

В.Г. Ошлаков, Ю.Г. Борков

Численный анализ аппаратной матрицы поляризационного измерителя

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 8.01.2002 г.

Рассмотрена оптимизация измерителя параметров вектора Стокса и 16 элементов матрицы рассеяния. Измерение параметров вектора Стокса и элементов матрицы рассеяния производится с максимальной точностью при наличии ошибок входных данных. Измеритель отличается простотой управления поляризационными элементами. Точность измерения параметров вектора Стокса и матрицы рассеяния зависит от числа обусловленности аппаратной матрицы $\text{cond } M$. С помощью численного анализа определены точки, в которых $\text{cond } M$ минимально, а также влияние отклонения от них на величину $\text{cond } M$.

В измерителе параметров вектора Стокса \mathbf{S} излучения [1] и в оптимальном измерителе матрицы рассеяния среды D [2, 3] точность измерений определяется аппаратными матрицами M и W . В оптимальных измерителях число обусловленности матрицы M $\text{cond } M$ и матрицы W $\text{cond } W$ должно быть минимальным [1–3].

После опубликования [1] значительно возросли возможности вычислительной техники, что позволило провести численный анализ аппаратных матриц M и W более глубоко, результаты которого излагаются в данной статье. Будем придерживаться обозначения параметров I, Q, U, V вектора Стокса \mathbf{S} , как это принято в [4, 5]. Расположение элементов измерителя параметров вектора Стокса \mathbf{S} показано на рис. 1.

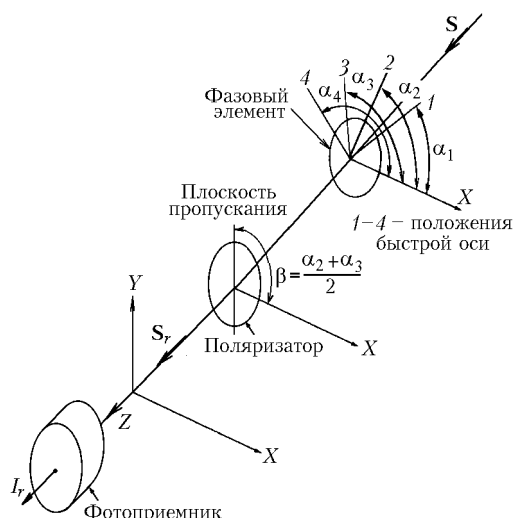


Рис. 1. Измерение вектора Стокса \mathbf{S} по четырем положениям быстрой оси фазового элемента

Вектор Стокса $\mathbf{S}_r = (I_r \ Q_r \ U_r \ V_r)^T$, где T – знак транспонирования, излучения на выходе поляризационного блока приемника определяется выражением

$$\mathbf{S}_r = P_r P_r' \mathbf{S}, \quad (1)$$

где P_r, P_r' – матрицы Мюллера поляризатора и фазового элемента соответственно; $\mathbf{S} = (I \ Q \ U \ V)^T$ – вектор Стокса излучения в системе координат приемника X, Y .

Сигнал I_r на выходе фотоприемника (с учетом коэффициента пропорциональности равен фототоку чувствительного элемента фотоприемника) определяется из (1) в виде

$$I_r = \frac{1}{2} \{ I + Q [\cos 2\alpha \cos 2(\alpha - \beta) + \cos \tau \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta)] + U [\sin 2\alpha \cos 2(\alpha - \beta) - \cos \tau \cos 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta)] - V \sin \tau \sin 2(\alpha - \beta) \}, \quad (2)$$

где β – угол ориентации плоскости пропускания поляризатора относительно оси X системы координат приемника; α – угол ориентации быстрой оси фазового элемента относительно оси X ; τ – сдвиг фаз ортогональных компонент, осуществляемый фазовым элементом.

При $\beta = \pi/2$ (2) принимает вид

$$I_r = \frac{1}{2} [I - \frac{Q}{2} (1 + \cos \tau) - \frac{Q}{2} (1 - \cos \tau) \cos 4\alpha - \frac{U}{2} (1 - \cos \tau) \sin 4\alpha + V \sin \tau \sin 2\alpha]. \quad (2a)$$

Функции $f_I(\alpha) = I - Q(1 + \cos \tau)/2$, $f_Q(\alpha) = [(1 - \cos \tau) \cos 4\alpha]/2$, $f_U(\alpha) = [(1 - \cos \tau) \sin 4\alpha]/2$, $f_V(\alpha) = \sin \tau \sin 2\alpha$ принадлежат к последовательности Чебышева, поскольку определитель Вронского

$$W = [I - \frac{Q}{2} (1 - \cos \tau)] \frac{(1 - \cos \tau)^2}{4} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos 4\alpha & \sin 4\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & -4 \sin 4\alpha & 4 \cos 4\alpha & 2 \cos 2\alpha \\ 0 & -16 \cos 4\alpha & -16 \sin 4\alpha & -4 \sin 2\alpha \\ 0 & 64 \sin 4\alpha & -64 \cos 4\alpha & -8 \cos 2\alpha \end{vmatrix} = [I - \frac{Q}{2} (1 - \cos \tau)] \frac{(1 - \cos \tau)^2 \sin \tau}{4} (2048 - 512 \cos 2\alpha)$$

не равен нулю ни при каком значении α [6].

