбора необходимого интервала осреднения при заданной точности, если известна величина дискретно-непрерывного масштаба  $r_{DC}$ . Масштаб  $r_{DC}$  можно выразить через непрерывный масштаб  $r_C$  (см. разд. 3). Сравнение формул (28), (20) и (12) показывает, что при  $N\Delta T = T$  они отличаются только величинами интегральных масштабов корреляции [ $r_{DC}$  в (28),  $r_D$  в (20) и  $r_C$  в (12)]. Эти масштабы определяются типом осреднения и в общем случае отличаются друг от друга.

### 3. Связи между интегральными масштабами корреляции для различных типов осреднения

Результаты, приведенные в разд. 2, показывают, что оценки скорости сходимости средних по времени к среднему по ансамблю зависят от интегральных масштабов корреляции случайной функции  $u(t)$ . Эти масштабы определяются типом осреднения и в общем случае отличаются друг от друга. Установим далее связи между ними.

#### 3.1. Связь между непрерывным и дискретным масштабами $r_C$ , $r_D$

Запишем выражение для  $r_D$  в виде

$$r_D = \frac{\Delta T}{B_u(0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_u'(n\Delta T) = \frac{\Delta T}{2} + \frac{\Delta T}{B_u(0)} \sum_{n=1}^{\infty} B_u(n\Delta T). \quad (29)$$

Распространяя суммирование на отрицательную область  $n$  и учитывая четность  $B_u$ , имеем

$$r_D = \frac{\Delta T}{2} + \frac{\Delta T}{B_u(0)} \sum_{n=-\infty}^{-1} B_u(n\Delta T). \quad (30)$$

Следовательно, для всего диапазона изменения индекса суммирования ( $n = -\infty, \dots, 0, \dots, +\infty$ )

$$r_D = \frac{\Delta T}{2B_u(0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_u(n\Delta T). \quad (31)$$

Отсюда видно, что если интервал дискретизации  $\Delta T$  существенно меньше, чем минимальный масштаб корреляции функции  $u(t)$  ( $\Delta T \ll r_{C\min}$ ), то в (31) сумма может быть без заметной погрешности заменена на интеграл. Следовательно, из сравнения  $r_D$  (31) с масштабом  $r_C$  (10) следует, что  $r_D = r_C$  при  $\Delta T \ll r_{C\min}$ .

В противоположном случае больших интервалов  $\Delta T$  перейдем в частотную область с помощью преобразования Фурье

$$B_u(\tau) = \int e^{i\omega\tau} W(\omega) d\omega, \quad (32)$$

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega\tau} B_u(\tau) d\tau. \quad (32a)$$

Предварительно преобразуем интеграл в  $r_C$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_u(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} d\tau B_u(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\Delta T} dt B_u(t + n\Delta T) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k B_u(t + n\Delta T)}{\partial t^k} \right]_{t=0} \frac{(\Delta T)^{k+1}}{k+1}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались разложением функции  $B_u$  в ее ряд Тейлора

$$B_u(x + x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \left[ \frac{\partial^k B_u(x + x_0)}{\partial x^k} \right]_{x=0}.$$

Применяя соотношение (32), находим

$$\begin{aligned} (r_C - r_D)2B_u(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau B_u(\tau) - \Delta T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_u(n\Delta T) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega W(\omega) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta T^{k+1}}{(k+1)k!} (i\omega)^k - \Delta T \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\Delta T n} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta T^{k+1}}{(k+1)k!} \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{2\pi n}{\Delta T}\right) \left( i \frac{2\pi n}{\Delta T} \right)^k. \quad (33) \end{aligned}$$

В этом выражении использовано известное соотношение теории обобщенных функций [11]:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ikx} = \sum_k \delta(x - 2\pi k),$$

$$\sum_n e^{in(\omega\Delta T)} = 2\pi \sum_n \delta(\omega\Delta T - 2\pi n) = \frac{2\pi}{\Delta T} \sum_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta T} n\right).$$

Из (33) видно, что если интервал дискретизации  $2\pi/\Delta T$  существенно меньше, чем минимальный масштаб изменения спектра  $W(\omega)$  ( $2\pi/\Delta T \ll r_{W\min}$ ), то сумма в выражении (33) может быть без заметной погрешности заменена на интеграл. Минимальный масштаб изменения спектра  $r_{W\min}$  связан с максимальным масштабом корреляции  $r_{C\max}$  самой случайной функции  $u(t)$  соотношением  $r_{W\min} r_{C\max} = 2\pi$  [4, 5]. Отсюда находим, что если  $2\pi/\Delta T \ll r_{W\min} = 2\pi/r_{C\max}$ , то  $r_{C\max} \ll \Delta T$ . Таким образом, в (33)

$$\frac{2\pi}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{2\pi n}{\Delta T}\right) \left( i \frac{2\pi n}{\Delta T} \right)^k \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega W(\omega) (i\omega)^k,$$

$$r_{C\max} \ll \Delta T.$$

Используя вновь разложение функции  $B_u$  в ряд Тейлора, имеем из (33)

$$\begin{aligned} [2(r_C - r_D) + \Delta T]B_u(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta T^{k+1}}{(k+1)k!} \left[ \frac{\partial^k B_u(t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \\ &= \int_0^{\Delta T} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k B_u(t)}{\partial t^k} \right]_{t=0} = \int_0^{\Delta T} dt B_u(t), \end{aligned}$$

