

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, Н.А. Лаптева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВЫХ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ ПРЕВЫШЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ КОНЦЕНТРАЦИИ АТМОСФЕРНОЙ ПРИМЕСИ

НИИ аэриологии ГНЦ ВБ «Вектор», Новосибирская обл.

Поступила в редакцию 3.03.99 г.

Принята к печати 5.05.99 г.

На основании полученной ранее функции плотности вероятности концентрации распространяющейся в атмосфере примеси рассматривается задача определения математических ожиданий частоты пересечения концентрацией заданного порогового уровня и длительности выбросов концентрации. Для этих величин выведены формулы, расчеты по которым хорошо согласуются с экспериментальными данными [1, 2]. Показано, что обнаруженные ими «переходной» и «равновесный» режимы пульсаций концентрации соответствуют различным значениям перемежаемости концентрации примеси.

Решение ряда прикладных задач требует определения таких характеристик, как среднее значение частоты превышения концентрацией атмосферной примеси C заданного порогового значения C_0 , среднего времени превышения концентрацией заданного уровня и среднего времени между моментами превышения концентрацией заданного уровня. Эмпирические оценки данных характеристик были получены в [1] на основании пульсационных измерений концентрации примеси в фиксированной точке пространства от стационарного источника. В [2] было показано, что в приземном слое атмосферы можно наблюдать два режима флуктуаций концентрации примеси: «переходной» и «равновесный».

Переходной режим характерен тем, что наряду с участком спектральной плотности пульсаций концентрации, который соответствует закону $f \sim \omega^{-5/3}$ (f – частота пульсаций), наблюдается закон $f \sim \omega^{-2/3}$. Последний расположен при значениях безразмерной частоты порядка двух, а закон «пять третей» при безразмерной частоте больше семи.

В соответствии с вышесказанным в [1] при определении характеристик превышения концентрацией заданного уровня экспериментальные данные были разбиты на две группы. Известно, что определение указанных характеристик требует знания законов распределения концентрации и ее производной по времени [3]. На момент написания работ [1, 2] данные характеристики были неизвестны, поэтому полученные в [1] результаты имеют эмпирический характер и их трудно экстраполировать на условия распространения примесей, отличные от рассматривавшихся авторами. Вместе с тем в настоящее время закономерности распределения концентрации примеси достаточно хорошо изучены [4] и можно вернуться к данной задаче для более общего случая.

Теоретические основы определения средних значений времен выбросов случайных процессов разработаны в статистической радиотехнике, например [3]. Для стационарных случайных процессов математическое ожидание числа пересечений концентрацией примеси заданного уровня C_0 «снизу» (с положительной производной) имеет вид

$$\lambda_+(C_0) = \int_0^{\infty} C' f_2(C_0, C') dC', \quad (1)$$

где f_2 – совместная функция плотности вероятности концентрации примеси и ее производной по времени. В стационар-

ном случае значения процесса и его производной статистически независимы, поэтому $f_2(C, C') = f_0(C) f_1(C')$, где f_0 – плотность вероятности концентрации примеси C , а f_1 – плотность вероятности ее производной C' по времени. Математическое ожидание числа пересечений концентрацией уровня C_0 «сверху» (с отрицательной производной) равно среднему числу пересечений концентрацией заданного уровня «снизу»: $\lambda_-(C_0) = \lambda_+(C_0)$. Общее число пересечений равно $\lambda(C_0) = 2\lambda_+(C_0)$. Математические ожидания длительности выбросов $\rho_+(C_0)$ и интервалов между выбросами $\rho_-(C_0)$ могут быть найдены по формулам

$$\rho_+(C_0) = \frac{1 - F_0(C_0)}{\lambda_+(C_0)}; \quad \rho_-(C_0) = \frac{F_0(C_0)}{\lambda_+(C_0)}, \quad (2)$$

где F_0 – функция распределения концентрации примеси, соответствующая плотности вероятности f_0 .