Измеряя I_r при четырех значениях α , получим систему четырех линейно-независимых уравнений [1, 2], из которой можно определить \mathbf{S} . Запишем уравнения этой системы в виде

$$I_{ri} = \frac{1}{2} (M_{i1}I + M_{i2}Q + M_{i3}U + M_{i4}V), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (3)$$

где

$$M_{i1} = 1,$$

$$M_{i2} = \cos 2\alpha_i \cos 2(\alpha_i - \beta) + \cos \tau \sin 2\alpha_i \sin 2(\alpha_i - \beta),$$

$$M_{i3} = \sin 2\alpha_i \cos 2(\alpha_i - \beta) - \cos \tau \cos 2\alpha_i \sin 2(\alpha_i - \beta),$$

$$M_{i4} = -\sin \tau \sin 2(\alpha_i - \beta).$$

Система уравнений (3) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{I}_r = \frac{1}{2} M \mathbf{S}, \quad (4)$$

где $\mathbf{I}_r = (I_{r1} I_{r2} I_{r3} I_{r4})^T$; $\mathbf{S} = (I Q U V)^T$ – вектор Стокса в системе координат X, Y ; M – матрица размера $[4 \times 4]$ с элементами $M_{i1}, M_{i2}, M_{i3}, M_{i4}, i = \overline{1, 4}$.

Определитель матрицы M не равен нулю при любых значениях $\alpha_i, i = \overline{1, 4}$, что является свойством определителя, образованного функциями последовательности Чебышева.

\mathbf{I}_r и элементы матрицы M называются входными данными в задаче определения \mathbf{S} .

Уравнение (2) соответствует идеальному поляризатору и идеальному фазовому элементу с точно измеренными α, β, τ, I_r . Матрицы Мюллера \tilde{P}'_r и \tilde{P}_r реальных фазового элемента и поляризатора приближенно описываются P'_r и P_r , а параметры α, β, τ отличаются от реальных $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\tau}$ вследствие ошибок измерения. \mathbf{I}_r отличается от точного $\tilde{\mathbf{I}}_r$ вследствие ошибок измерителя I_r .

Поэтому мы не можем определить точное значение вектора Стокса \mathbf{S} из системы уравнений

$$\tilde{\mathbf{I}}_r = \frac{1}{2} \tilde{M} \tilde{\mathbf{S}}, \quad (5)$$

где \tilde{M} – матрица размера $[4 \times 4]$ с элементами $\tilde{M}_{i1} = M_{i1} + \Delta M_{i1}$, $\tilde{M}_{i2} = M_{i2} + \Delta M_{i2}$, $\tilde{M}_{i3} = M_{i3} + \Delta M_{i3}$, $\tilde{M}_{i4} = M_{i4} + \Delta M_{i4}; i = \overline{1, 4}$; $\tilde{\mathbf{I}}_r = \mathbf{I}_r + \Delta \mathbf{I}_r$; $\Delta M_{i1}; \Delta M_{i2}; \Delta M_{i3}; \Delta M_{i4}; i = \overline{1, 4}$ – погрешности определения элементов \tilde{M} ; $\Delta \mathbf{I}_r$ – вектор погрешности измерения $\tilde{\mathbf{I}}_r$.

Обозначим решение (5) через $\tilde{\mathbf{S}}$, являющееся точным значением измерения вектора Стокса.

Из (4) мы определяем вектор Стокса \mathbf{S} , отличающийся от $\tilde{\mathbf{S}}$ погрешностью $\Delta \mathbf{S}$. С учетом введенных погрешностей (5) запишется в виде

$$\mathbf{I}_r + \Delta \mathbf{I}_r = \frac{1}{2} (M + \Delta M)(\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}), \quad (6)$$

где $\Delta M = \tilde{M} - M$; $\Delta \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{S}$.

Из-за погрешностей нам не дано знать (5), мы можем решить только (4). Очень важно, что (4) имеет решение при любых $\alpha_i, i = \overline{1, 4}$, τ, β , а погрешно-

сти ΔM и $\Delta \mathbf{I}_r$ могут быть оценены. Уменьшая погрешности теоретически до любой малой величины путем увеличения точности измерения α, β, τ и улучшения технологий изготовления фазовых элементов и поляризаторов, приближающих их к идеальным, (5) будет приближаться к системе уравнений (4). \mathbf{S}, \mathbf{I}_r являются векторами 4-мерного действительного арифметического евклидова пространства.