или

$$r_D = r_C + \frac{\Delta T}{2} - \frac{1}{2B_u(0)} \int_0^{\Delta T} dt B_u(t).$$

Последнее слагаемое здесь при  $r_{C\max} \ll \Delta T$  с незначительной погрешностью может быть заменено на  $r_C/2$ . В итоге получаем

$$r_D \approx r_C, \quad \Delta T \ll r_{C\min},$$

$$r_D \approx (r_C + \Delta T)/2, \quad \Delta T \gg r_{C\max}.$$

Для одномасштабных корреляционных функций  $B_u(\tau)$  обычно  $r_{C\min} = r_{C\max} \approx r_C$ . Для наиболее распространенных в физике двухмасштабных функций  $B_u(\tau)$ , модель которых будет приведена в разд. 4, предыдущие неравенства можно усилить:

$$\Delta T \ll r_{C\min} \leq r_C, \quad \Delta T \gg r_{C\max} \geq r_C.$$

В результате находим следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} r_D &\approx r_C, \quad r_C \gg \Delta T, \\ r_D &\approx \Delta T/2, \quad r_C \ll \Delta T. \end{aligned} \quad (34)$$

Схематические графики выражений (34) приведены на рис. 2.

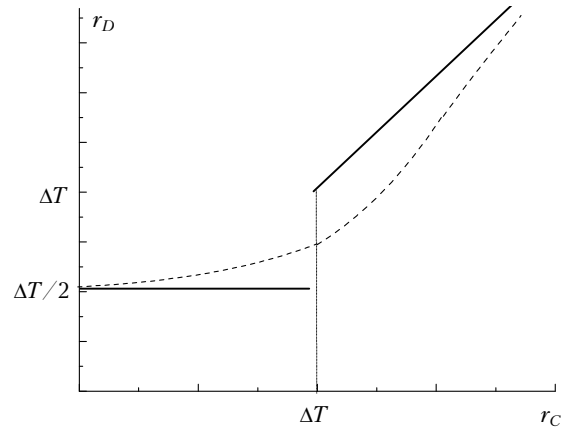


Рис. 2. Схематическая зависимость дискретного масштаба корреляции  $r_D$  случайной функции  $u(t)$  от непрерывного  $r_C$ . Прямые линии — асимптотики (34). Штриховая линия — приблизительное положение точной зависимости  $r_D(r_C)$

Как видно из (34) и рис. 2, при масштабах корреляции  $r_C$ , заметно больших интервала дискретизации  $\Delta T$  ( $r_C \gg \Delta T$ ), дискретный и непрерывный масштабы совпадают. С уменьшением непрерывного масштаба ( $r_C \ll \Delta T$ ) дискретный масштаб становится

равным  $\Delta T/2$ . Этот результат обобщает теорему эргодичности на случай дискретного осреднения и уточняет пределы ее применимости.

### 3.2. Связь между непрерывным и дискретно-непрерывным масштабами $r_C, r_{DC}$

Связь между непрерывным  $r_C$  и дискретно-непрерывным  $r_{DC}$  масштабами может быть легко получена из выражений (34). Действительно, рассмотрим величины

$$R_D = \frac{\Delta T}{B_f(0)} \sum_{n=0}^{\infty} B_f'(n\Delta T), \quad R_C = \frac{1}{B_f(0)} \int_0^{\infty} d\tau B_f(\tau),$$

где функции  $B_f(x)$  и  $B_f'(x)$  определены формулами (4), (22). Сравнивая эти величины с определениями (10), (18) масштабов  $r_C$  и  $r_D$ , видим, что если в  $R_D$  и  $R_C$  заменить функцию  $B_f(\tau)$  на функцию  $B_u(\tau)$ , то  $R_D = r_D$  и  $R_C = r_C$ . Так как функция  $B_f(\tau)$  является результатом частичного осреднения (по интервалу  $\Delta t$ ) корреляционной функции  $B_u(\tau)$ , то  $B_f(\tau)$  будет также корреляционной функцией (как видно из (4),  $B_f(\tau) \approx B_u(\tau)$  при  $\tau \geq \Delta t$  и  $B_f(\tau) = B_u(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ). Поэтому между  $R_D$  и  $R_C$  имеется такая же связь, как и между  $r_C$  и  $r_D$ . Из выражений (34) находим:  $R_D = R_C$  при  $R_C \gg \Delta T$ ,  $R_D = \Delta T/2$  при  $R_C \ll \Delta T$ .

Используя далее определение (4) функции  $B_f(\tau)$ , устанавливаем, что

$$\int_0^{\infty} d\tau B_f(\tau) = \int_0^{\infty} d\tau B_u(\tau).$$

Таким образом, из формул (10), (26) для масштабов  $r_C$  и  $r_{DC}$  следует:  $R_D = \lambda r_{DC}$ ,  $R_C = \lambda r_C$ , где  $\lambda = B_u(0)/B_f(0)$ . Тогда  $r_{DC} = r_C$  при  $r_C \gg \Delta T/\lambda$  и  $r_{DC} = \Delta T/(2\lambda)$  при  $r_C \ll \Delta T/\lambda$ .

