

**В.В. Веретенников**

## **К ТЕОРИИ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХ ЛИДАРОВ**

Выполнен теоретический анализ задачи интерпретации данных лазерного зондирования атмосферы при использовании двух неподвижных лидаров с угловым сканированием исследуемой области. Получено аналитическое решение, определяющее двумерное пространственное распределение коэффициентов ослабления и обратного рассеяния, не требующее использования дополнительной информации о функциональной зависимости между оптическими характеристиками. Предлагаемое решение может быть использовано при разработке новых численных алгоритмов лазерного томографического зондирования атмосферы с угловым сканированием.

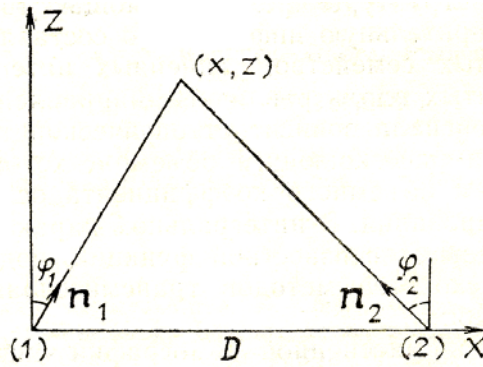
**1. Введение.** При исследовании структуры среды с помощью томографических методов исходную измерительную информацию составляет совокупность проекций, образованных семейством линейных интегралов от искомой характеристики, взятых вдоль различных направлений. Как известно, значение лидарного сигнала зависит от оптической толщины атмосферы между лидаром и рассеивающим объемом, которая также определяется интегрированием объемного коэффициента ослабления излучения вдоль трассы зондирования. В интегральном характере зависимости регистрируемых сигналов от неизвестной функции, подлежащей определению, проявляется сходство методов трансмиссионной томографии и лазерного зондирования.

В отличие от традиционной трансмиссионной томографии лидарный сигнал определяется оптической толщиной до рассеивающего объема, как функцией от глубины проникновения зондирующего импульса в исследуемую среду. Данной информации могло быть вполне достаточно для восстановления пространственного распределения коэффициента ослабления без проведения измерений вдоль различных направлений, если бы лидарный сигнал не зависел мультипликативно также еще от одной неизвестной функции — объемного коэффициента рассеяния излучения в направлении назад. Поэтому в рассматриваемом случае задача состоит в восстановлении пространственного распределения двух оптических характеристик среды — объемных коэффициентов ослабления и рассеяния назад из совокупности данных лазерного зондирования по моностатической схеме. Как правило, при решении подобных задач используется дополнительная априорная информация о функциональной взаимосвязи между искомыми оптическими характеристиками либо вводятся упрощающие предположения об их пространственной структуре. К настоящему времени создана развитая теория решения обратных задач лазерного зондирования атмосферы (см., например, обзор [1]).

Томографический подход к проблеме лидарного зондирования атмосферы, связанный с получением измерительной информации об исследуемом объеме из локационных сигналов, приходящих с различных направлений, впервые предложен в работе [2] применительно к схеме наблюдений с использованием самолетного лидара. Причина, по которой метод томографического лидарного зондирования впервые рассмотрен для самолетных схем зондирования, связана с тем обстоятельством, что при этом обеспечивается возможность оперативного перемещения лидара относительно исследуемой области пространства. Кроме того, к настоящему времени уже накоплен достаточный практический опыт применения лидаров в самолетных исследованиях атмосферы.

В работах [2, 3] описаны конечно-разностные алгоритмы томографической обработки локационных сигналов при зондировании с борта самолета по двум и трем направлениям визирования. Решения интегральных уравнений лидарного томографического зондирования с борта самолета в аналитическом виде получены в [4]. Метод логарифмической производной, примененной в [4], открывает возможности для формулировки и решения других задач лидарного томографического зондирования, не требующих проведения самолетных экспериментов. В настоящей статье представлено аналитическое решение задачи томографического зондирования для схемы, которая в отличие от предыдущих работ не требует перемещения лидара и основана на использовании двух неподвижных лидаров с угловым сканированием в некоторой заданной области.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим математическую формулировку задачи двухлидарного томографического зондирования с угловым сканированием. Схема зондирования изображена на рисунке.