Тогда при $\|\Delta M\| \|M^{-1}\| < 1$ (условие малости погрешностей) имеет место соотношение [7]:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{S}\|}{\|\mathbf{S}\|} \leq \frac{\text{cond } M}{1 - \text{cond } M} \left(\frac{\|\Delta M\|}{\|M\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{I}_r\|}{\|\mathbf{I}_r\|} \right), \quad (7)$$

где $\|\dots\|$ – знак нормы вектора (матрицы); $\text{cond } M = \|M\| \|M^{-1}\|$ – число обусловленности матрицы M . Выбор той или иной конкретной нормы в практических задачах диктуется тем, какие требования предъявляются к точности решения. Выбор евклидовой нормы

$$\|\Delta \mathbf{S}\|_2 = (\Delta I^2 + \Delta Q^2 + \Delta U^2 + \Delta V^2)$$

соответствует критерию малости среднеквадратичной ошибки. Евклидово пространство, к которому принадлежат \mathbf{S}, \mathbf{I}_r , является полным, поэтому при выборе любой нормы уменьшение $\|\Delta \mathbf{S}\|$ ведет к повышению точности определения \mathbf{S} . В оптимальном измерителе система (4) должна быть хорошо обусловлена, т.е. ее решение должно быть малочувствительным к ошибкам или к неопределенности входных данных.

Из (7) следует, что относительные возмущения $\delta M = \frac{\|\Delta M\|}{\|M\|}$, $\delta I_r = \frac{\|\Delta \mathbf{I}_r\|}{\|\mathbf{I}_r\|}$ складываются линейно, а

следовательно, минимум $\delta S = \frac{\|\Delta \mathbf{S}\|}{\|\mathbf{S}\|}$ обеспечивается

при минимуме $\delta M, \delta I_r, \text{cond } M$.

Таким образом, в оптимальном измерителе число обусловленности матрицы M минимально, с высокой точностью измеряются параметры τ, α, β , а матрицы Мюллера поляризационных элементов мало отличаются от матриц Мюллера идеальных поляризационных элементов.

Расположение элементов оптимального измерителя матрицы рассеяния показано на рис. 2.

Матрицы рассеяния D связывают вектор Стокса излучения источника $\mathbf{S}_s = (I_n Q_n U_n V_n)^T$ и вектор Стокса рассеянного излучения $\mathbf{S} = (I Q U V)^T$, падающего на приемник соотношением

$$\mathbf{S} = D \mathbf{S}_s. \quad (8)$$

Для определения 16 элементов матрицы рассеяния достаточно 16 независимых уравнений, и если учесть, что каждый тип поляризации источника содержит 4 параметра Стокса, то достаточно, чтобы источник создавал 4 типа поляризации [2, 3]. Эту систему запишем в виде

$$\mathbf{S}_j = D \mathbf{S}_{sj}, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (9)$$

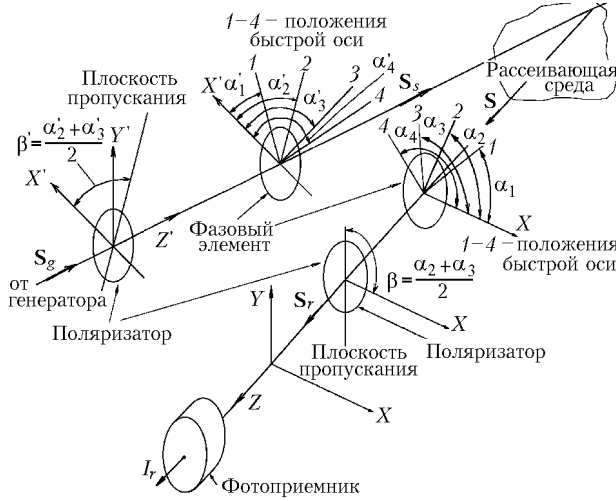


Рис. 2. Оптимальный измеритель матрицы рассеяния

Образум из параметров \mathbf{S}_{sj} , $j = \overline{1, 4}$, матрицу

$$W = \begin{pmatrix} I_{s1} & Q_{s1} & U_{s1} & V_{s1} \\ I_{s2} & Q_{s2} & U_{s2} & V_{s2} \\ I_{s3} & Q_{s3} & U_{s3} & V_{s3} \\ I_{s4} & Q_{s4} & U_{s4} & V_{s4} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Сгруппируем систему (9) в четыре системы, каждая из которых определяет строку матрицы D :

$$W\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}_W; \quad W\mathbf{D}_2 = \mathbf{Q}_W; \quad W\mathbf{D}_3 = \mathbf{U}_W; \quad W\mathbf{D}_4 = \mathbf{V}_W, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{D}_m^T = (D_{m1} \ D_{m2} \ D_{m3} \ D_{m4}), \quad m = \overline{1, 4}$$