Из (4) можно видеть, что  $B_f(0) \approx B_u(0)$  при  $\Delta t \ll r_{Cmin} \leq r_C$  и  $B_f(0) \approx 2 r_C B_u(0)/\Delta t$  при  $\Delta t \gg r_{Cmax} \geq r_C$ . Поэтому для величины  $\lambda$  имеем:  $\lambda \approx \Delta t/(2r_C)$  при  $\Delta t \gg r_C$  и  $\lambda \approx 1$  при  $\Delta t \ll r_C$ . Подставляя эти выражения в отношении  $\Delta T/\lambda$ , окончательно получаем (при  $\Delta t \leq \Delta T$ )

$$\begin{aligned} r_{DC} &\approx r_C, \quad r_C \gg \Delta T \geq \Delta t, \\ r_{DC} &\approx \Delta T/2, \quad \Delta t \ll r_C \ll \Delta T, \\ r_{DC} &\approx r_C \Delta T/\Delta t, \quad r_C \ll \Delta t \leq \Delta T. \end{aligned} \quad (35)$$

Схематические графики этих асимптотических выражений приведены на рис. 3.

Как видно из (35) и рис. 3, при масштабах корреляции  $r_C$ , заметно больших интервала дискретизации  $\Delta T$ , дискретно-непрерывный и непрерывный масштабы совпадают. С уменьшением непрерывного масштаба (при  $r_C \ll \Delta T$ ) дискретно-непрерывный масштаб вначале становится равным  $\Delta T/2$ , что совпадает со значением дискретного масштаба.

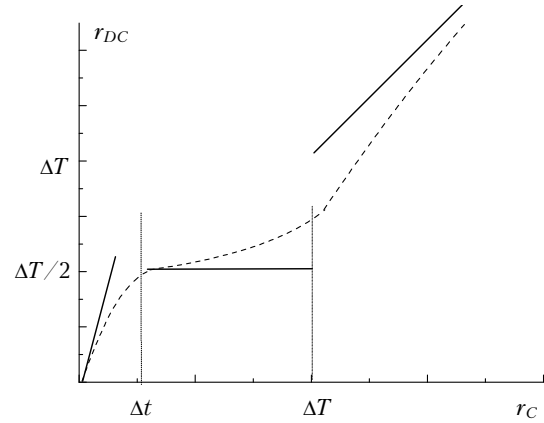


Рис. 3. Схематическая зависимость дискретно-непрерывного масштаба корреляции  $r_{DC}$  случайной функции  $u(t)$  от непрерывного  $r_C$ . Прямые линии – асимптотики (35). Штриховая линия – приблизительное положение точной зависимости  $r_{DC}(r_C)$

При дальнейшем уменьшении непрерывного масштаба (при  $r_C \ll \Delta t$ ) дискретно-непрерывный оказывается быстро убывающей функцией от непрерывного (так как  $\Delta T \geq \Delta t$ ). В целом, когда интервал частичного осреднения значительно меньше интервала дискретизации ( $\Delta t \ll \Delta T$ ), дискретно-непрерывный масштаб оказывается нелинейной убывающей функцией от непрерывного (при уменьшении  $r_C$ ). Если же частичное осреднение достаточно велико, так что  $\Delta t \rightarrow \Delta T$ , то вторая асимптотика в (35) вырождается и везде  $r_{DC} \approx r_C$ . Полученный результат также обобщает теорему эргодичности (на случай дискретно-непрерывного осреднения) и уточняет пределы ее применимости.

## 4. Некоторые результаты восстановления неосредненной корреляционной функции из частично осредненных эмпирических данных

Приведем результаты восстановления параметров достаточно произвольной корреляционной функции при частичном осреднении эмпирических данных (ненулевое время отклика измерителя,  $\Delta t \neq 0$ ). Наибольший интерес здесь представляет значительное частичное осреднение, когда интервал частичного осреднения  $\Delta t$  (время отклика аппаратуры) превышает минимальный радиус корреляции процесса  $u(t)$ . Тогда результаты восстановления параметров корреляционных функций можно использовать при исследовании свойств случайных процессов с малым временем корреляции. Как уже указывалось, к таким процессам относятся процессы со слабой памятью о предыстории, например марковские дельта-коррелированные, броуновские и т.д.

Уравнение, связывающее корреляционные функции неосредненного и частично осредненного случайных процессов, известно. Оно следует из определения (4) процесса  $f(t)$ , являющегося ре-



зультатом частичного осреднения процесса  $u(t)$ . Выполнив в (4) замену переменных и проинтегрировав по одной из переменных, находим

$$B_f(\tau) = \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_0^{\Delta t} dx' \int_0^{\Delta t} dx'' B_u(x' - x'' - \tau) = \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) [B_u(t + \tau) + B_u(t - \tau)].$$

Отсюда видно, что  $B_f(\tau)$  является четной функцией. Еще раз заменяя переменную, находим окончательно интегральное уравнение

$$B_f(\tau) = \int_0^1 dt (1-t) [B_u(t\Delta t + \tau) + B_u(t\Delta t - \tau)], \quad \Delta t \leq \Delta T. \quad (36)$$

Интегральный оператор в (36) является частотным фильтром, подавляющим высокие частоты в случайном процессе  $u(t)$ . Действительно, вводя спектральную плотность  $W(\omega)$  процесса  $u(t)$  с помощью соотношений (32), (32а), получаем

$$B_f(0) = \int d\omega W(\omega) F(\omega), \quad F(\omega) = \frac{2(1 - \cos\omega\Delta t)}{(\omega\Delta t)^2}.$$

На рис. 4 приведена функция  $F(\omega)$ . Здесь же указана ее аппроксимация гауссоидой. Видно, что происходит существенное подавление высоких частот уже при  $\omega\Delta t \geq 5$ . Таким образом, оказывается, что колебания в случайном процессе  $u(t)$  с периодами меньше  $(2\pi/5)\Delta t$  практически не вносят вклада в частично осредненный процесс [в случайный процесс  $f(t)$ ].