Лидары расположены в точках 1 и 2, расстояние между которыми  $D$ . Зондирование осуществляется из точек 1 и 2 в плоскости, образованной прямой, соединяющей эти точки, и направлениями зондирования  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ . Определим в плоскости зондирования декартову систему координат  $(X, Z)$ , начало которой совместим с местом расположения первого лидара, а ось  $X$  направим вдоль линии, соединяющей точки 1 и 2. Тогда локационный сигнал, принимаемый  $i$ -м лидаром от рассеивающего объема с координатами в точке  $\mathbf{r} = (x, z)$ , в приближении однократного рассеяния будет определяться формулой

$$S_i(\rho_i, \mathbf{n}_i) = \beta(\mathbf{r}) \exp \left\{ -2 \int_0^{\rho_i} \alpha[\mathbf{r} - (\rho_i - \rho') \mathbf{n}_i] d\rho' \right\}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

в которой  $\rho_i$  – расстояние от точки  $\mathbf{r}$  рассеивающего объема до  $i$ -го лидара;  $S_i(\rho_i, \mathbf{n}_i) = P_i(\rho_i, \mathbf{n}_i) \rho_i^2 / (P_{0i} A_i)$ , где  $P_{0i}$  и  $P_i(\rho_i, \mathbf{n}_i)$  – мощности излучаемого и принимаемого сигналов.  $A_i$  – аппаратная постоянная для  $i$ -го лидара соответственно;  $\alpha(\mathbf{r})$  и  $\beta(\mathbf{r})$  – объемные коэффициенты ослабления и рассеяния назад в точке  $\mathbf{r}$ . Направления зондирования  $\mathbf{n}_i$  ( $i = 1, 2$ ) характеризуются полярными углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , отсчитываемыми от направления оси  $Z$ , так что

$$\mathbf{n}_1 = (\sin \varphi_1, \cos \varphi_1), \quad \mathbf{n}_2 = (-\sin \varphi_2, \cos \varphi_2). \quad (2)$$

Положение каждой точки  $\mathbf{r} = (x, z)$  исследуемого объема однозначно связано с величинами полярных углов

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}(x/z), \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{D-x}{z}\right). \quad (3)$$

Исходными данными для решения обратной задачи является совокупность лидарных сигналов, принимаемых с двух направлений от всех точек внутри исследуемой области. В качестве исследуемой области может рассматриваться, например, некоторый ограниченный объем, расположенный между лидарами. Задача состоит в том, чтобы из совокупности локационных сигналов от двух лидаров восстановить пространственное распределение полей двух оптических характеристик – коэффициентов ослабления  $\alpha(\mathbf{r})$  и рассеяния назад  $\beta(\mathbf{r})$ .

**3. Методика построения решения.** Для определения неизвестных функций  $\beta(\mathbf{r})$  и  $\alpha(\mathbf{r})$  из системы уравнений (1), аналогично [4], возьмем логарифмические производные от обеих частей первого уравнения по направлению  $\mathbf{n}_1$  и от обеих частей второго уравнения по направлению  $\mathbf{n}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, z)}{\partial x} \sin \varphi_1 + \frac{\partial L(x, z)}{\partial z} \cos \varphi_1 - 2\alpha(x, z) &= \frac{\partial G_1(x, z)}{\partial \mathbf{n}_1}, \\ -\frac{\partial L(x, z)}{\partial x} \sin \varphi_2 + \frac{\partial L(x, z)}{\partial z} \cos \varphi_2 - 2\alpha(x, z) &= \frac{\partial G_2(x, z)}{\partial \mathbf{n}_2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $L(x, z) = \ln \beta(x, z)$ ,  $G_i(x, z) = \ln S_i$  ( $i = 1, 2$ ). По отношению к функции  $L(x, z)$  каждое из уравнений (4) представляет собой уравнение в частных производных первого порядка, свободный член которого определяется лидарным сигналом и другой неизвестной функцией  $\alpha(x, z)$ .

