«Оптика атмосферы», **4**, № 7 (1991)

УДК 522.617 : 535.3

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

К.Р. Лозин, А.Д. Ряхин

ПОДАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТА НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрены искажения изображения при его дискретизации с частотой, меньшей частоты Найквиста. Показана целесообразность предварительной низкочастотной фильтрации изображений. Предложен метод восстановления по нескольким изображениям, дискретизованным со смещением, позволяющим уменьшить эффекты наложения спектров.

Аналого-цифровое преобразование изображений, заключающееся в пространственной дискретизации и квантовании интенсивности их распределений, является обязательной операцией современных оптиковычислительных комплексов. Точность ее выполнения во многом определяет возможности последующей обработки изображений. Так, если формирующая изображение оптическая система характеризуется угловым разрешением λ/D, где λ — длина волны светового излучения, D — диаметр апертуры системы, то для сохранения информации с этим разрешением шаг дискретизации Δ не должен превышать величину $\Delta_0 = \lambda/2D$. Это условие известно как критерий Найквиста. При его нарушении происходит наложение спектров изображения, проявляющееся в искажении мелких деталей и известное под названием муар-эффекта [1].В настоящей статье рассмотрим некоторые возможности компенсации этого эффекта. При этом ради простоты математических выкладок ограничимся одномерным анализом.

В случае одномерного дискретизатора выходное распределение $I_д(x)$ связано с исходным распределением изображения $I_0(x)$ как

$$I_Д(x) = I_0(x) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta) . \tag{1}$$

Для соответствующих Фурье спектров, определяемых по правилу вида

$$\tilde{I}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx I(x) \exp\{2\pi i f x\}, \tag{2}$$

из (1) следует соотношение

$$\tilde{I}_Д(f) = \Delta^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I_0(f - j\Delta^{-1}) , \tag{3}$$

то есть спектр дискретизованного изображения получается бесконечным повторением спектра исходного изображения со сдвигом на величины, кратные Δ^{-1}. Поскольку спектр оптического изображения отличен от нуля только при $|f| \le f_D$, где $f_D = D/\lambda$ — дифракционная частота отсечки, то при выполнении условия Найквиста $\Delta \le \Delta_0$, где $\Delta_0 = (2f_D)^{-1}$, слагаемое нулевого порядка в (3) легко выделить, например, пропуская $I_д(f)$ через фильтр низких частот $\tilde{P}_0(f)$, равный единице в области $|f| < (2\Delta)^{-1}$ и нулю вне ее. В результате можно восстановить исходное изображение. В случае $\Delta > \Delta_0$ происходит наложение слагаемых нулевого и высших порядков. Это приводит к искажению информации на частотах, определяемых неравенством $(\Delta^{-1} - f_0) < |f| \le f_D$, и проявляется в появлении на изображении ложных деталей. Эффект наложения можно устранить, если перед дискретизацией изображение пропустить через упомянутый выше фильтр низких частот [1]. При этом будет потеряна информация на частотах $\Delta^{-1}/2 < |f|^{-1} \le f_D$. Поскольку $\Delta^{-1/2} > (\Delta^{-1} - f_D)$, то полученное таким образом изображение оказывается более точной версией исходного.

Считается, что в реальных системах подобная низкочастотная фильтрация осуществляется естественным образом за счет усреднения значений интенсивности в пределах фоточувствительной поверхности элементарного датчика дискретизатора (регистратора). Математически это эквивалентно дискретизации не $I_0(x)$, а сглаженного распределения

$$I(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy I_0(y)\, P(x-y), \tag{4}$$

где $P(x)$ — эффективная функция отклика датчика. Для спектра $\tilde{I}(f)$ из (4) следует равенство

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}_0(f) \cdot \tilde{P}(f). \tag{5}$$

Обычно полагают $P(x)$ равным Δ^{-1} в пределах области $|x| \le \Delta/2$ и нулю вне ее, так что для $\tilde{P}(f)$ оказывается справедливым выражение

$$\tilde{P}(f) = \frac{\sin \pi f \Delta}{\pi f \Delta}. \tag{6}$$

Такой фильтр действительно уменьшает искажения при наложении спектров, но одновременно он ослабляет неискаженную часть. В результате качество изображения может оказаться столь же низким. На рис. 1 для иллюстрации представлены результаты математического эксперимента.