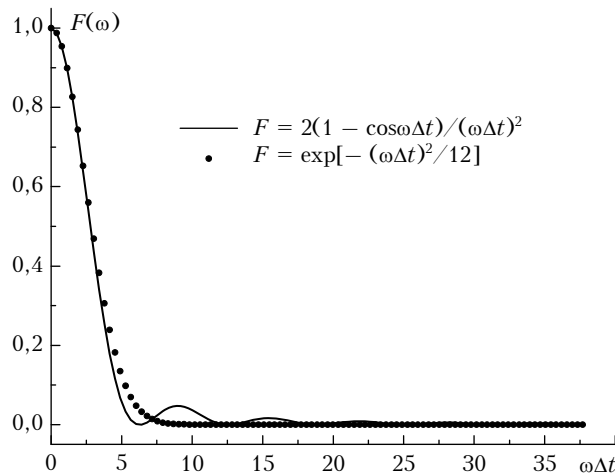


Рис. 4. Частотный фильтр, подавляющий высокие частоты в случайном процессе  $u(t)$  за счет его частичного осреднения

Ниже рассмотрим два различных метода решения уравнения (36), позволяющие находить параметры функции  $B_u(t)$  неосредненного процесса  $u(t)$  по эмпирическим данным (известным с некоторой

погрешностью) для функции  $B_f(t)$  осредненного процесса  $f(t)$ . Предлагаемые методы решения учитывают существенное свойство уравнения (36), заключающееся в совпадении осредненной и неосредненной корреляционных функций при аргументах, превышающих интервал частичного осреднения, т.е.  $B_f(\tau) \approx B_u(\tau)$  при  $\tau \geq \Delta t$ .

Эмпирическая функция  $B_f(t)$  задана, как это обычно бывает на практике, на границах интервалов дискретизации, т.е. при значениях  $t = n\Delta T$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Для дискретно-непрерывного осреднения  $\Delta t \leq \Delta T$ . Однако на практике, когда реакция применяемой аппаратуры недостаточна, обычно уменьшают интервал дискретизации до величины интервала частичного осреднения, так что  $\Delta t = \Delta T$ . Мы также будем полагать это равенство выполненным.

В дальнейшем, с целью упрощения результатов, для корреляционной функции  $B_u(t)$  неосредненного процесса  $u(t)$  воспользуемся ее аппроксимацией [4, 5] в виде двухмасштабной функции

$$B_u(\tau) = B_u(0)b_u(\tau), \quad (37)$$

$$b_u(\tau) = (1 - c_0)\exp(-\tau^2/a_1^2) + c_0\exp(-\tau^2/a_2^2).$$

Здесь  $B_u(0)$  — дисперсия процесса;  $b_u(\tau)$  — коэффициент корреляции;  $a_1, a_2$  — соответственно минимальный и максимальный радиусы (времена) корреляции. Формула (37) описывает корреляционные функции широко распространенных в физике двухмасштабных случайных процессов. При этом, как правило, второй масштаб корреляции значительно превышает первый (часто на порядок и более). То есть обычно можно считать, что  $a_2 \gg a_1$ . Вещественные значения масштабов  $a_1, a_2$  соответствуют убывающим неосциллирующим корреляционным функциям, комплексные — убывающим осциллирующим. Далее, для простоты, считаем масштабы  $a_1, a_2$  вещественными. Положительная постоянная  $c_0$  в (37) находится в интервале  $0 \leq c_0 \leq 1$ . Как правило, ее значение не превышает нескольких десятых, часто можно полагать  $c_0 \ll 1$ . При  $a_1 = a_2$  из формулы (37) получается модель одномасштабной корреляционной функции  $B_u(\tau)$ .

Таким образом, корреляционная функция (37) соответствует распространенным достаточно произвольным случайным процессам. Из (37) легко найти соотношение, связывающее интегральный непрерывный масштаб  $r_C$  и масштабы  $a_1, a_2$ :

$$r_C = [(1 - c_0)a_1 + c_0a_2]\pi^{1/2}/2.$$

Как видно из (37), при достаточно больших значениях аргумента, когда  $\tau \gg a_1$ , влиянием минимального радиуса корреляции  $a_1$  на поведение функции  $B_u(\tau)$  можно пренебречь. Поэтому на основании предварительных ориентировочных оценок радиуса  $a_1$  можно выбрать такие два различных значения аргумента  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , для которых  $\tau_1, \tau_2 \gg \max(a_1, \Delta t)$ . Тогда  $B_u(\tau) \approx B_f(\tau)$  и из (37) имеем  $B_f(\tau) \approx B_u(0)c_0\exp(-\tau^2/a_2^2)$ , где  $\tau$  принимает

значения  $\tau = \tau_1$  и  $\tau = \tau_2$ . Решая эти два уравнения, по известным значениям  $B_f(\tau_1)$  и  $B_f(\tau_2)$  восстанавливаем максимальный радиус корреляции  $a_2$  и величину  $p_0 = B_u(0)c_0$ :

$$a_2 = \sqrt{\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{\ln[B_f(\tau_1)/B_f(\tau_2)]}}; \quad (38)$$

$$p_0 = B_u(0)c_0 = B_f(\tau_1) \exp\left\{\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \ln[B_f(\tau_1)/B_f(\tau_2)]\right\}.$$

Так как соотношение (37) содержит четыре неизвестных:  $B_u(0)$ ,  $c_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , то необходимо получить еще два уравнения, связывающие эти величины.

