<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 6, (1994)

УДК 551:521:535.31:535.36

Т.А. Сушкевич, Е.И. Игнатьева, С.В. Максакова

О МОДЕЛЯХ РАСЧЕТА ПЛОТНОСТИ И ПОТОКОВ СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Сформулированы линейные и нелинейные точные и приближенные математические модели расчета сферических и полусферических плотностей и потоков солнечного излучения в рассеивающих и поглощающих неоднородных плоских слоях. Рассмотрены частные случаи рэлеевских и консервативных слоев. Особое внимание уделено постановке граничных условий.

В моделях климата, прогноза погоды, радиационного и спектрально-радиационного баланса, динамики озона в тропосфере и стратосфере, физико-химической кинетики атмосферы, экологической безопасности [1 – 3] основными спектрально-энергетическими характеристиками являются интегральные радиационные характеристики: плотность и потоки излучения. Для математического моделирования радиационных процессов в земных условиях требуются корректные и быстрые алгоритмы расчета плотности и потоков солнечного излучения в атмосфере, океане, облаках для широкого диапазона спектра от УФ до ИК. Инженерные методики радиационной коррекции в задачах дистанционного зондирования природных объектов, подстилающих поверхностей, системы <атмосфера–океан>, называемые двухпотоковыми, диффузионными, P_1-приближением метода сферических гармоник [4–9], приближениями В.В. Соболева [10–13], Эддингтона [14], δ-Эддингтона [15] и т.п. [16] фактически основаны на расчетах интегральных по углам радиационных характеристик, отличающихся от потоков и плотности своей нормировкой. Высокоточные алгоритмы численного решения уравнения переноса в оптически средних и толстых слоях с нелинейными процедурами ускорения сходимости итераций типа квазидиффузии [17], метода средних потоков [18, 19] часто содержат в качестве вспомогательной задачу расчета плотностей или потоков с нелинейными коэффициентами.

В настоящей статье представлены линейные и нелинейные точные и приближенные модели расчета сферических и полусферических плотностей и потоков солнечного излучения в однородных и неоднородных консервативных и неконсервативных поглощающих и рассеивающих плоских слоях с ламбертовой или абсолютно черной границей [20 – 22].

В [10–13] получены аналитические решения для сферических плотностей и потоков солнечного излучения для однородного слоя в приближении В.В. Соболева, совпадающего с Эддингтон-приближением и P_1-приближением метода сферических гармоник, и предложен алгоритм расчета в неоднородном слое путем сшивки явных решений для однородных слоев на их границах. Подобный алгоритм описан в [14] и нашел широкое распространение в программных реализациях радиационных блоков для моделей климата, прогноза, фотохимии атмосферы, дистанционного зондирования, в частности, в международном пакете компьютерных кодов LOWTRAN 7 (версия 1990 года). Однако такой подход не всегда обеспечивает устойчивое решение и необходимую точность.

Мы предлагаем быстрые дискретные алгоритмы расчета плотностей и потоков излучения в моделях типа <уравнения диффузии> (обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с граничными условиями первого, второго или третьего рода) [23 – 24] или системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [25, 26]. Для этого строятся однородные консервативные разностные схемы, которые разрешаются методами правой или потоковой прогонки [27, 28]. Угловые распределения фона солнечного излучения или функции пропускания, отягощенной многократным рассеянием, рассчитываются путем интегрирования по характеристикам уравнения переноса, интеграл столкновения в котором вычисляется с помощью плотностей и потоков.

Интегральные радиационные характеристики

Интенсивность $\Phi\,(z, \vartheta, \varphi)$ многократно рассеянного солнечного излучения в направлении с зенитным углом $\vartheta \in [0, \pi]$, $\mu = \cos\vartheta \in [-1, 1]$, и азимутом $\varphi \in [0, 2\pi]$ на уровне $z \in [0, H]$ в плоском слое описывается краевой задачей

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + \sigma_t(z)\,\Phi(z, \mu, \varphi) = B(z, \mu, \varphi) + F(z, \mu, \varphi), \\ \Phi\big|_{\Gamma_0} = 0, \ \ \Phi\big|_{\Gamma_H} = f_H. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь интеграл столкновения

$$B(z, \mu, \varphi) \equiv \frac{\sigma_s(z)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \Phi(z, \mu', \varphi')\,\gamma(z, \cos\chi)\,d\mu'\,d\varphi'; \tag{2}$$

