

А.Г. Боровой

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛУЧЕЙ В ЗАДАЧАХ РАССЕЙЯНИЯ ВОЛН И ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Показано, что вместо параболического уравнения в задачах рассеяния и распространения коротких волн в ряде случаев можно использовать более простое и физически наглядное приближение прямых лучей. Обсуждены границы применимости модели амплитудно-фазового экрана в задаче распространения волн в случайно-неоднородных средах. Найден верхний предел фактора эффективности ослабления рассеивателями, размеры которых больше длины волны. Он равен четырем.

Работы по распространению оптических волн в атмосфере обычно базируются на параболическом уравнении (см. напр. [11])

$$\left[2i\kappa \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_{\perp} - v(\mathbf{r}) \right] u(\mathbf{r}) = 0; \quad (1)$$

$$v(\mathbf{r}) = \kappa^2 (1 - n^2(\mathbf{r})), \quad (2)$$

где $u(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда волнового поля; $\kappa = 2\pi/\lambda$ — волновое число; функция $v(\mathbf{r})$ определяет неоднородности среды или рассеиватели через показатель преломления $n(\mathbf{r})$. Вместе с тем в различных разделах физики в задачах рассеяния волн как на одиночном рассеивателе, так и на системе рассеивателей, а также в задачах распространения волн в случайно-неоднородных средах иногда используется более простое уравнение

$$\left[2i\kappa \frac{\partial}{\partial x} - v(\mathbf{r}) \right] u(\mathbf{r}) = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) отброшен член Δ_{\perp} , описывающий дифракцию волн, поэтому взаимодействие волн с рассеивающей средой в приближении (3) тривиально. Оно сводится к распространению волн по прямым лучам, при этом на лучах за счет функции $v(\mathbf{r})$ происходит дополнительный набег фазы (а также ослабление, если $\text{Im } v \neq 0$)

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\rho) e^{i\Phi(x, \rho)} = u_0(\rho) e^{i\zeta(x, \rho) - \chi(x, \rho)}; \quad (4)$$

$$\Phi(x, \rho) = -\frac{1}{2\kappa} \int_{-\infty}^x v(x', \rho) dx', \quad (5)$$

где x — продольная и ρ — поперечные координаты; $u_0(\rho)$ — падающее поле. Слой среды, таким образом, эквивалентен амплитудно-фазовому экрану $\Phi(x, \rho)$, образуемому как результат проектирования среды на плоскость $x = \text{const}$. Приближение (3)–(5) в различных разделах физики имеет множество названий: эйкональное, РКБ (Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна), Хюлста, Мольера, Глаубера. Будем называть его приближением прямых лучей, так как это название наиболее точно отражает сущность приближения.

В данной работе, во-первых, покажем, что приближение прямых лучей является простым и эффективным инструментом при расчете оптических характеристик, как отдельных рассеивателей, так и совокупности рассеивателей произвольной формы. Основным ограничением его применимости является слабое условие $a \gg \lambda$, где a — линейные размеры рассеивателей. Оригинальным моментом здесь является введение коэффициентов рассеяния и ослабления для отдельного луча $\rho = \text{const}$, в результате соответствующие коэффициенты для рассеивателя получаются простым интегрированием по лучам. Во-вторых, в работе показывается, что если распространение волн в случайно-неоднородных средах описывается параболическим уравнением, то при плоской симметрии задачи, т.е. для однородных в поперечном направлении статистических характеристик поля и среды, первые два момента поля для параболического уравнения (1) и в приближении прямых лучей (3) совпадают. Таким образом, при вычислении прозрачности таких сред и углового спектра прошедшего излучения дифракцию поля при распространении в среде можно не учитывать. Этот факт был отмечен ранее автором [2] в рамках приближения марковского случайного процесса, в данной работе он рассмотрен с более общих позиций.

Таким образом, прохождение оптического излучения от Солнца и звезд через турбулентную атмосферу или радиоволн через ионосферу в рамках первых двух моментов поля можно описывать выражениями (4), (5), имеющими ясный физический смысл. Приближение прямых лучей позволяет также получить ряд интересных физических результатов в задаче многократного рассеяния волн на системе коррелированных рассеивателей [3].