В качестве первого метода получения недостающих уравнений воспользуемся в (36) разложением четной функции  $B_u(\tau)$  в ряд Тейлора. После интегрирования находим

$$B_f(n\Delta T) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{kn} \left[ \frac{\partial^{2k} B_u(y)}{\partial y^{2k}} \right]_{y=0}, \quad (39)$$

$$C_{kn} = \frac{[(\Delta t + n\Delta T)^{2k+2} + (\Delta t - n\Delta T)^{2k+2} - 2(n\Delta T)^{2k+2}]}{(2k)!(\Delta t)^2(k+1)(k+2)}.$$

Если здесь число членов в сумме ограничено, то соотношение (39) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений для отыскания производных четного порядка от функции  $B_u(\tau)$  в нуле:

$$B_f(n\Delta T) = \sum_{k=0}^N C_{kn} \left[ \frac{\partial^{2k} B_u(y)}{\partial y^{2k}} \right]_{y=0}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (40)$$

Решив эту систему, можно найти значение дисперсии неосредненного процесса  $B_u(0)$ .

**Относительная погрешность восстановления дисперсии  $B_u(0)$  из решения системы уравнений (40), %**

N	$\Delta t/a_1$				
	0,5	1	2	4	7
2	0,6	5,7	25,0	50,5	65,9
4	0,07	2,9	20,8	47,4	63,8
6	0,02	2,1	19,3	46,3	63,0
8	0,01	1,8	18,6	45,7	-
9	-	-	18,3	-	-

В таблице приведена относительная погрешность восстановления дисперсии  $B_u(0)$  из решения системы (40) для увеличивающегося числа уравнений в системе (и соответственно для числа членов в уравнениях) при различных интервалах частичного осреднения (в отношении к минимальному радиусу корреляции  $a_1$ ). В качестве левой части в (40) использовалась функция  $B_f(\tau)$ , полученная из соотношения (36) путем интегрирования модели  $B_u(\tau)$  (37).

Как видно из таблицы, система (40) обеспечивает приемлемую погрешность восстановления дисперсии  $B_u(0)$  только при не слишком больших ин-

тервалах частичного осреднения ( $\Delta t \leq 2a_1$ ). Погрешность восстановления быстро растет при  $\Delta t > 2a_1$ . Увеличение числа членов в уравнениях (40) (увеличение  $N$ ) слабо влияет на погрешность восстановления. Поэтому можно ограничиться двумя членами ( $N = 1$ ) в системе (40).

Полагая в (40)  $n = 0$  и  $n = 1$ , получаем два дополнительных уравнения. Обозначая вторую производную  $B_u(\tau)$  в нуле как  $B_u''(0)$ , из этих уравнений имеем

$$B_u(0) = B_f(0)(1 + \mu) - B_f(\Delta T)\mu, \quad (41)$$

$$\mu = (\Delta t/\Delta T)^2/6,$$

$$B_u''(0) = 2[B_f(\Delta T) - B_f(0)]/(\Delta T)^2.$$

Если известны значения  $B_f(0)$  и  $B_f(\Delta T)$ , то из (41) находим  $B_u(0)$  и  $B_u''(0)$ . Так как значение  $B_u(0)$  становится известным, то из (38) восстанавливаем постоянную  $c_0$ . Используя разложение в ряд функции  $B_u(\tau)$  (37) при малых  $\tau$ , устанавливаем связь между минимальным радиусом корреляции  $a_1$  и величинами  $B_u(0)$ ,  $B_u''(0)$ ,  $c_0$  и  $a_2$ :

$$1/a_1^2 = [B_u''(0)/(2B_u(0)) + c_0/a_2^2]/(c_0 - 1). \quad (42)$$

На рис. 5 приведены результаты восстановления функции  $B_u(\tau)$  при  $\Delta t = \Delta T$  с использованием процедуры (38), (41), (42). Точная функция  $B_u(\tau)$  задавалась в виде (37) с параметрами  $B_u(0) = 3$ ,  $c_0 = 0,1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 10$  (в условных размерных единицах, в которых размерности  $\tau$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  совпадают).