Источник

$$F(z, \mu, \varphi) = a(z)\,\gamma(z, \cos\chi_0),\ a(z) \equiv \frac{S_\lambda}{4}\,\sigma_s(z)\,\exp\left[-\frac{\tau(z)}{\mu_0}\right], \tag{3}$$

$\cos\chi = \mu\mu' + \sin\vartheta\,\sin\vartheta'\,\cos(\varphi - \varphi')$;

граничное значение на ламбертовой подстилающей поверхности с альбедо q

$$f_H = \frac{q}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \Phi(H, \mu, \varphi)\mu\,d\mu\,d\varphi + q\,S_\lambda\,\mu_0\,\exp\left[-\frac{\tau(H)}{\mu_0}\right]; \tag{4}$$

нормировка индикатрисы рассеяния

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \gamma(z, \cos\chi)\,d\mu\,d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \gamma(z, \cos\chi)\,d\cos\chi = 1; \tag{5}$$

оптическая толщина

$$\tau(z) = \int_0^{z} \sigma_t(u)\,du, \quad \tau_H \equiv \tau(H), \tag{6}$$

отсчитывается от верхней границы слоя, на которую падает внешний параллельный поток солнечного излучения интенсивности S_λ в направлении с углами ϑ_0, φ_0 ($\mu_0 = \cos\vartheta_0$). Для удобства записи используем множества

$$\Gamma_0 = \{(z, \mu): z = 0, \mu \geq 0\},\ \Gamma_H = \{(z, \mu): z = H, \mu \leq 0\}.$$

Если пространственная координата является геометрической, то $\sigma_t(z)$ и $\sigma_s(z)$ – коэффициенты ослабления и рассеяния, а если z – оптическая толщина, то $\sigma_t(z) \equiv 1$, $\sigma_s(z)$ – альбедо акта рассеяния. Достаточно общая запись краевой задачи (1) позволяет описывать модели с учетом δ-анизотропии рассеяния разными способами, когда исходное уравнение переноса преобразуется с помощью соотношений подобия [15] или не преобразуется [19].

Равномерное приближение непрерывного решения задачи (1), заданного на сфере в каждой пространственной точке, линейными комбинациями [20]

$$\Phi(z, \vartheta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(z, \vartheta, \varphi)$$

сферических функций

$$Y_k(z, \vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^{k} \Phi_{ck}^m(z)\,C_k^m(\vartheta, \varphi) + \Phi_{sk}^m(z)\,S_k^m(\vartheta, \varphi)$$

приводит к разделению переменных z, ϑ, φ. Сферические гармоники ($m \leq k$)

$$C_k^m(\vartheta, \varphi) = P_k^m(\mu)\cos m\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 0, 1, 2, \ldots, k;$$

$$S_k^m(\vartheta,\varphi) = (1-\delta_{m0})\,P_k^m(\mu)\sin m\,\varphi,\ k = 0, 1, 2, \dots;\ m = 0, 1, 2, \dots, k,$$

где символ Кронекера $\delta_{mn} = \{1$, если $m = n$; 0, если $m \neq n\}$; $P_k^m(\mu)$ – присоединенные функции Лежандра; $P_k(\mu) = P_k^0(\mu)$ – полиномы Лежандра, образуют ортогональную систему на поверхности единичной сферы.

Азимутальные гармоники

$$\Phi_c^m(z,\vartheta) = \sum_{k=m}^{\infty} \Phi_{ck}^m(z)\,P_k^m(\vartheta),\quad \Phi_s^m(z,\vartheta) = \sum_{k=m}^{\infty} \Phi_{sk}^m(z)\,P_k^m(\vartheta),\ \Phi_c^0(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{ck}^0(z)\,P_k(\mu) \tag{7}$$

находим по формулам

$$\Phi_c^m(z,\vartheta) = \frac{1}{\delta_m\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(z,\vartheta,\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi,\ \Phi_s^m(z,\vartheta) = \frac{1}{\delta_m\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(z,\vartheta,\varphi)\sin m\varphi\,d\varphi;$$

$$\delta_m = \{2,\ \text{если}\ m = 0;\ 1,\ \text{если}\ m > 0\}.$$

Интегральные (по углам) радиационные характеристики можно определить через азимутальные и сферические гармоники.