1. Рассеяние волн на отдельном рассеивателе

Вначале рассмотрим рассеяние плоской волны $u_0(\rho) = 1$ на большом ($ka \gg 1$) оптически мягком ($|\operatorname{Re} n - 1| \ll 1$ рассеивателе произвольной формы. Поле $u(\rho)$ на луче $\rho = \text{const}$ в приближении прямых лучей после прохождения рассеивателя не зависит от продольной координаты x , поэтому ее будем опускать. Как обычно в теории рассеяния волн, результирующее поле $u(\rho)$ запишем как суперпозицию падающего и рассеянного полей

$$u(\rho) = 1 + \omega(\rho) \quad (6)$$

и рассмотрим интенсивность поля

$$|u(\rho)|^2 = 1 + \omega(\rho) + \omega^*(\rho) + |\omega(\rho)|^2. \quad (7)$$

Величину $K_p = |\omega|^2$, соответствующую интенсивности рассеянного поля, назовем коэффициентом рассеяния для луча $\rho = \text{const}$. Если на луче произошло поглощение излучения, и $|u| < 1$, то величину $K_n = 1 - |u|^2$ естественно назвать коэффициентом поглощения. Коэффициент ослабления K определим из стандартного соотношения $K = K_p + K_n$, в результате из (7) получим: $K = -(\omega + \omega^*)$. Вне области проекции рассеивателя на плоскость $x = \text{const}$ все величины $\omega(\rho)$, $K_p(\rho)$, $K_n(\rho)$ и $K(\rho)$ обращаются в нуль.

Введенные величины определяют поле в ближней зоне рассеивателя, т.е. на расстояниях $x \ll ka^2$. При $x \gtrsim ka^2$ поле $u(x, \rho)$ описывается уже параболическим уравнением, при этом в волновой зоне $x \gg ka^2$ оно определяется известным выражением (см. напр. [4]) для амплитуды рассеяния:

$$f(q) = -\frac{i\kappa}{2\pi} \int (e^{i\Phi(\rho)} - 1) e^{-iq\rho} d\rho = -\frac{i\kappa}{2\pi} \int \omega(\rho) e^{-iq\rho} d\rho, \quad (8)$$

где $|q| = \kappa \sin\theta$; θ — угол рассеяния. Так как рассеиватели имеют размеры, большие длин волн $ka \gg 1$, то рассматриваемые углы рассеяния малы $\theta \ll 1$. В этом случае интегрирование рассеянного поля по направлениям рассеяния Ω , как обычно, заменяем интегрированием по неограниченной плоскости $q(\dots d\Omega = \dots dq/\kappa^2)$.

Покажем, что сечения рассеяния σ_p , поглощения σ_n и ослабления σ для рассеивателя оказываются аддитивными величинами от введенных выше коэффициентов для лучей, пересекающих рассеиватель. Для сечения рассеяния это следует непосредственно из выражения (8):

$$\sigma_p \equiv \int |f(q)|^2 dq/\kappa^2 = \int |\omega(\rho)|^2 d\rho = s \overline{|\omega|^2}, \quad (9)$$

где s — площадь проекции рассеивателя. Чертой сверху в дальнейшем будем обозначать средние величины при интегрировании только по лучам, пересекающим рассеиватель. Сечение ослабления получается из оптической теоремы [4]:

$$\sigma = 4\pi \operatorname{Im} f(0)/\kappa = -\int (\omega + \omega^*) d\rho = -s \overline{(\omega + \omega^*)}, \quad (10)$$

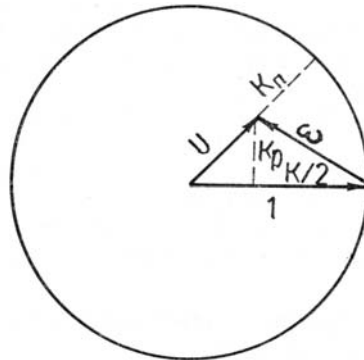
а сечение поглощения получим из выражений для K_n и (9), (10):

$$\sigma_n = \sigma - \sigma_p = \int (1 - |u|^2) d\rho = s (1 - \overline{|u|^2}). \quad (11)$$

Такая простая связь (9)–(11) между коэффициентами $K_p(\rho)$, $K_n(\rho)$ и $K(\rho)$ для лучей, пересекающих рассеиватель, с оптическими характеристиками σ_p , σ_n и σ всего оптически мягкого рассеивателя может быть использована, например, при расчете на ЭВМ оптических характеристик рассеивателей произвольной формы.