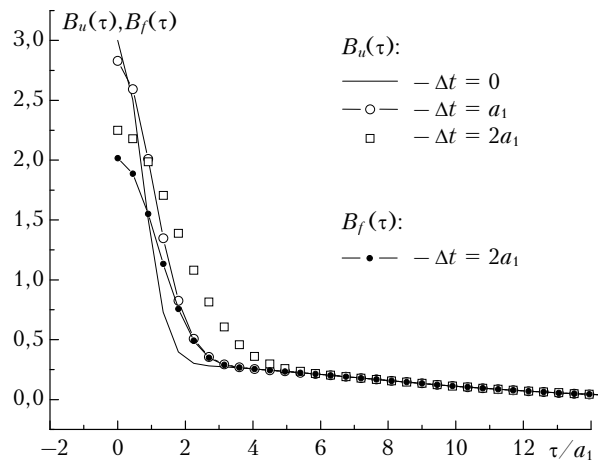


Рис. 5. Результаты восстановления функции  $B_u(\tau)$  из разложения в ряд Тейлора. Точная функция  $B_u(\tau)$  соответствует кривой  $\Delta t = 0$

Как видно из рис. 5, применение в области  $\tau < \Delta t$  разложения в ряд Тейлора позволяет удовлетворительно восстанавливать функцию  $B_u(\tau)$ . При этом интервалы частичного осреднения должны быть не слишком велики:  $\Delta t \lesssim 2a_1$ . Из рис. 5 также видно, что осредненная функция  $B_f(\tau)$  практически совпадает с неосредненной функцией  $B_u(\tau)$ , когда  $\tau \geq \Delta t$ .

Получим далее второй метод восстановления функции  $B_u(\tau)$ , имеющий более широкую область применимости. Для этого подставим (37) в уравнение (36) и выполним интегрирование. В результате находим

$$\frac{B_f(\tau)}{B_u(0)} = (1 - c_0)N\left(\frac{\Delta t}{a_1}, \frac{\tau}{a_1}\right) + c_0N\left(\frac{\Delta t}{a_2}, \frac{\tau}{a_2}\right), \quad (43)$$

$$N(y, z) = \frac{2e^{-z^2}}{y} \int_0^y dx \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{-x^2} \text{ch}(2zx),$$

$$N(y, z) =$$

$$= \begin{cases} e^{-z^2} \left[ 1 - \frac{y(1-2z^2)}{6} + \frac{y^4}{30} \left( 1 - 4z^2 + \frac{4}{3}z^4 \right) + \dots \right], & y \ll \min\left(\frac{1}{|z|}, 1\right), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{y} - \frac{1}{y^2} \left[ \sqrt{\pi} z \varphi(z) + e^{-z^2} \right] + \dots, & y \gg \max(|z|, 1), \end{cases}$$

где  $\varphi(x)$  – интеграл вероятности,  $\varphi(x) = 1 - \Gamma(1/2, x^2)\pi^{-1/2}$ ,  $\Gamma(v, x)$  – неполная гамма-функция.

В интересующей нас области  $\tau < \Delta t$  функцию  $N(y, z)$  в (43) можно аппроксимировать следующей простой функцией:

$$N(y, z) = \gamma(1 + \alpha y^2 + \beta y^4)^{-1/4}, \quad (44)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – функции только от  $z$ :

$$\alpha = (2/3)(1 - 2z^2), \quad \gamma = \exp(-z^2), \quad \beta = (\gamma\pi^{-1/2})^4.$$

На рис. 6 показаны результаты сравнения точной функции  $N(y, z)$ , вычисленной по формуле (43), с ее аппроксимацией (44). Видно, что в области  $z \leq 1$ , а это соответствует неравенству  $\tau \leq a_1 < a_2$ , точная функция  $N(y, z)$  практически совпадает с аппроксимацией (44). Поэтому при не очень больших  $\tau$  ( $\tau \leq a_1$ ) формулу (44) можно использовать, чтобы получить два уравнения, дополняющие равенства (38).

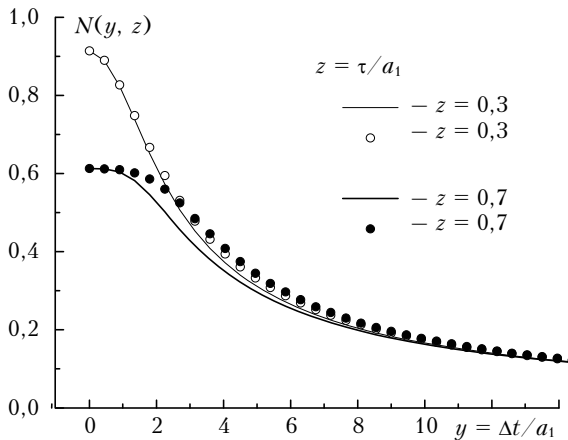


Рис. 6. Функция  $N(y, z)$ . Сплошные линии – точная функция, точки – аппроксимация

Для этого выбираем два различных значения аргумента  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , при которых  $z_1 = \tau_1/a_1 \leq 1$  и  $z_2 = \tau_2/a_1 \leq 1$  [здесь  $\tau_1$  и  $\tau_2$  отличаются от значений, использованных в (38)]. При дискретно-непрерывном осреднении с интервалом дискретизации  $\Delta T$  два наименьших значения есть  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \Delta T$ . Так как заранее величина минимального радиуса корреляции  $a_1$  неизвестна, то, чтобы неравенство  $z_2 = \tau_2/a_1 \leq 1$  было выполнено, в качестве  $\tau_2$  можно выбрать любую точку из интервала  $(0, \Delta T)$ , близкую к нулю. Например,  $\tau_2 = \nu \Delta T$ , где  $\nu \ll 1$ . Тогда необходимо нам далее величину  $B_f(\tau_2) = B_f(\nu \Delta T)$  можно найти по двум известным значениям  $B_f(0)$  и  $B_f(\Delta T)$  путем линейной интерполяции. Если значения  $B_f(0)$  и  $B_f(\Delta T)$  известны с некоторыми погрешностями, то, как нетрудно показать, при  $\nu \ll 1$  погрешность величины  $B_f(\nu \Delta T)$  будет практически совпадать с погрешностью задания  $B_f(0)$  (при этом погрешность  $B_f(\Delta T)$  может превышать погрешность  $B_f(0)$  в 2–3 раза).