Плотность излучения (актинометрический поток)

$$n(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(z,\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{1}\Phi_c^0(z,\mu)\,d\mu = 4\pi\,\Phi_{c0}^0(z). \tag{8}$$

Вертикальный поток излучения

$$J(z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(z,\vartheta,\varphi)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi=2\pi\int_{-1}^{1}\Phi_c^0(z,\mu)\,\mu\,d\mu = \frac{4\pi}{3}\,\Phi_{c1}^0(z). \tag{9}$$

Восходящий поток излучения (полусферический с $\mu < 0$)

$$J^{\uparrow}(z)=\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\Phi(z,\vartheta,\varphi)\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=2\pi\int_{-1}^{0}\Phi_c^0(z,\mu)\mu d\mu=-\pi\left\{\Phi_{c0}^0(z)-\frac{2}{3}\Phi_{c1}^0(z)+2\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_{c,2m}^0(z)\,R_{2m}\right\},J^{\downarrow}(z)<0, \tag{10}$$

$$R_{2m} \equiv \int_0^1 \mu\,P_{2m}(\mu)\,d\mu = (-1)^{m+1}\frac{(2m-3)!!}{2^m(m+1)!}.$$

Нисходящий поток излучения (полусферический с $\mu > 0$)

$$J^{\downarrow}(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\Phi(z,\vartheta,\varphi)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\int_0^1\Phi_c^0(z,\mu)\,\mu\,d\mu =$$

$$= \pi\left\{\Phi_{c0}^0(z) + \frac{2}{3}\Phi_{c1}^0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_{c,2m}^0(z)\,R_{2m}\right\},\quad J^{\downarrow}(z) > 0. \tag{11}$$

Вертикальный поток многократно рассеянного излучения

$$J(z) = J^{\downarrow}(z) + J^{\uparrow}(z).$$

Горизонтальный поток излучения

$$W(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(z,\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{1}\Phi_c^0(z,\mu)\sin\vartheta\,d\mu = \pi\left\{\pi\Phi_{c0}^0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_{c,2m}^0(z)\,R_{2m}^1\right\},$$

$$R_{2m}^1 \equiv \int_{-1}^{1} P_k(\mu)\,P_1^1(\mu)\,d\mu = \begin{cases}\pi/2, & \text{если}\ k = 0;\\ 0, & \text{если}\ k = 2m+1,\ m \geq 0;\\ \neq 0, & \text{если}\ k = 2m,\ m \geq 1.\end{cases}$$

Горизонтальный поток излучения в плоскости солнечного вертикала [11]

$$G(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(z, \vartheta, \varphi)\, \sin\vartheta\, \cos\varphi\, \sin\vartheta\; d\,\vartheta\; d\,\varphi = \frac{4\pi}{3}\, \Phi^1_{c1}(z).$$

Полусферические плотности

$$n^{\downarrow}(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \Phi(z, \vartheta, \varphi)\, \sin\vartheta\; d\,\vartheta\; d\,\varphi = 2\pi \int_0^1 \Phi^0_c(z, \mu)\; d\,\mu = 2\pi\left\{\Phi^0_{c0}(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^0_{c,2m+1}(z)\, R^0_{2m+1}\right\}; \qquad (12)$$

$$n^{\uparrow}(z) = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \Phi(z, \vartheta, \varphi)\, \sin\vartheta\; d\,\vartheta\; d\,\varphi = 2\pi \int_{-1}^0 \Phi^0_c(z, \mu)\; d\,\mu = 2\pi\left\{\Phi^0_{c0}(z) - \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^0_{c,2m+1}(z)\, R^0_{2m+1}\right\}, \qquad (13)$$

$$R^0_{2m+1} \equiv \int_0^1 P_{2m+1}(\mu)\; d\,\mu = \frac{(-1)\,(-3)\,...\,(-\,2\,m+1)}{2^{m+1}\,(m+1)!}, \; m = 0, 1, 2, ...$$

Средний косинус (сферический), или коэффициент асимметрии индикатрисы яркости

$$\bar{\mu}(z) = \frac{J(z)}{n(z)} = \frac{1}{3}\frac{\Phi^0_{c1}(z)}{\Phi^0_{c0}(z)}. \qquad (14)$$

Средние косинусы (полусферические)

$$\mu^{\downarrow}(z) = J^{\downarrow}(z) \,/\, n^{\downarrow}(z), \quad \mu^{\uparrow}(z) = J^{\uparrow}(z) \,/\, n^{\uparrow}(z). \qquad (15)$$