Согласно [4] функция плотности вероятности концентрации примеси f_0 имеет вид

$$f_0(C) = (1 - \gamma)\delta(C) + \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} \times \left\{ \exp\left[-\frac{(C - \bar{C})^2}{\beta^2}\right] - \exp\left[-\frac{(C + \bar{C})^2}{\beta^2}\right] \right\},$$

$$\gamma = \operatorname{erf}(\bar{C}/\beta), \quad (3)$$

где γ – перемежаемость концентрации; \bar{C} – математическое ожидание концентрации; β – второй параметр функции плотности вероятности, связанный с дисперсией концентрации примеси σ^2 [4]; $\delta(\dots)$ – дельта-функция Дирака; $\operatorname{erf}(\dots)$ – интеграл вероятности. Функция (3) является точным аналитическим решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, подтверждена данными экспериментов на аэродинамической трубе, данными независимых натуральных экспериментов, а также соответствует классическим асимптотикам из теории турбулентного горения [4]. Установлено, что (3) хорошо описывает экспериментальные данные при $\gamma > 0,1$. При $\gamma < 0,1$ начинает сказываться действие вязких сил на границах раздела областей пространства, занятых примесью и свободных от частиц. Вследствие

этого член с дельта-функцией в общем случае должен быть представлен некоторой функцией конечной ширины. Эмпирические оценки величины этого эффекта были приняты в [5]. Теоретические оценки описаны в [6].

Плотность вероятности производной от концентрации примеси f_1 можно получить, как и f_0 , решением аналогичного уравнения. Однако здесь мы обоснуем ее вид, ограничившись общефизическими рассуждениями. Непрерывная часть плотности вероятности концентрации представлена разностью двух фундаментальных решений уравнения теплопроводности. Этот факт демонстрирует тесную связь рассматриваемой задачи с теорией нормальных марковских диффузионных процессов.

Очевидно, наличие разности двух фундаментальных решений связано с тем, что концентрация примеси является неотрицательной величиной. Производная от концентрации по времени может принимать любые, в том числе и отрицательные, значения и, в отличие от концентрации, не перемежается. Поэтому вполне естественно предположить нормальный вид плотности вероятности производной от концентрации. Эта функция в общем случае определяется двумя параметрами: математическим ожиданием и дисперсией. Для стационарного случая математическое ожидание производной будет равно нулю, а дисперсия равна второй производной от корреляционной функции пульсаций производной при нулевом временном сдвиге [3]. Из соображений размерности данная величина будет равна отношению дисперсии концентрации к квадрату характерного времени пульсаций концентрации τ_e , т.е. к эйлерову временному масштабу. Заметим, что данное рассуждение является строгим при экспоненциальной форме корреляционной функции пульсаций концентрации. Вследствие вышесказанного искомая функция плотности вероятности должна иметь вид

$$f_1(C') = \frac{\tau_e}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\tau_e C')^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (4)$$

Экспоненциальной форме корреляционной функции пульсаций концентрации $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-|\tau|/\tau_e)$ соответствует следующая плотность спектральной мощности пульсаций [3]:

$$S(f) = 2\tau_e\sigma^2/[1 + (\tau_e f)^2].$$

В нашей статье «Корреляционная функция пульсаций...» (см. № 8, в печати) на рисунке приведена зависимость логарифма $fS(f)/\tau_e\sigma^2$ от логарифма безразмерной частоты $\tau_e f$. Мы видим, что при $\tau_e f$ порядка двух спектральная плотность соответствует закону «две трети», а при частотах $\tau_e f > 7$ имеет место закон «пять третей». Таким образом, корреляционная функция пульсаций концентрации атмосферной примеси должна быть по своему виду близка к экспоненциальной, что и демонстрируют результаты, полученные в [2].

Теперь имеются необходимые для расчетов величины и соотношения, и можно приступить к обсуждению полученных результатов. Согласно (1), (3) и (4) выражение для определения $\lambda_+(C_0)$ имеет вид

$$\lambda_+(C_0) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\beta\tau_e} \times \left\{ \exp\left[-\frac{(C_0 - \bar{C})^2}{\beta^2}\right] - \exp\left[-\frac{(C_0 + \bar{C})^2}{\beta^2}\right] \right\}. \quad (5)$$

Обычно частоту превышения концентрацией заданного уровня рассчитывают по «модифицированной» формуле Райса [7]. Под модификацией понимается подстановка в формулу, полученную Райсом, логарифмически-нормальной плотности вероятности концентрации. В результате чего, с учетом экспоненциального вида корреляционной функции пульсаций концентрации, получается выражение

$$\lambda_+(C_0) = \frac{I \exp\left\{-\frac{\ln^2\left[C_0\sqrt{1+I^2}/\ln(1+I^2)C_m\right]}{2\ln(1+I^2)}\right\}}{\tau_e 2\pi \sqrt{1+I^2} \ln(1+I^2)}, \quad (6)$$