Прежде чем приступить к решению системы уравнений (4), сделаем несколько замечаний. По внешней форме записи система (4) тождественна системе уравнений (4) из работы [4], полученной для задачи лидарного топографического зондирования с борта самолета по двухлучевой схеме. Вместе с тем указанным двум системам присущи характерные внутренние различия, которые обуславливают расхождения в методике построения решений. Во-первых, это касается правых частей системы

(4). В работе [4] функции  $G_i(x, z)$  ( $i = 1, 2$ ) описывают лидарные сигналы, приходящие от точки  $\mathbf{r} = (x, z)$  с двух различных фиксированных направлений  $\mathbf{n}_i$ , которые не изменяются в процессе перемещения лидара. В настоящей работе, как было сказано, функции  $G_i(x, z)$  определяют лидарные сигналы от точки  $\mathbf{r}$ , принимаемые двумя лидарами, расположенными в двух различных точках  $i = 1, 2$ , а сканирование осуществляется за счет изменения полярных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Во-вторых, коэффициенты при частных производных в уравнениях системы (4), в отличие от работы [4], не являются фиксированными параметрами, и зависят от положения точки  $\mathbf{r}$ . Вид этих зависимостей в явном виде определяется выражениями

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= x/\rho_1, & \cos \varphi_1 &= z/\rho_1, \\ \sin \varphi_2 &= (D-x)/\rho_2, & \cos \varphi_2 &= z/\rho_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\rho_1 = [x^2 + z^2]^{1/2}, \quad \rho_2 = [(D-x)^2 + z^2]^{1/2}.$$

После сделанных замечаний приступим к решению системы (4). Предварительно отметим частный случай, следующий из системы (4) при  $z = 0$ . Среди возможных при этом вариантов выделим схему, для которой  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  (зондирование на встречных направлениях). В этом случае коэффициенты при  $\partial L/\partial z$  обращаются в нуль и система (4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial L}{\partial x} \pm 2\alpha = \frac{\partial G_i}{\partial x}, \quad (6)$$

где знак плюс соответствует  $i = 2$ , а знак минус  $i = 1$ . Решение (6) при граничном условии  $\beta(0, 0) = \beta_0 = S_1(0, 0)$  определяется выражениями

$$\begin{aligned} \alpha(x, z=0) &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} [G_2(x, 0) - G_1(x, 0)], \\ \beta(x, z=0) &= R [S_1(x, 0) S_2(x, 0)]^{1/2}, \quad R = [S_1(0, 0)/S_2(0, 0)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Схема и решение задачи двухлидарного зондирования на встречных направлениях были предложены в работе [5].

Обратимся к решению (4) в общем виде. Сделаем в (4) замену переменных

$$u(x, z) = \sin \varphi_1, \quad v(x, z) = \sin \varphi_2. \quad (8)$$

При этом в каждом из уравнений системы (4) сохранятся только частные производные по одной из переменных

$$\begin{aligned} c_1(\varphi_1, \varphi_2) \frac{\partial L}{\partial v} + 2\alpha &= -\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_1}, \\ c_2(\varphi_1, \varphi_2) \frac{\partial L}{\partial u} + 2\alpha &= -\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$c_1 = D^{-1} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \sin^2(\varphi_1 + \varphi_2), \quad c_2 = c_1 \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi_2}.$$

Правые части в (9) имеют вид

$$\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_1} = -c_1 \frac{\partial G_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_2} = -c_2 \frac{\partial G_2}{\partial u}. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) определены при выполнении неравенств  $\cos \varphi_1 \neq 0$ ,  $\cos \varphi_2 \neq 0$ . Случай  $\cos \varphi_1 = 0$ ,  $\cos \varphi_2 = 0$  соответствует условию  $z = 0$  и рассмотрен нами ранее (см. формулы (6), (7)). Исключая из системы уравнений (9) функцию  $\alpha(\mathbf{r})$ , получим

$$\frac{\partial L}{\partial u} \cos^2 \varphi_1 - \frac{\partial L}{\partial v} \cos^2 \varphi_2 = A \left[ \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_2} \right], \quad (11)$$

где  $A = \cos^2 \varphi_2 / c_1$ . Наиболее простой вид решение уравнения (11) приобретает в системе координат  $(\mu, \eta)$ , где

$$\mu = \ln \frac{1+u}{1-u}; \quad \eta = \ln \frac{1+v}{1-v}. \quad (12)$$

При замене переменных  $(u, v)$  на  $(\mu, \eta)$  уравнение (11) преобразуется к виду

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = Q(\mu, \eta), \quad (13)$$

где

$$Q(\mu, \eta) = \frac{A(\mu, \eta)}{2} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_2} \right] = \frac{\partial G_2}{\partial \mu} - \frac{\partial G_1}{\partial \eta}, \quad (14)$$

$$A(\mu, \eta) = D \frac{\operatorname{ch}(\mu/2) \operatorname{ch}(\eta/2)}{[\operatorname{sh}(\mu/2) + \operatorname{sh}(\eta/2)]^2}.$$