K-интегралы (моменты второго порядка)

$$K(z) \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(z, \vartheta, \varphi)\, [\cos\vartheta]^2 \sin\vartheta\; d\,\vartheta\; d\,\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi^0_c(z, \mu)\, \mu^2\; d\,\mu = \frac{4\pi}{3}\left[(\Phi^0_{c0}(z) + \frac{2}{5}\Phi^0_{c2}(z)\right]. \qquad (16)$$

Коэффициент диффузии

$$D(z) = \frac{K(z)}{n(z)} = \frac{1}{3} + \frac{2\,\Phi^0_{c2}(z)}{15\,\Phi^0_{c0}(z)}. \qquad (17)$$

Полусферические *K*-интегралы

$$K^{\downarrow}(z) \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \Phi(z, \vartheta, \varphi)\, [\cos\vartheta]^2 \sin\vartheta\; d\,\vartheta\; d\,\varphi = 2\pi \int_0^1 \Phi^0_c(z, \mu)\, \mu^2\; d\,\mu =$$

$$= 2\pi\left\{\frac{1}{3}\Phi^0_{c0}(z) + \frac{1}{4}\Phi^0_{c1}(z) + \frac{2}{15}\Phi^0_{c2}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi^0_{c,2m+1}(z)\, R^2_{2m+1}\right\}; \qquad (18)$$

$$K^{\uparrow}(z) \equiv \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \Phi(z, \vartheta, \varphi)\, [\cos\vartheta]^2 \sin\vartheta\; d\,\vartheta\; d\,\varphi = 2\pi \int_{-1}^0 \Phi^0_c(z, \mu)\, \mu^2\; d\,\mu =$$

$$= 2\pi\left\{\frac{1}{3}\Phi^0_{c0}(z) - \frac{1}{4}\Phi^0_{c1}(z) + \frac{2}{15}\Phi^0_{c2}(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \Phi^0_{c,2m+1}(z)\, R^2_{2m+1}\right\}, \qquad (19)$$

$$R^2_{2m+1} \equiv \int_0^1 \mu^2\, P_{2m+1}(\mu)\; d\,\mu = \begin{cases} 1/24 \text{ при } m = 1, \\ (-\,1)^{m-1}\,\dfrac{(m-1)\,m\,(m+1)\,...\,(2\,m-3)}{2^{2m-1}\,(m+2)!} \text{ при } m \geq 2. \end{cases}$$

Полусферические коэффициенты диффузии

$$D^{\downarrow}(z) = K^{\downarrow}(z) \,/\, n^{\downarrow}z), \quad D^{\uparrow}(z) = K^{\uparrow}(z) \,/\, n^{\uparrow}(z). \qquad (20)$$

Если индикатриса рассеяния представлена разложением по полиномам Лежандра

$$\gamma(z, \cos\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(z)\, P_k(\cos\chi), \qquad (21)$$

то с помощью теоремы сложения [29] можно разделить угловые переменные и выделить азимутальные гармоники, которые в общем случае вычисляются с помощью интегралов [19, 20, 30]

$$\gamma^0(z,\mu,\mu') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(\cos\chi)\,d\,\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\omega_k(z)\,P_k(\mu)\,P_k(\mu'), \tag{22}$$

$$\gamma^m(z,\mu,\mu') = \frac{1}{\pi\,\delta_m}\int_0^{2\pi}\gamma(\cos\chi)\cos m\,(\varphi-\varphi')\,d(\varphi-\varphi') = \frac{2}{\pi\,\delta_m}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(\cos\chi)\,T_m(y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

где $y=\cos(\varphi-\varphi')$, $-1\le y\le 1$, $T_m(y)=\cos m(\varphi-\varphi')=\cos(m\arccos y)$ – полиномы Чебышева первого рода порядка m .

Если индикатриса рассеяния представлена в виде разложения по полиномам Лежандра (21), то

$$\gamma_0^+(\mu) \equiv \int_0^1 \gamma^0(z,\mu,\mu')\,d\,\mu' = 1 + \frac{1}{2}\,\omega_1\,\mu + \sum_{m=1}^{\infty}\omega_{2m+1}(z)\,P_{2m+1}(\mu)\,R^0_{2m+1};$$

$$\gamma_0^-(\mu) \equiv \int_{-1}^0 \gamma^0(z,\mu,\mu')\,d\,\mu' = 1 - \frac{1}{2}\,\omega_1\,\mu - \sum_{m=1}^{\infty}\omega_{2m+1}(z)\,P_{2m+1}(\mu)\,R^0_{2m+1};$$

$$\gamma_0(\mu) \equiv \int_{-1}^1 \gamma^0(z,\mu,\mu')\,d\,\mu' = \gamma_0^+(z,\mu) + \gamma_0^-(z,\mu) = 2.$$