– m -я строка матрицы D ;

$$\mathbf{I}_W = (I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4)^T; \quad \mathbf{Q}_W = (Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4)^T;$$

$$\mathbf{U}_W = (U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4)^T; \quad \mathbf{V}_W = (V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4)^T$$

– векторы, составленные из параметров векторов

$$\mathbf{S}_j = (I_j \ Q_j \ U_j \ V_j)^T, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Для систем (11) W , \mathbf{I}_W , \mathbf{Q}_W , \mathbf{U}_W , \mathbf{V}_W являются входными данными. Все, что было сказано выше для системы (4), в полной мере относится к системам (11). Таким образом, в оптимальном измерителе матрицы рассеяния число обусловленности матрицы W минимально, с высокой точностью измеряются параметры τ' , α' , β' ; матрицы Мюллера поляризационных элементов мало отличаются от матриц Мюллера идеальных поляризационных элементов.

Учитывая, что

$$\mathbf{S}_{sj} = (I_{sj} \ Q_{sj} \ U_{sj} \ V_{sj})^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha'_j \cos 2(\alpha'_j - \beta') + \cos \tau' \sin 2\alpha'_j \sin 2(\alpha'_j - \beta') \\ \sin 2\alpha'_j \cos 2(\alpha'_j - \beta') - \cos \tau' \cos 2\alpha'_j \sin 2(\alpha'_j - \beta') \\ \sin \tau' \sin 2(\alpha'_j - \beta') \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где β' – угол ориентации плоскости пропускания поляризатора относительно оси X' ; α'_j – угол ориентации быстрой оси фазового элемента относительно оси X' , и сравнивая (12) и (3), видим, что матрицы W и M отличаются знаком в четвертом столбце при $\alpha'_j = \alpha_j$, $\beta' = \beta$ и $\tau' = \tau$.

Матрица W также не вырождена при любых значениях α'_j , $j = \overline{1, 4}$, τ' , β' .

Матрица, обратная M , определяется в виде

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix},$$

где A_{mn} – алгебраическое дополнение элемента M_{mn} матрицы M ; $|M|$ – определитель матрицы M .

Тогда при $\alpha'_j = \alpha_j$, $\beta' = \beta$ и $\tau' = \tau$

$$W = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & -M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & -M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & -M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & -M_{44} \end{pmatrix}, \quad |W| = -|M|,$$

$$W^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & -A_{44} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Вычислять норму $\|M\|_2$, подчиненную евклидовой норме вектора, трудно, так как для этого нужно искать собственные числа матрицы $M^T M$.

Евклидова норма матрицы $\|M\|_E$ вычисляется проще:

$$\|M\|_E = \sqrt{\sum_{m,n}^4 M_{mn}^2}. \quad (14)$$

Используя (14), получаем

$$\|M\|_E = \|W\|_E, \quad \|M^{-1}\|_E = \|W^{-1}\|_E, \quad \text{и}$$

$$\text{cond } M = \|M\|_E \|M^{-1}\|_E = \|W\|_E \|W^{-1}\|_E = \text{cond } W,$$

поэтому ограничимся анализом $\text{cond } M$.

$\text{Cond } M$ является функцией параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$, т.е. $\text{cond } M = f(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau)$. Задачей численного анализа аппаратной матрицы M является нахождение параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$, обеспечивающих минимум $\text{cond } M$.

Известно, что евклидова норма матрицы

$$\|M\|_E \geq \|M\|_2, \quad (15)$$

поэтому

$$\|M\|_E \|M^{-1}\|_E \geq \|M\|_2 \|M^{-1}\|_2. \quad (16)$$

Для поиска минимума $\text{cond } M = f(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau)$ будем использовать евклидову норму матрицы $\|M\|_E$, так как это проще, а найденное значение минимума $\text{cond } M$ больше или равно $\text{cond } M$, найденному с использованием $\|M\|_2$, а это, в соответствии с (7), приводит к увеличению ожидаемых погрешностей $\sqrt{\Delta I^2 + \Delta Q^2 + \Delta U^2 + \Delta V^2}$ и не ухудшает расчета точностных характеристик прибора.

Матрицу D можно вычислить из одной системы уравнений, если ввести матрицу K размера $[16 \times 16]$.