Интегрирование (13) методом характеристик с краевым условием на луче  $\mu = 0$

$$L(\mu=0, \eta) = L_0(\eta) \quad (15)$$

дает решение

$$L(\mu, \eta) = L_0(\mu + \eta) + \int_0^\mu Q(\mu - \omega, \eta + \omega) d\omega, \quad (16)$$

или для коэффициента обратного рассеяния

$$\beta(\mu, \eta) = \beta_0(\mu + \eta) \exp \left[ \int_0^\mu Q(\mu - \omega, \eta + \omega) d\omega \right]. \quad (17)$$

Обратный переход от переменных  $(\mu, \eta)$  к переменным  $(u, v)$  осуществляется по формулам

$$u = \operatorname{th}(\mu/2); \quad v = \operatorname{th}(\eta/2). \quad (18)$$

Коэффициент ослабления  $\alpha(\mu, \eta)$  определим из первого уравнения системы (9):

$$\alpha(\mu, \eta) = \frac{1}{A(\mu, \eta)} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial \eta} - \frac{\partial L}{\partial \eta} \right]. \quad (19)$$

Подставляя в (19) значение производной  $\partial L / \partial \eta$ , полученное из (16), окончательно будем иметь

$$\alpha(\mu, \eta) = \frac{1}{A(\mu, \eta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{S_1(\mu, \eta)}{\beta_0(\mu + \eta)} - \int_0^\mu \frac{\partial}{\partial \eta} Q(\mu - \omega, \eta + \omega) d\omega \right]. \quad (20)$$

Формулы (17), (20) полностью определяют решение поставленной задачи, выражающее пространственное распределение оптических характеристик  $\alpha(\mu, \eta)$  и  $(\beta, \eta)$  в некоторой области в виде функциональной зависимости от сигналов  $S_1(\mu, \eta)$  и  $S_2(\mu, \eta)$ , принимаемых двумя лидарами, разнесенными на расстояние  $D$ .

**4. Заключение.** Таким образом, как показано в настоящей статье, получение локационных сигналов от каждой точки исследуемого объема с двух направлений при дополнительном использовании в системе лазерного мониторинга второго лидара позволяет из экспериментальных данных одновре-

менно восстановить пространственное распределение коэффициентов ослабления и рассеяния назад без привлечения априорной информации о функциональной зависимости между ними. Получено аналитическое решение соответствующей обратной задачи, основанное на интегрировании системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Задача принципиально мало изменится, если использовать только один лидар, а вместо второго лидара взять отражающую систему, которая будет облучаться первым лидаром. В отличие от самолетного лидарного томографического зондирования предлагаемая методика не требует перемещения лидара относительно исследуемого объема и основана только на угловом сканировании. Центральным моментом в обработке лидарных сигналов по предложенной схеме является вычисление логарифмических производных от них по направлениям зондирования для каждого лидара в произвольных точках исследуемого пространства. Учитывая дискретный характер реальной экспериментальной информации, а также некорректность задачи численного дифференцирования, можно ожидать, что практическая реализация предлагаемой методики будет эффективна при использовании аппарата метода сплайнов. Дальнейшая работа, предстоящая в данном направлении, будет посвящена вопросам разработки соответствующих вычислительных алгоритмов.

1. Зуев В.Е., Креков Г.М., Крекова М.М. // Дистанционное зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1978. С. 3.
2. Weinman J. A. // Appl. Opt. 1984. V. 23. № 21. P. 3882.
3. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 8. С. 851.
4. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 6. С. 638–652.
5. Сергеев Н.М., Кугейко М.М., Ашкинадзе Д.А. // 6 Всесоюз. симпозиум по лазерному и акустическому зондированию атмосферы. (Тезисы докл.). Томск. 1980. Ч. 1. С. 126.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,  
Томск

Поступила в редакцию  
7 марта 1991 г.

**V. V. Veretennikov. On the Theory of Tomographic Sensing of the Atmosphere Based on the Use of Two Lidars.**

The paper presents a theoretical analysis of the problem on interpretation of the data of laser sensing of the atmosphere using the two stationary lidars with angular scanning over the atmospheric region under study. An analytical solution is obtained for describing the two-dimensional spatial distribution of the extinction and backscattering coefficients with no additional information on the functional relations between the optical characteristics. The suggested solution can be useful when creating new numerical algorithms of the laser tomographic sensing of the atmosphere based on the use of angular scanning.