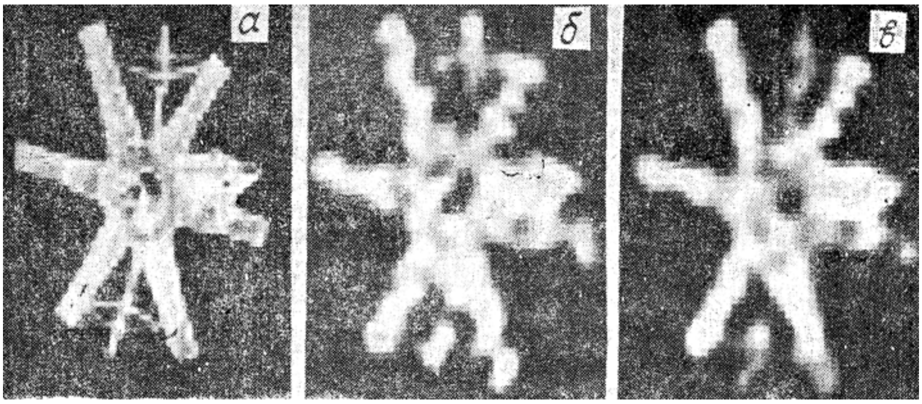

Рис. 1. Результаты дискретизации изображения: *а* — исходное модельное изображение; *б* — его простая выборка через отсчет, *в* — выборка со сглаживанием по элементам 2×2

Исходное изображение *а*, задаваемое массивом чисел размером 64×64 при $\Delta_0 = 1$, было дискретизовано с шагом $\Delta = 2$ двумя различными способами: *б* — простой выборкой через шаг, *в* — с предварительным пропусканием через фильтр $P(f_x) \cdot P(f_y)$. Нормированная ошибка ε изображений *б* и *в* по сравнению с *а* определяется как

$$\varepsilon = \frac{\int |I_0(f) - I_Д(f)|^2 \mathrm{d}f}{\int |I_0(f)|^2 \mathrm{d}f}. \tag{7}$$

Эта ошибка оказалась равной для изображений *б* и *в* соответственно 0,163 и 0,167. Необходимо отметить, что в любом случае эффективное разрешение в изображении не лучше 2Δ.

Можно предложить иной способ уменьшения ошибок наложения спектров. Он основан на использовании нескольких версий исходного изображения, полученных при различных относительных положениях дискретизатора и исходного изображения. Так, если дискретизатор смещен на величину 0, то для спектра нового изображения справедливо соотношение

$$\tilde{I}^{\theta}_Д(f) = \Delta^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{I}_0(f - j\Delta^{-1}) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\Delta} j\theta\right\}. \tag{8}$$

При известном θ и $2\Delta_0 \ge \Delta > \Delta_0$, когда на каждой частоте f в (3) и (8) присутствует не более двух слагаемых, (3) и (8) можно рассматривать как систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных. Решение этой системы позволяет точно найти исходный спектр $\tilde{I}_0(f)$. В частности, при $\theta = \Delta/2$ справедливо равенство

$$\tilde{I}_0(f) = \frac{1}{2}\left\{\tilde{I}^{0}_Д(f) + \tilde{I}^{\Delta/2}_Д(f)\right\}. \tag{9}$$

Если величина θ случайна, но равномерно распределена в интервале $\left(-\frac{\Delta}{2};\frac{\Delta}{2}\right)$, то для приближенного восстановления $\tilde{I}_0(f)$ достаточно усреднить (8) по серии реализаций. Поскольку

$$<\exp\left(-\frac{2\pi i}{\Delta}j\theta\right)> = \begin{cases}1, \text{ при } j=0,\\ 0, \text{ при } j\neq 0,\end{cases} \tag{10}$$

то

$$<\tilde{I}_д^{\theta}(f)> = I(f). \tag{11}$$

В случае, когда на θ смещается не дискретизатор, а само изображение, спектр равен

$$\tilde{I}_д^{\theta}(f) = \Delta^{-1}\exp\{2\pi i f\theta\}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\tilde{I}_0(f-j\Delta^{-1})\exp\left\{-\frac{2\pi i}{\Delta}j\theta\right\}, \tag{12}$$