Обозначим

$$I_{rij} = (I_{r11} \dots I_{r14} I_{r21} \dots I_{r24} I_{r31} \dots I_{r34} I_{r41} \dots I_{r44})^T,$$

где I_{rij} – значение сигнала I_r при i -м положении фазового элемента приемника и j -м положении фазового элемента источника;

$$D_{mn} = (D_{11} \dots D_{14} D_{21} \dots D_{24} D_{31} \dots D_{34} D_{41} \dots D_{44})^T,$$

где D_{mn} – элемент на пересечении m -й строки и n -го столбца матрицы D .

Тогда $K D_{mn} = I_{rij}$, где $K = M \otimes W$ – кронекеровское (прямое) произведение M и W .

Используя соотношения [7]:

$$\|M\|_E = \sqrt{\text{Sp} M^T M},$$

где $\text{Sp} M^T M$ – шпур (след) матрицы $M^T M$; $K^T = M^T \otimes W^T$; $K^{-1} = M^{-1} \otimes W^{-1}$; $(M^T \otimes W^T) (M \otimes W) = (M^T M) \otimes (W^T W)$, $\text{Sp}[(M^T M) \otimes (W^T W)] = \text{Sp} M^T M \text{Sp} W^T W$, можно записать

$$\begin{aligned} \text{cond } K &= \|K\|_E \|K^{-1}\|_E = \sqrt{\text{Sp} K^T K \text{Sp} (K^{-1})^T K^{-1}} = \\ &= \sqrt{\text{Sp} M^T M \text{Sp} W^T W \text{Sp} (M^{-1})^T M^{-1} \text{Sp} (W^{-1})^T W^{-1}} = \\ &= \sqrt{\text{Sp} M^T M \text{Sp} (M^{-1})^T M^{-1}} \sqrt{\text{Sp} W^T W \text{Sp} (W^{-1})^T W^{-1}} = \\ &= \text{cond } M \text{cond } W. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{cond } K$ достигает минимума, когда достигают минимума $\text{cond } M$ и $\text{cond } W$.

Поиск строго минимума функции $\text{cond } M = f(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau)$ осуществлялся с использованием евклидовой нормы матрицы путем перебора с наперед заданным шагом изменения значений всех указанных переменных в диапазоне $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_4 \leq 180^\circ$, $0 < \tau < 180^\circ$ при $\beta = 90^\circ$. После того, как находилось минимальное значение $\text{cond } M$ среди узловых точек сетки значений переменных при данном шаге изменения их значений, проводилось уменьшение шага изменения переменных и проводился снова перебор значений всех указанных переменных в небольшой области вокруг найденной ранее узловой точки сетки значений переменных и снова находилась узловая точка значений переменных, в которой значение $\text{cond } M$ минимальное. Уменьшение шага продолжалось до тех пор, пока в найденной узловой точке $x^{(0)} = \{\alpha_1 = 38,54^\circ; \alpha_2 = 75,14^\circ; \alpha_3 = 105,38^\circ; \alpha_4 = 141,857^\circ; \beta = 90^\circ; \tau = 131,795^\circ\}$ с достаточной точностью не выполнилось условие

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial \beta} = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial \tau} = 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Для этого построены графики $\text{cond } M = f(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau)$ по каждой переменной (рис. 3), при значениях остальных переменных, взятых из $x^{(0)} = \{\alpha_1 = 38,54; \alpha_2 = 75,14; \alpha_3 = 105,38; \alpha_4 = 141,857^\circ; \beta = 90^\circ; \tau = 131,795^\circ\}$.

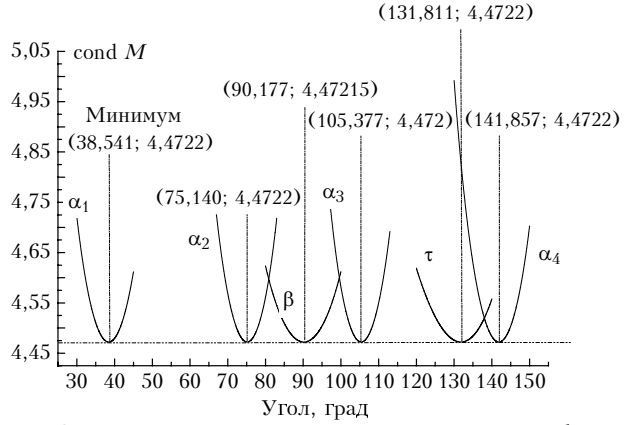


Рис. 3. Численное исследование на экстремум $\text{cond } M = f(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau)$ по каждой переменной в точке $x^{(0)}$

Рис. 3 показывает хорошую близость $x^{(0)}$ к точке строгого минимума $\text{cond } M$, поскольку значения экстремумов по каждой переменной и значения переменных в точках экстремумов близки к $x^{(0)}$. Значения $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ могут быть установлены с той или иной точностью близкими к их значениям в $x^{(0)}$. Исследование чувствительности $\text{cond } M$ к отклонению $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от оптимальных значений позволит обосновать требования к точности их установки относительно $x^{(0)}$. Под точностью установки понимается точность выполнения механической операции, затем установленное значение параметра может быть изменено с любой наперед заданной точностью и, следовательно, с той же точностью определен $\text{cond } M$.