Обозначим для краткости  $B_1 = B_f(\tau_1)$ ,  $B_2 = B_f(\tau_2)$ ,  $N_1 = N(\Delta t/a_1, \tau_1/a_1)$ ,  $N_2 = N(\Delta t/a_1, \tau_2/a_1)$ , где  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \nu \Delta T$ . Так как максимальный радиус корреляции  $a_2$  существенно превышает минимальный  $a_1$ , то для выбранных значений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  при  $\Delta t \ll a_2$  в (43) значения  $N(\Delta t/a_2, \tau_1/a_2) \approx 1$ ,  $N(\Delta t/a_2, \tau_2/a_2) \approx 1$ . Тогда из (43) с учетом (38) имеем

$$B_u(0) = [(1 - N_2)B_1 - (1 - N_1)B_2] / (N_1 - N_2), \quad (45)$$

$$c_0 = p_0 / B_u(0).$$

Таким образом, из (45) становятся известными величины  $B_u(0)$ ,  $c_0$ , если известны  $N_1, N_2$ . В свою очередь, величины  $N_1, N_2$  будут известны, если известен минимальный радиус корреляции  $a_1$ .

Первое равенство (45) соответствует первому дополнительному уравнению. Второе дополнительное уравнение можно записать в виде  $N_2/N_1 = (B_2 - p_0)/(B_1 - p_0)$ . Из этого уравнения можно найти минимальный радиус  $a_1$ . После отыскания  $a_1$  находим  $N_1, N_2$  и из (45) – величины  $B_u(0)$ ,  $c_0$ . Максимальный радиус корреляции  $a_2$  известен из (38). Следовательно, задача будет полностью решена после нахождения минимального радиуса  $a_1$ .

Чтобы найти радиус  $a_1$ , применяем аппроксимацию (44). Обозначим через  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  в (44), соответствующие значению  $z_1 = 0$ , а через  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  – соответствующие значению  $z_2 = \nu \Delta T/a_1$  ( $z_2 \ll 1$  при  $\nu \ll 1$ ). Из второго дополнительного уравнения получаем

$$(1 - \lambda) + y^2(\alpha_2 - \lambda\alpha_1) + y^4(\beta_2 - \lambda\beta_1) = 0, \quad (46)$$

где

$$y = \Delta t/a_1; \quad \lambda = [\gamma_2(B_1 - p_0)] / [\gamma_1(B_2 - p_0)]^4.$$

Если из этого уравнения четвертой степени (для неизвестного  $y$ ) найти  $y$ , то мы получаем величину радиуса  $a_1$ :  $a_1 = \Delta t/y$ . В общем случае решение уравнения (46) сводится к итерационной

процедуре, потому что его коэффициенты зависят от  $a_1$  (через  $z_2$ ). Эта процедура является быстро сходящейся, так как при малых значениях  $z_1, z_2$  ( $z_1 = 0, z_2 \ll 1$ ) коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  в (46) слабо зависят от  $z_2$ . В первом приближении их можно считать постоянными:  $\alpha_i = 2/3, \gamma_i = 1, \beta_i = \pi^{-2}$ .

На рис. 7 приведены результаты восстановления функции  $B_u(\tau)$  при  $\Delta t = \Delta T$  с использованием аппроксимации (44). Точная функция  $B_u(\tau)$  задавалась в виде (37) с такими же параметрами, как и на рис. 5,  $B_u(0) = 3, c_0 = 0,1, a_1 = 1, a_2 = 10$  (в условных размерных единицах). Величина  $B_f(0)$  задавалась с относительной погрешностью  $\varepsilon$ , изменяющейся от 0 до 30%. При  $\varepsilon = 30\%$  относительная погрешность величины  $B_f(\Delta T)$  изменялась от 30 до 70%.

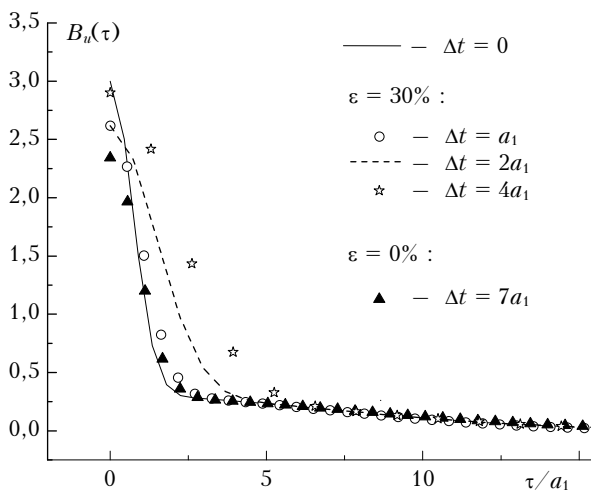


Рис. 7. Результаты восстановления функции  $B_u(\tau)$  с помощью аппроксимации (44). Точная функция  $B_u(\tau)$  соответствует кривой  $\Delta t = 0, \varepsilon$  – относительная погрешность задания величины  $B_f(0)$

Как видно из рис. 7, использование аппроксимации (44) в области  $\tau < \Delta t$  позволяет удовлетворительно восстанавливать функцию  $B_u(\tau)$  даже при больших интервалах частичного осреднения: с погрешностью  $\varepsilon = 30\%$  при  $\Delta t \leq 4a_1$  и  $\varepsilon = 0\%$  при  $\Delta t \leq 7a_1$ . То есть восстановление возможно, когда время частичного осреднения случайной функции  $u(t)$  превышает ее первый масштаб корреляции в 4–7 раз.