где $I = \sigma/\bar{C}$ – интенсивность пульсаций концентрации атмосферной примеси; $C_m = \bar{C}\sqrt{1+I^2}$ – медианная концентрация примеси. На рис. 1 приведены рассчитанные по (5) и (6) нормированные на $\lambda_+(C_0/\bar{C})$ средние частоты превышения концентрацией данного уровня в зависимости от порога C_0 , нормированного на математическое ожидание концентрации \bar{C} , и экспериментальные результаты, полученные в [1]. Верхние кривые построены для $I = 0,125$ ($\gamma = 0,14$), а экспериментальные точки соответствуют обсуждаемому выше равновесному режиму, нижние для $I = 1$ ($\gamma = 0,84$), а экспериментальные точки соответствуют переходному режиму. Мы видим, что модифицированная формула Райса (6) не соответствует экспериментальным данным. Это говорит о том, что логарифмически-нормальное распределение достаточно грубо описывает пульсации концентрации атмосферной примеси. В то же время для формулы (5) получается удовлетворительное согласие.

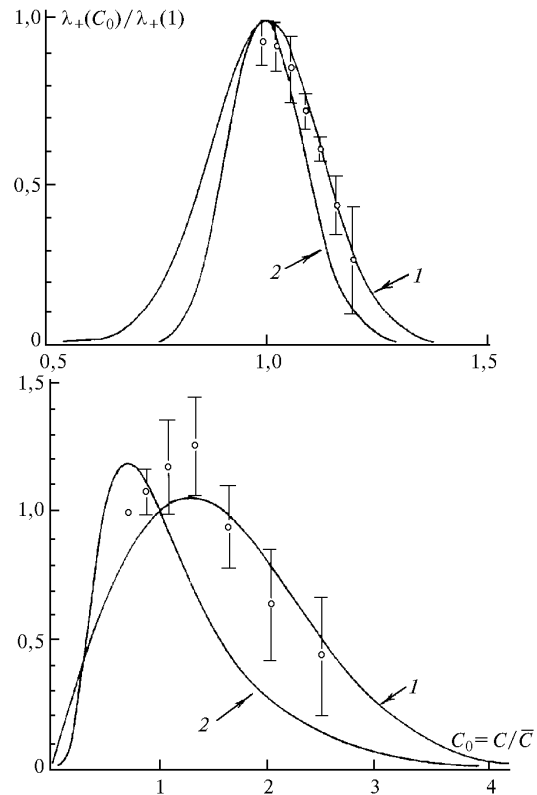


Рис. 1. Зависимость $\lambda_+(C_0)/\lambda_+(C_0 = \bar{C})$ от $C_0 = C/\bar{C}$. Кривая 1 – расчет по (5); 2 – по (6). Кружочки и вертикальные отрезки соответствуют данным [4]. Верхние кривые построены для $I = 0,125$, нижние для $I = 1$

Таким образом, можно утверждать, что переходной режим соответствует значениям перемежаемости концентрации примеси, близким к единице, а равновесный – перемежаемости, стремящейся к нулю. Расчеты по формуле (5) и их сравнение с экспериментальными данными [1] показывают, что переходной режим наблюдается при $\gamma > 0,5$, а равновесный при $\gamma < 0,5$. Это вполне согласуется с предположением [2], согласно которому переходной режим должен наблюдаться при малых временах диффузии, а равновесный при больших временах.

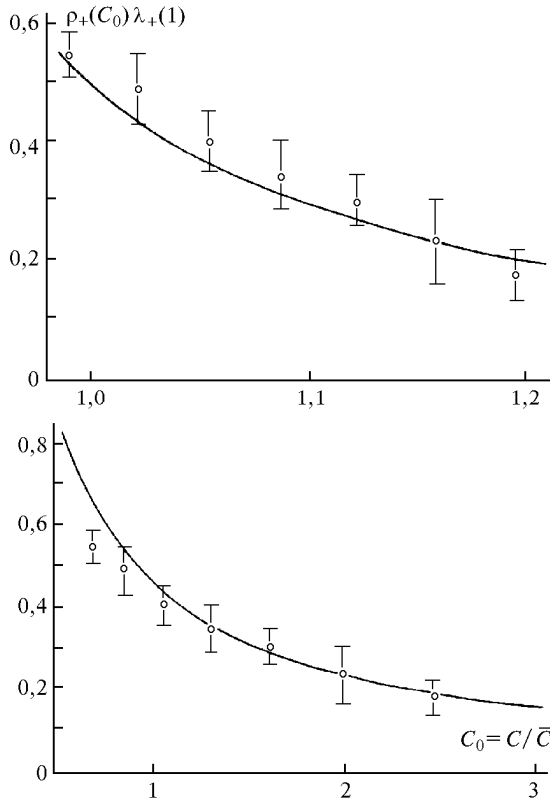


Рис. 2. Зависимость $\rho_+(C_0)\lambda_+(C_0 = \bar{C})$ от $C_0 = C/\bar{C}$, рассчитанная по (7). Кружочки и вертикальные отрезки соответствуют данным из [4]. Верхняя кривая соответствует $I = 0,125$, нижняя – $I = 1$