Кривая 1 (рис. 4) показывает возможное максимальное значение $\text{cond } M$ при $\beta = 90^\circ; \tau = 131,795^\circ$ и

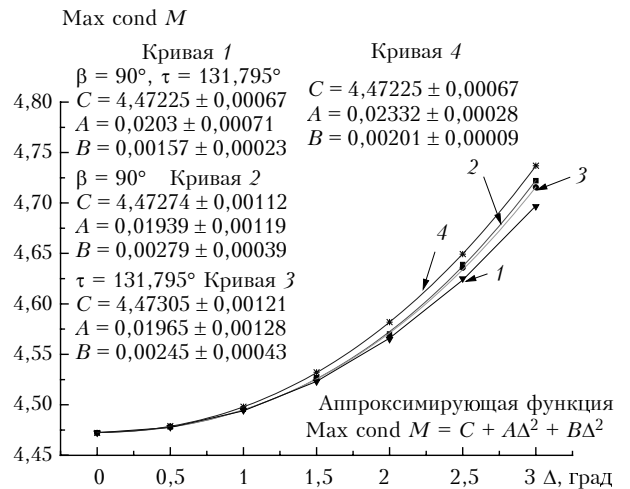


Рис. 4. Чувствительность $\text{cond } M$ к абсолютным отклонениям $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от их значений в точке строгого минимума $x^{(0)}$; $\min \text{cond } M = 4,472195$ в точке $x^{(0)}$

абсолютной погрешности Δ установки $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ от их значений в точке строгого минимума. Это соответствует случаю, когда параметры β, τ устанавливаются с очень высокой точностью, а параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ последовательно устанавливаются в процессе измерения с меньшей точностью. Выясним, какое максимальное значение $\text{cond } M$ может быть при этом. При расчете определялось максимальное значение $\text{cond } M$ среди узловых точек сетки значений переменных для $\beta = 90^\circ$ и $\tau = 131,795^\circ$ при переборе с наперед заданным шагом изменения значений переменных в диапазоне $\alpha_1 = 38,54^\circ \pm \Delta$; $\alpha_2 = 75,14^\circ \pm \Delta$; $\alpha_3 = 105,38^\circ \pm \Delta$; $\alpha_4 = 141,857^\circ \pm \Delta$.

Кривая 2 (рис. 4) показывает возможное максимальное значение $\text{cond } M$ при $\beta = 90^\circ$ и абсолютной погрешности Δ установки $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \tau$ от их значений в точке строгого минимума.

Кривая 3 (рис. 4) показывает возможное максимальное значение $\text{cond } M$ при $\tau = 131,795^\circ$ и абсолютной погрешности Δ установки $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta$ от их значений в точке строгого минимума.

Кривая 4 (рис. 4) показывает возможное максимальное значение $\text{cond } M$ при абсолютной погрешности Δ установки $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от их значений в точке строгого минимума. Это соответствует случаю, когда все параметры устанавливаются с отклонениями от их значений в точке строгого минимума, при этом максимальное значение $\text{cond } M$ может быть больше, чем в остальных случаях. Сравнение кривых 1-4 (рис. 4) показывает, что на величину максимально возможного значения $\text{cond } M$ больше влияет точность установки τ , чем точность установки β , но не оказывает решающего влияния на величину максимального $\text{cond } M$.

В настоящее время широко используются фазовые пластины, имеющие $\tau = 90^\circ$. По программе, описанной выше, при $\tau = 90^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ с последовательным уменьшением шага изменения значений переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ найдена точка $x^{(1)} = \{\alpha_1 = 38,137^\circ$; $\alpha_2 = 75,541^\circ$; $\alpha_3 = 104,379^\circ$; $\alpha_4 = 141,830^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\tau = 90^\circ\}$, в которой с достаточной точностью выполняется условие

$$\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial \beta} = 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Рис. 5 показывает хорошую близость $x^{(1)}$ точке минимума $\text{cond } M = f(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau = 90^\circ)$, поскольку значения экстремумов по каждой переменной и значения переменных в точках экстремумов близки к $x^{(1)}$.

Рис. 6 показывает влияние абсолютной погрешности Δ установки $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от их значений в точке $x^{(1)}$ на величину $\text{cond } M$. Сравнение рис. 6 и 4 показывает, что значение $\text{cond } M$ в точке $x^{(1)}$ больше, чем в точке $x^{(0)}$. Сравнение кривых 1-4 (рис. 6) показывает, что на величину максимального значения $\text{cond } M$ абсолютная погрешность установки τ относительно его значения в точке $x^{(1)}$ влияет сильнее, чем абсолютная погрешность установки β относительно его значения в точке $x^{(1)}$ и оказывает решающее влияние на максимальное значение $\text{cond } M$.