Кроме того, введенные коэффициенты K_p , K_n и K удобно использовать также для качественного анализа проблемы рассеяния волн на больших $ka \gg 1$ рассеивателях, причем от условия оптической мягкости рассеивателя $|\operatorname{Re} n - 1| \ll 1$ можно отказаться. Для качественного анализа введем графическое представление прошедшего $u(\rho)$ и рассеянного $\omega(\rho)$ полей. Так как для амплитудно-фазового эк-

рана должно выполняться соотношение $|u(\rho)| \leq 1$, то комплексная величина $u(\rho)$ графически отображается точкой в круге единичного радиуса. Геометрический смысл связанных с полем $u(\rho)$ величин $\omega(\rho)$, $K_p(\rho)$, $K_n(\rho)$ и $K(\rho)$ показан на рисунке, вектор $\omega(\rho)$ при этом удобно откладывать от точки $u = 1$. Произвольный рассеиватель образует совокупность точек в круге, усреднение по которым и соответствует выражениям (9)–(11).



Графическое представление поля в приближении прямых лучей

Обсудим наиболее интересные приближения прямых лучей частные случаи. Для непоглощающих излучение рассеивателей все точки $u(\rho)$ лежат на окружности $u(\rho) = e^{i\varphi(\rho)}$ поэтому случаю $u = e^{i\varphi_0}$ соответствует однородная фазовая пластинка произвольной формы, где для любого луча $u(\rho) = e^{i\varphi_0}$. Как видно из рисунка, однородная фазовая пластинка, сдвигающая фазу на π , является самым эффективным рассеивателем при данной площади проекции s . Тогда имеем

$$\bar{u} = e^{i\pi} = -1, \quad \bar{\omega} = -2, \quad K = K_p = 4. \quad (12)$$

Ослабление падающей волны прозрачной пластинкой с сечением, равным четырем геометрическим сечениям пластинки, будет наблюдаться не в ближней зоне пластинки $x \ll ka^2$, а в волновой зоне $x \gg ka^2$ или в фокальной плоскости линзы. В остальных случаях, когда $\bar{u} \neq e^{i\pi}$, сечение ослабления, (см. рисунок), будет меньше, чем (12), подчеркнем, что полученное ограничение на величину сечения ослабления больших $ka \gg 1$ рассеивателей, которое будет справедливо и для оптически жестких рассеивателей

$$\sigma \leq 4s, \quad (13)$$

по-видимому, ранее не отмечалось в литературе.

Рассмотрим другой важный случай:

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{\omega} = -1, \quad K = 2. \quad (14)$$

который соответствует нескольким физически различным ситуациям. Во-первых, он соответствует рассеивателям с сильным поглощением, где $u(\rho) = 0$, $\sigma_n = \sigma_p = s$, а рассеянная волна образуется за счет дифракции поля на контуре рассеивателя в соответствии с выражением (8). Во-вторых, это прозрачные рассеиватели с сильной вариацией набега фаз по лучам, $\sigma_n = 0$ и $\sigma_p = 2s$, а рассеянное поле разбивается на две части. Если поперечный масштаб изменения фазы на величину 2π обозначить как b , причем $\lambda \ll b \ll a$, то первое слагаемое в выражении (8) даст широкоугловую часть рассеянного поля, расходящуюся под углом $\theta \lesssim \lambda/b$. Второе слагаемое даст малоугловую часть, расходящуюся под углом $\theta \lesssim \lambda/a$ и соответствующую дифракции на контуре рассеивателя. И наконец, к случаю (14) можно отнести все оптически жесткие рассеиватели. Действительно, в ближней зоне оптически жесткого рассеивателя рассеянное поле образуется за счет преломления и отражения лучей в соответствии с законами геометрической оптики и не описывается параболическим уравнением. В волновой зоне $x \gg ka^2$ это поле образует широкоугловую часть рассеянного поля, которое расходится под большими по сравнению с оптически мягким рассеивателем углами. Но малоугловая часть рассеянного поля по-прежнему описывается параболическим уравнением, где формально $\text{Im } v \rightarrow \infty$, и тогда в ближней зоне для этого поля получим значение: $\omega(\rho) = -1$ [2].

В заключение раздела отметим, что если рассеиватель имеет разные по масштабам поперечные a_\perp и продольные a_\parallel размеры, то дифракция поля сделает неприменимым приближение прямых лучей при распространении поля внутри рассеивателя, если $ka_\perp^2 \lesssim a_\parallel$. Но для подавляющего большинства рассеивателей, у которых $a_\perp \sim a_\parallel$, для применимости приближения прямых лучей достаточно условия $ka \gg 1$.