### Заключение

В работе исследованы теоретические аспекты построения статистических характеристик случайных функций для дискретно-непрерывного осреднения. Дискретно-непрерывное осреднение соответствует конечному времени отклика измерителя. При таком осреднении, обычно реализующемся на практике, любая дискретная последовательность эмпирических значений случайной функции является частично осредненной по некоторому интервалу изменения аргумента. Получены оценки скорости

сходимости дисперсии отклонения средних по времени от среднего по ансамблю, обеспечивающие сходимость по вероятности. Показано, что оценки скорости сходимости зависят от интегральных масштабов корреляции случайной функции. Эти масштабы определяются типом осреднения. Они различны для непрерывного, дискретного и дискретно-непрерывного осреднения. Установлены связи между ними.

Получено уравнение, связывающее корреляционные функции неосредненного и частично осредненного случайного процессов. Показано, что для нахождения корреляционной функции и дисперсии частично осредненного процесса необходимо знать временную корреляционную функцию неосредненного процесса. При этом частичное осреднение исходного сигнала, возникающее за счет ненулевого времени отклика измерителя, можно считать частотным фильтром, подавляющим высокие частоты в исходном случайном процессе.

Приведены результаты восстановления параметров произвольной корреляционной функции из уравнения, связывающего корреляционные функции неосредненного и частично осредненного случайного процессов. Установлено, что функцию корреляции неосредненного процесса можно удовлетворительно восстанавливать из частично осредненных данных, даже при больших интервалах частичного осреднения (большом времени отклика используемой аппаратуры [12]), когда время частичного осреднения случайной функции превышает ее первый масштаб корреляции в 4–7 раз. В этом наиболее интересном случае результаты восстановления корреляционных функций можно использовать при исследовании свойств случайных процессов со слабой памятью о предыстории. Такие процессы обычно имеют малые времена корреляции, к ним относятся, например, марковские дельта-коррелированные, броуновские и др.

Полученные в первой части статьи теоретические результаты будут использованы во второй части при формулировании основных положений метода измерения интегрального значения уровня турбулентности с использованием движущегося носителя. Будут рассмотрены моностатический и дифференциальные методы.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Министерства образования и науки РФ (соглашения № 8877 и 8703).

1. Taylor G.I. Diffusion by continuous movements // Proc. London Math. Soc. 1921. V. 20, N 2. P. 196–211.
2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974. 121 с.
3. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей (основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы). Изд. 2. М.: Наука, 1973. 498 с.
4. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. М.: Наука, 1967. 696 с.; Т. 2. СПб.: Гидрометеиздат, 1996. 742 с.

5. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
6. *Lukin V.P., Nosov E.V., Fortes B.V.* The efficient outer scale of atmospheric turbulence // *Atmos. and Ocean. Opt.* 1997. V. 10, N 2. P. 100–109.
7. *Fortes B.V., Lukin V.P.* Modeling of the imade observed through the turbulent atmosphere // *Proc. SPIE.* 1992. V. 1668. P. 477–488.
8. *Лукин В.П.* Оптические измерения внешнего масштаба атмосферной турбулентности // *Оптика атмосф. и океана.* 1992. Т. 5, № 4. С. 354–377.
9. *Лукин В.П.* Исследование особенностей структуры крупномасштабной атмосферной турбулентности // *Оптика атмосф. и океана.* 1992. Т. 5, № 12. С. 1294–1304.
10. *Носов В.В., Емалеев О.Н., Лукин В.П., Носов Е.В.* Полуэмпирические гипотезы теории турбулентности в анизотропном пограничном слое // *Оптика атмосф. и океана.* 2005. Т. 18, № 10. С. 845–862.
11. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
12. *Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Botygina N.N., Emaleev O.N., Torgaev A.V.* Influence of photodetector response time on operation of monostatic and bistatic airborne meters of turbulence: Part I; Part II // *Proc. SPIE.* 2006. V. 6522. P. 65220Q; P. 65220R.

**V.V. Nosov, V.P. Lukin. Method of measurement of the turbulence characteristics from the flutter of the astronomical images on the aircraft board. Part 1. Main ergodic theorems.**

Aspects are investigated of building the statistical characteristics of random functions for discrete-continuous averaging according to the end-time response of the measurement device. This averaging is typically implemented in practice, and any discrete sequence (empirical values of a random function) is partially averaged sequence (over some interval of the argument). Estimates of the rate of convergence are found of the time-mean to the ensemble-mean (the generalizations of the Taylor ergodic theorem). These estimates provide a convergence in probability. It is shown that the convergence rate depends on the integral correlation scales of the random function. These scales are determined by the type of averaging, they are different for the continuous, discrete, and discrete-continuous averaging. An equation relating the correlation functions of non-averaged and partially-averaged random processes is found. It is found that correlation function of the non-averaged process can be satisfactorily recovered from a partially-averaged data, even at very long intervals of partial averaging.