Формула для определения математического ожидания длительности выбросов $\rho_+(C_0)$ имеет вид

$$\rho_+(C_0) = \frac{\pi\beta\tau_e \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(C_0 + \bar{C})^2}{\beta^2} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{(C_0 - \bar{C})^2}{\beta^2} \right] \right\}}{\sqrt{2}\sigma \left\{ \exp \left[-\frac{(C_0 - \bar{C})^2}{\beta^2} \right] - \exp \left[-\frac{(C_0 + \bar{C})^2}{\beta^2} \right] \right\}}. \quad (7)$$

На рис. 2 приведены рассчитанные по (7) и нормированные на $1/\lambda_+(C_0/\bar{C} = 1)$ математические ожидания длительности выбросов в зависимости от значений порога C_0 , нормированного на математическое ожидание концентрации \bar{C} . Точки и вертикальные линии представляют экспериментальные данные и их разброс из [1]. Верхняя кривая

построена для $I = 0,125$ ($\gamma = 0,14$) и соответствует обсуждаемому выше равновесному режиму, а нижняя кривая для $I = 1$ ($\gamma = 0,84$) и соответствует переходному режиму. Таким образом, для (7) также получено вполне удовлетворительное совпадение с результатами экспериментов.

Отметим, что использованная выше без строгого обоснования функция $f_1(C')$ неплохо описывает распределение производной от концентрации по времени, поскольку расчеты по формулам (5) и (7) удовлетворительно согласуются с данными экспериментов. Как видно, для получения $\lambda_+(C_0)$ и $\rho_+(C_0)$ необходимо и достаточно иметь значения математического ожидания концентрации примеси, ее дисперсию и эйлеров временной масштаб пульсаций. При этом одним из ограничений на использование полученных соотношений является упомянутое выше условие $\gamma > 0,1$ [4].

Заметим также, что использованная в данной статье плотность вероятности (3) получена в [4] на основании предположения о том, что процесс распространения примеси является эргодическим. В этом случае мы можем заменить процедуру усреднения по ансамблю усреднением по времени. Реальные атмосферные процессы не являются стационарными. Однако если период усреднения концентрации примеси много больше некоторого характерного масштаба пульсаций концентрации и много меньше общего времени распространения примеси, то условие эргодичности будет выполняться с точностью, достаточной для практического использования. В теории случайных процессов такая процедура носит название «скользящего усреднения» [3]. Характерное время пульсаций концентрации примеси в атмосфере (эйлеров временной масштаб) составляет примерно 10 с, характерное время распространения атмосферной примеси составляет несколько часов. Поэтому в данной задаче следует принять интервал усреднения концентрации около 10 мин [4]. В случае близкого к экспоненциальному виду корреляционной функции, производной от концентрации, приведенное выше рассуждение также останется в силе и для производной от концентрации.

1. Возженников О.И., Жуков Г.П. Характеристики превышения заданного уровня концентрации в струе от стационарного источника // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1982. Т. 18. N 6. С. 602–608.
2. Возженников О.И., Жуков Г.П. Статистический режим флуктуаций концентрации примеси от локального источника в приземном слое атмосферы // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1981. Т. 17. N 6. С. 580–586.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1966. 728 с.
4. Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М. Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1992. 124 с.
5. Жуков Г.П. Экспериментальная оценка функции распределения флуктуаций концентрации в струе примеси от стационарного точечного источника в приземном слое атмосферы // Тр. ИЭМ. 1988. Вып. 46. С. 96–106.
6. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. Л.: Гидрометеоздат, 1991. 280 с.

A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, N.A. Lapteva. **The Definition of the First Moments of Time in Exceeding the Given Level of Atmospheric Pollutant Concentration.**

On the basis of the previously obtained probability density function for pollutant concentration dispersing in the atmosphere, the problem on determination of mathematical expectation of frequency of the exceeding the given threshold value and the duration of such exceeding are considered. For these parameters the equations have been derived, the calculations by which agree well with the experimental data obtained by Vozzhennikov and Zhukov. The «transition» and «equilibrium» regimes of the concentration pulsation, found by those authors, demonstrate an agreement with various values of the pollutant concentration intermittence.