При известном θ для нахождения $\tilde{I}_0(f)$ опять необходимо разрешить систему уравнений (3) и (12), а при случайном и равномерно распределенном — усреднять спектры. Однако в отличие от (11) усреднению подлежат не сами спектры, а произведение вида $\tilde{I}_д^{\theta}(f)\exp\{-2\pi i f\theta\}$, иначе в результате усреднения мы придем к спектру вида (3) дискретизованного изображения. Для оценки величины θ в этом случае можно использовать метод определения сдвига центра тяжести распределения. Этот метод основан на измерении смещения центра тяжести сдвинутого изображения относительно исходного. Центр тяжести изображения находится по формуле:

$$x_{ц.т.} = \left(\int\int x\cdot \tilde{I}_{\Delta}^{\theta}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\Big/\left(\int\int \tilde{I}_{\Delta}^{\theta}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right), \tag{13}$$

$$y_{ц.т.} = \left(\int\int y\cdot \tilde{I}_{\Delta}^{\theta}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\Big/\left(\int\int \tilde{I}_{\Delta}^{\theta}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right), \tag{14}$$

Ошибка определения центра тяжести данным методом мала при шаге дискретизации $\Delta \le 2\Delta_0$. Действительно, интегралы, стоящие в правой части равенств (13) и (14), можно рассматривать как преобразование Фурье в точке $f_x = 0$, $f_y = 0$, а значение ложных спектров в этой точке при $\Delta \le 2\Delta_0$ равно 0. Если $\Delta > 2\Delta_0$, то ошибка в определении центра тяжести растет с увеличением Δ. Рис. 2 иллюстрирует данный метод.

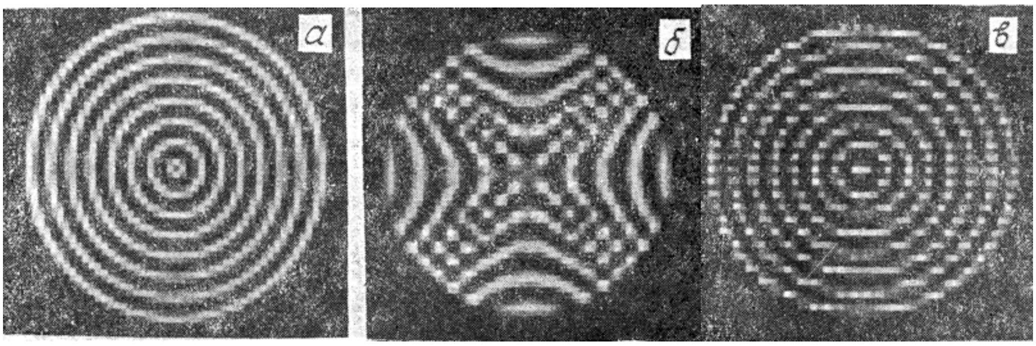

Рис. 2. Результаты восстановления по смещенным дискретизованным изображениям: *а* — исходное модельное изображение; *б* — его характерная выборка через отсчет, *в* — восстановленное изображение по 50 смещенным выборкам вида *б*

Так, на рис. 2, *а* показано исходное изображение, *б* — изображение при $\Delta = 2\Delta_0$, *в* — результат восстановления по 50 подобным изображениям. Ошибка ε равна соответственно 0,413 и 0,147. Таким образом, путем обработки нескольких изображений, дискретизованных с шагом Δ, возможно восстановление изображения, соответствующего шагу дискретизации по крайней мере Δ/2.

1. П р е т т У . Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1983.
2. М а к с Ж . Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983.

Научно-производственное объединение«Астрофизика»,
Москва

Поступила в редакцию
16 октября 1990 г.

K. R. Lozin, A. D. Ryakhin. **Compensation for the Moire-Effect in Image Sampling**.

The discrete image degradation by moire-effect is considered. Usefulness of the low-frequency image filtration is demonstrated. The new method of image restoration from few discrete images which are shifted before sampling is proposed.