Если заложить в алгоритм управления поляризационным блоком условие постоянства шага изменения α , т.е. $\alpha_4 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, то значение точки

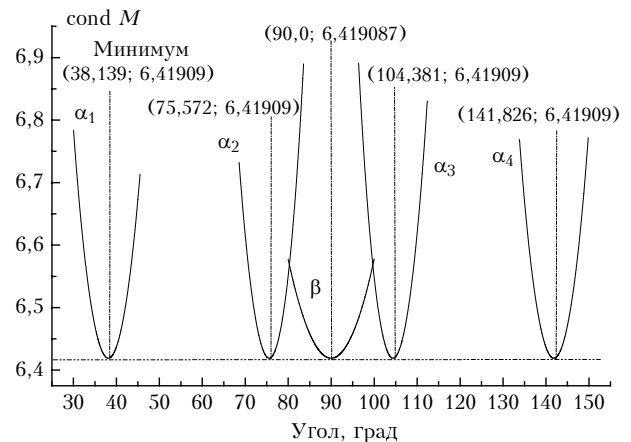


Рис. 5. Численное исследование на экстремум $\text{cond } M = f(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau = 90^\circ)$ по каждой переменной в точке $x^{(1)}$

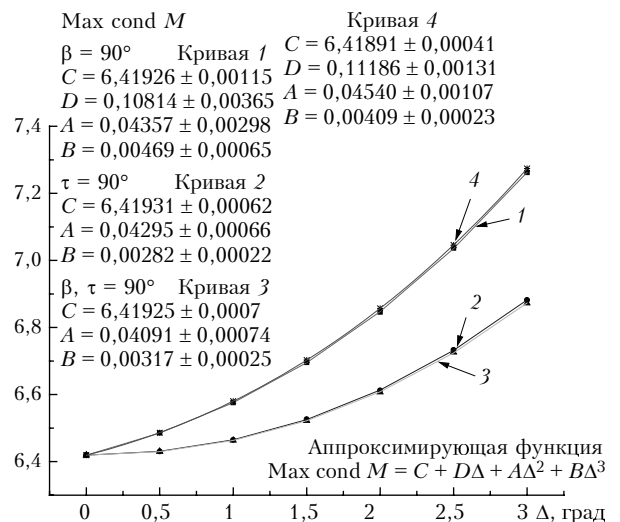


Рис. 6. Чувствительность $\text{cond } M$ к абсолютным отклонениям $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от их значений в точке $x^{(1)}$; $\min \text{cond } M = 6,419086$ в точке $x^{(1)}$

условного минимума $\text{cond } M$ при $\tau = 131,795^\circ$ $x^{(2)} = \{\alpha_1 = 39,3^\circ$; $\alpha_2 = 73,1^\circ$; $\alpha_3 = 106,9^\circ$; $\alpha_4 = 140,7^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\tau = 131,795^\circ\}$.

Кривые 1-4 (рис. 7) показывают влияние абсолютных погрешностей установки $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ относительно их значений в точке условного минимума $x^{(2)}$. Сравнение рис. 7 и 4 показывает незначительное увеличение $\text{cond } M$ в точке $x^{(2)}$ по сравнению с $x^{(0)}$. Сравнение кривых 2 и 3 (рис. 7) показывает, что на величину максимального возможного значения $\text{cond } M$ абсолютная погрешность установки τ относительно его значения в точке $x^{(2)}$ влияет сильнее, чем абсолютная погрешность установки β относительно его значения в точке $x^{(2)}$, но не имеет решающего значения.

Max cond M

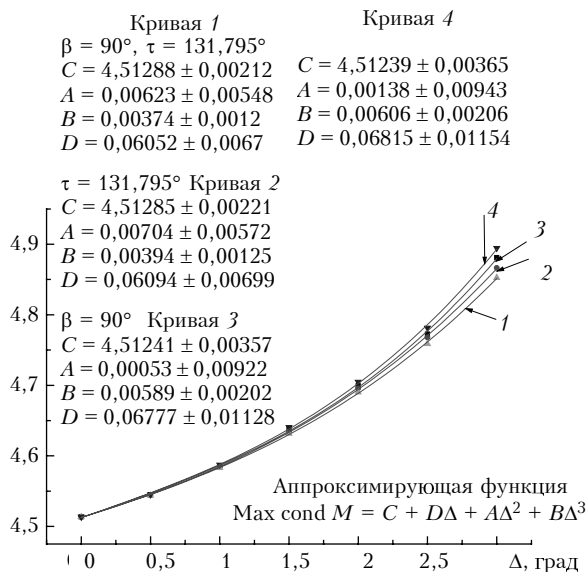


Рис. 7. Чувствительность $\text{cond } M$ к абсолютным отклонениям $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от их значений в точке условного минимума $x^{(2)}$; $\text{min cond } M = 4,513566$ в точке $x^{(2)}$