Характеристики обратного рассеяния

$$\gamma_0^{\downarrow}(z) \equiv \int_0^1 \Phi_c^0(z,\mu)\,d\,\mu\int_{-1}^0\gamma^0(z,\mu,\mu')\,d\,\mu' \Big/ \int_0^1\Phi_c^0(z,\mu)\,d\,\mu = \frac{2\pi\,\Gamma^{\downarrow}(z)}{n^{\downarrow}(z)}, \tag{23}$$

$$\gamma_0^{\uparrow}(z) \equiv \int_{-1}^0 \Phi_c^0(z,\mu)\,d\,\mu\int_0^1\gamma^0(z,\mu,\mu')\,d\,\mu' \Big/ \int_{-1}^0\Phi_c^0(z,\mu)\,d\,\mu = \frac{2\pi\,\Gamma^{\uparrow}(z)}{n^{\uparrow}(z)}, \tag{24}$$

если воспользоваться представлениями Φ_c^0 (7), γ^0 (22), $n^{\downarrow}$ (12), $n^{\uparrow}$ (13), можно определить через сферические гармоники, при этом

$$\Gamma^{\downarrow}(z) = \Phi^0_{c0}(z)\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{2k+1}(z)\,(R^0_{2k+1})^2\right] + \sum_{k=0}^{\infty}\Phi^0_{c,\,2k+1}(z)\,R^0_{2k+1} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\Phi^0_{c,\,2k+1}(z)\omega_{2k+1}(z)R^0_{2k+1}T^2_{2k+1} - \sum_{k=1}^{\infty}\Phi^0_{c,\,2k}(z)\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{2n+1}(z)\,R^0_{2n+1}\,T_{2k,\,2n+1};$$

$$\Gamma^{\uparrow}(z) = \Phi^0_{c0}(z)\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{2k+1}(z)\,(R^0_{2k+1})^2\right] - \sum_{k=0}^{\infty}\Phi^0_{c,\,2k+1}(z)\,R^0_{2k+1} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\Phi^0_{c,\,2k+1}(z)\,\omega_{2k+1}(z)\,R^0_{2k+1}T^2_{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\Phi^0_{c,\,2k}(z)\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{2n+1}(z)\,R^0_{2n+1}\,T_{2k,\,2n+1};$$

$$T_n^2 \equiv \int_0^1 [P_n(\mu)]^2\,d\,\mu = \frac{1}{2\,n+1};$$

$$T_{2k,\,2n+1} \equiv \int_0^1 P_{2k}(\mu)\,P_{2n+1}(\mu)d\,\mu = \frac{(2\,k)!\,(2\,n+1)!}{2^{2k+2n+1}\,(2\,k-2\,n-1)\,(k+n+1)\,k!\,n!}.$$

С помощью точных представлений $n^{\downarrow}$ (12), $n^{\uparrow}$ (13), $J^{\uparrow}$ (10), $J^{\downarrow}$ (11) можно установить следующие точные соотношения:

$$J^{\downarrow} + J^{\uparrow} = \frac{4\pi}{3}\,\Phi^0_{c1}(z), \qquad n^{\downarrow} + n^{\uparrow} = 4\pi\,\Phi^0_{c0}(z),$$

$$J^{\downarrow} - J^{\uparrow} = 2\pi\left\{\Phi^0_{c0}(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(z)\,R_{2m}\right\}, \quad \Phi^0_{c1} = \frac{3}{4\pi}\,(J^{\downarrow} + J^{\uparrow}),$$

$$n^{\downarrow} - n^{\uparrow} = 4\pi \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^0_{c,2m+1}(z)\, R^0_{2m+1}, \quad \Phi^0_{c0} = \frac{1}{4\pi}\,(n^{\downarrow} + n^{\uparrow}).$$

В P_1-приближении метода сферических гармоник, когда

$$\Phi^0_c(z, \mu) = \Phi^0_{c0}(z) + \Phi^0_{c1}(z)\, P_1(\mu),\ P_1(\mu) = \mu, \tag{25}$$