2. Среднее поле и функция когерентности в случайно-неоднородной среде

Если в случайно-неоднородной среде распространение поля описывается параболическим уравнением, то в задачах с плоской симметрией первые два момента поля совпадают с моментами приближения прямых лучей. Таким образом, поле приближения прямых лучей (4) хотя и отличается от реального поля, но рассматривается как некоторое эффективное поле, дающее правильные значения первых двух моментов.

Рассмотрим вначале среднее поле, подчиняющееся уравнению Дайсона:

$$(L - M) \langle u \rangle = 0, \quad (15)$$

где $L = 2ik \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_{\perp}$; M – массовый оператор, определяющий эффективную неоднородность. Массовый оператор для плавных неоднородностей типа турбулентной атмосферы, как известно [1], представляется в виде ряда, члены которого образованы пропагатором L^{-1} и корреляционными функциями показателя преломления среды. Но так как обычно эффективная неоднородность эквивалентна рассмотренному в предыдущем разделе одиночному рассеивателю с размерами $a \gg \lambda$ и соотношением $a_{\perp} \sim a_{\parallel}$, то дифракцией поля при его распространении в этой эффективной неоднородности можно пренебречь. В результате при расчете массового оператора можно воспользоваться пропагатором приближения прямых лучей $L_0^{-1} = \left(2ik \frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}$. Те же рассуждения применимы и к среде, образованной

системой больших по сравнению с длиной волны дискретных рассеивателей, так как при этом обычно имеем $a_{\perp} \sim a_{\parallel}$. Далее, за счет однородности среднего поля $\langle u(x, \rho) \rangle = \langle u(x) \rangle$ получаем $\Delta_{\perp} \langle u \rangle = 0$ и $L \langle u \rangle = \langle L(u) \rangle$. В результате в уравнении Дайсона (15) оператор L заменяется на оператор L_0 и вычисление среднего поля сводится к усреднению выражения (4).

Теперь перейдем к функции когерентности $\langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \rangle$. Функция когерентности подчиняется уравнению Бете–Солпитера, где эффективная неоднородность определяется рядом для оператора интенсивности. Как и для массового оператора, вычисление оператора интенсивности при условии $ka_{\perp}^2 \gg a_{\parallel}$ можно провести в приближении прямых лучей. А дифракция поля при его распространении между эффективными неоднородностями не проявится за счет однородности функции когерентности $\langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \rangle = \Gamma(x, \rho_1 - \rho_2)$. Действительно, для уравнения Бете–Солпитера в рамках параболического уравнения имеем:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_{\rho_1} - \Delta_{\rho_2}\right) \Gamma(x, \rho_1 - \rho_2) = 2ik \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, \rho_1 - \rho_2); \quad (16)$$

$$(\Delta_{\rho_1} - \Delta_{\rho_2}) \Gamma(x, \rho_1 - \rho_2) = \left(\frac{\partial}{\partial \rho_1} - \frac{\partial}{\partial \rho_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \rho_1} + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\right) \Gamma(x, \rho_1 - \rho_2) \equiv 0. \quad (17)$$

Таким образом, решение уравнения Бете–Солпитера также совпадает с усреднением произведения от выражения (4).

Подчеркнем, что столь простые результаты для массового оператора и оператора интенсивности получаются за счет использования параболического уравнения вместо уравнения Гельмгольца и за счет условия $ka_{\perp}^2 \gg a_{\parallel}$. Плоская симметрия задачи обеспечила возможность пренебречь дифракцией при распространении поля между эффективными неоднородностями.

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. – М.: Наука, 1978.
2. Боровой А. Г. – Изв. вузов. Радиофизика, 1982, т. 25, № 4, с. 391.
3. Боровой А. Г., Реутова О. А. – Оптика атмосферы (в печати).
4. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. – М.: Мир, 1969.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР, Томск

Поступила в редакцию 29 марта 1988 г.

A. G. Borovoy. **Geometrical Optics Ray Approximation for Problems of Wave Scattering and Propagation through Random-Inhomogeneous Media.**

In a number of cases the parabolic equation used in the short-wave propagation and scattering problems is shown to be replaceable by a simpler and physically obvious geometrical optics ray approximation. The applicability conditions of the amplitude-phase screen model for the problem of wave propagation through random-inhomogeneous media are discussed. The extinction efficiency factor is evaluated for scatterers whose size is larger than the optical wavelength. Its upper limit is found to be equal to 4.