Если заложить в алгоритм управления поляризационным блоком условие постоянного шага изменения α , но при $\tau = 90^\circ$, то значение точки условного минимума $\text{cond } M$ $x^{(3)} = \{\alpha_1 = 39,9^\circ; \alpha_2 = 73,3^\circ; \alpha_3 = 106,7^\circ; \alpha_4 = 140,1^\circ; \beta = 90^\circ; \tau = 90^\circ\}$.

Кривые 1–4 (рис. 8) показывают влияние абсолютных погрешностей установки $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от их значений в точке условного минимума $x^{(3)}$. Значение $\text{cond } M$ в точке $x^{(3)}$ больше, чем значение $\text{cond } M$ в точках $x^{(2)}, x^{(1)}, x^{(0)}$, но незначительно отличается от значения $\text{cond } M$ в точке $x^{(1)}$. Сравнение кривых 2 и 3 (рис. 8) показывает, что на величину максимального возможного значения $\text{cond } M$ абсолютная погрешность установки τ относительно его значения в точке $x^{(3)}$ влияет сильнее, чем абсолютная погрешность установки β относительно его значения в точке $x^{(3)}$, и оказывает решающее влияние на величину максимального возможного значения $\text{cond } M$. Кривые рис. 4, 6–8 рассчитывались с шагом $\Delta = 0,5^\circ$. На каждом рисунке дана функция, аппроксимирующая рассчитанные таблицы, и коэффициенты аппроксимирующей функции для каждой кривой.

Расчеты показали, что для рассмотренных абсолютных погрешностей Δ максимальное значение $\text{cond } M$

Max cond M

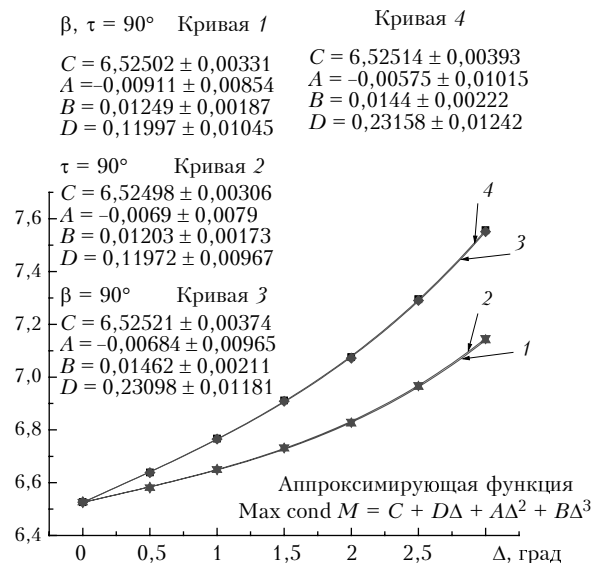


Рис. 8. Чувствительность $\text{cond } M$ к абсолютным отклонениям $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta, \tau$ от их значений в точке условного минимума $x^{(3)}$; $\text{min cond } M = 6,526094$ в точке $x^{(3)}$

находится в узловой точке сетки значений переменных, содержащей граничные значения диапазонов их возможных значений, определяемые Δ . Следовательно, повышение точности установки любого параметра всегда ведет только к уменьшению $\text{cond } M$, т.е. к повышению точности измерений.

В заключение авторы выражают признательность академику В.Е. Зуеву за поддержку, оказанную при выполнении работы.

1. Марьенко В.В., Молебная Т.В. // Оптико-механическая промышленность. 1990. № 7. С. 68–71.
2. Ошлаков В.Г. Оптимальный измеритель матрицы рассеяния // Оптика атмосф. и океана. 1992. Т. 5. № 11. С. 1190–1193.
3. Oshlakov V.G. Optimal measurer of scattering phase matrix // Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings. 1995. V. 111. P. 1776–1778.
4. Джеррард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 341 с.
5. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1959. 464 с.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.

V.G. Oshlakov, Yu.G. Borkov. Numerical analysis of apparatus matrix of the polarization meter.

Optimization of the meter of the Stokes vector parameters and 16 elements of the scattering phase function is considered. The measurements are made with maximum accuracy in the presence of errors of the initial data. The meter is simple in controlling the polarization elements. The measurement accuracy depends on the condition number of the apparatus matrix $\text{cond } M$. The numerical analysis determines the points in which $\text{cond } M$ is minimum as well as the effect of deviation from them on the $\text{cond } M$ magnitude.