радиационные характеристики принимают следующие значения:

$$D(z) = \frac{1}{3},\ K(z) = \frac{4\pi}{3}\,\Phi^0_{c0}(z),\ W(z) = \pi^2\, \Phi^0_{c0}(z), \tag{26}$$

$$J^{\downarrow} = \pi\,\{\Phi^0_{c0}(z) + \frac{2}{3}\,\Phi^0_{c1}(z)\},\ J^{\uparrow} = -\,\pi\,\{\Phi^0_{c0}(z) - \frac{2}{3}\,\Phi^0_{c1}(z)\}, \tag{27}$$

$$n^{\downarrow} = 2\pi\,\{\Phi^0_{c0}(z) + \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)\},\ n^{\uparrow} = 2\pi\,\{\Phi^0_{c0}(z) - \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)\}, \tag{28}$$

$$\mu^{\uparrow}(z) = -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{\Phi^0_{c1}(z)}{\Phi^0_{c0}(z) - \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)}\right],\ \mu^{\downarrow}(z) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{6}\,\frac{\Phi^0_{c1}(z)}{\Phi^0_{c0}(z) + \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)}\right], \tag{29}$$

$$K^{\downarrow}(z) = 2\pi\,\left\{\frac{1}{3}\,\Phi^0_{c0}(z) + \frac{1}{4}\,\Phi^0_{c1}(z)\right\},\ K^{\uparrow}(z) = 2\pi\,\left\{\frac{1}{3}\,\Phi^0_{c0}(z) - \frac{1}{4}\,\Phi^0_{c1}(z)\right\}, \tag{30}$$

$$D^{\downarrow}(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\,\frac{\Phi^0_{c1}(z)}{\Phi^0_{c0}(z) + \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)},\ D^{\uparrow}(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\,\frac{\Phi^0_{c1}(z)}{\Phi^0_{c0}(z) - \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)}, \tag{31}$$

$$\Gamma^{\downarrow}(z) = \Phi^0_{c0}(z)\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k+1}(z)\,(R^0_{2k+1})^2\right] + \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)\left[1 - \frac{\omega_1(z)}{3}\right],$$

$$\Gamma^{\uparrow}(z) = \Phi^0_{c0}(z)\left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k+1}(z)\,(R^0_{2k+1})^2\right] - \frac{1}{2}\,\Phi^0_{c1}(z)\left[1 + \frac{\omega_1(z)}{3}\right],$$

и выполняются следующие приближенные соотношения:

$$J^{\downarrow} - J^{\uparrow} = 2\pi\,\Phi^0_{c0}(z),\ \ n^{\downarrow} - n^{\uparrow} = 2\pi\,\Phi^0_{c1}(z),$$

$$J = J^{\downarrow} + J^{\uparrow} = \frac{2}{3}\,(n^{\downarrow} - n^{\uparrow}),\ \ n = n^{\downarrow} + n^{\uparrow} = 2(J^{\downarrow} - J^{\uparrow}),$$

$$\Phi^0_{c0}(z) = \frac{1}{2\pi}\,(J^{\downarrow} - J^{\uparrow}),\ \ \Phi^0_{c1}(z) = \frac{1}{2\pi}\,(n^{\downarrow} - n^{\uparrow}),$$

$$\Phi^0_{c1}(z) = \frac{3}{7\pi}\,(2\,J^{\downarrow} - n^{\uparrow}),\ \ \Phi^0_{c0}(z) = \frac{3}{7\pi}\left(\frac{2}{3}\,n^{\uparrow} - J^{\downarrow}\right),$$

$$n^{\downarrow} = \frac{1}{4}\,(7\,J^{\downarrow} - J^{\uparrow}),\ \ n^{\uparrow} = \frac{1}{4}\,(J^{\downarrow} - 7\,J^{\uparrow}),\ \ n^{\downarrow} = \frac{1}{2}\,(n + \frac{2}{3}\,J),\ \ n^{\uparrow} = \frac{1}{2}\,(n - \frac{3}{2}\,J),$$

$$J^{\downarrow} = \frac{1}{12}\,(7\,n^{\downarrow} - n^{\uparrow}),\ J^{\uparrow} = \frac{1}{12}\,(n^{\downarrow} - 7\,n^{\uparrow}),\ J^{\downarrow} = \frac{1}{4}\,(n + 2\,J),\ J^{\uparrow} = -\frac{1}{4}\,(n - 2\,J),$$

$$\mu^{\downarrow}(z) = \frac{7\,n^{\downarrow} - n^{\uparrow}}{12\,n^{\downarrow}} = \frac{4\,J^{\downarrow}}{7\,J^{\downarrow} - J^{\uparrow}},\ \mu^{\uparrow}(z) = \frac{n^{\downarrow} - 7\,n^{\uparrow}}{12\,n^{\uparrow}} = \frac{4\,J^{\uparrow}}{J^{\downarrow} - 7\,J^{\uparrow}},$$

$$D^{\downarrow}(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\,\frac{n^{\downarrow} - n^{\uparrow}}{n^{\downarrow}} = \frac{5}{12} - \frac{1}{12}\,\frac{n^{\uparrow}}{n^{\downarrow}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{J^{\downarrow} + J^{\uparrow}}{7\,J^{\downarrow} - J^{\uparrow}},$$

$$D^{\uparrow}(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\,\frac{n^{\downarrow} - n^{\uparrow}}{n^{\uparrow}} = \frac{5}{12} - \frac{1}{12}\,\frac{n^{\downarrow}}{n^{\uparrow}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{J^{\downarrow} + J^{\uparrow}}{J^{\downarrow} - 7\,J^{\uparrow}}.$$

При двухчленной индикатрисе рассеяния

$\gamma_0^+(z,\mu) = 1 + \frac{1}{2}\,\omega_1(z)\,\mu,\ \ \gamma_0^-(z,\mu) = 1 - \frac{1}{2}\,\omega_1(z)\,\mu,$

$\gamma_0^{\downarrow}(z) = 1 - \frac{1}{2}\,\omega_1(z)\,\mu^{\downarrow}(z),\ \ \gamma_0^{\uparrow}(z) = 1 + \frac{1}{2}\,\omega_1(z)\,\mu^{\uparrow}(z).$

Для рэлеевской индикатрисы рассеяния

$\gamma_R(\cos\chi) = \frac{3}{4}\,[1 + \cos^2\chi],\ \ \gamma_R^0(\mu,\mu') = 1 + \frac{1}{2}\,P_2(\mu)\,P_2(\mu'),$

с коэффициентами $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0{,}5$ при нормировке (5)

$$\gamma_0^+(z,\mu) = 1,\ \ \gamma_0^-(z,\mu) = 1,\ \ \gamma_0^{\downarrow}(z) = 1,\ \ \gamma_0^{\uparrow}(z) = 1. \qquad (32)$$

P_1-и P_2-приближения метода сферических гармоник

Как видим, все интегральные радиационные характеристики n (8), J (9), W, K (16), D (17), $\bar{\mu}$ (14), $n^{\downarrow}$ (12), $n^{\uparrow}$ (13), $J^{\downarrow}$ (11), $J^{\uparrow}$ (10), $\mu^{\downarrow}$, $\mu^{\uparrow}$ (15), $\gamma_0^{\downarrow}$ (23), $\gamma_0^{\uparrow}$ (24), $K^{\downarrow}$ (18), $K^{\uparrow}$ (19), $D^{\downarrow}$, $D^{\uparrow}$ (20) определяются через нулевую азимутальную гармонику $\Phi_c^0(z,\mu)$ – решение краевой задачи [19, 20]

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial \Phi_c^0}{\partial z} + \sigma_t(z)\,\Phi_c^0(z,\mu) = \dfrac{\sigma_s(z)}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\Phi_c^0(z,\mu')\,\gamma^0(z,\mu,\mu')\,d\mu' + a(z)\,\gamma^0(z,\mu,\mu_0), \\ \Phi_c^0\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \Phi_c^0\big|_{\Gamma_H} = \Phi^*, \end{cases} \qquad (33)$$

$$\Phi^* \equiv 2\,q\int_0^1 \Phi_c^0(H,\mu)\,\mu\,d\mu + f_H^*,\ \ f_H^* \equiv q\,S_\lambda\,\mu_0\exp\left[-\frac{\tau(H)}{\mu_0}\right],$$

которая получается интегрированием уравнения (1) по азимуту $\varphi \in [0, 2\pi]$ с весом $1/2\pi$.

Сферические плотности n (8) точно определяются через сферическую гармонику $\Phi_{c0}^0(z)$, потоки J (9) – через $\Phi_{c1}^0(z)$, K–интегралы (16) и коэффициенты диффузии D (17) – через $\Phi_{c2}^0(z)$ и $\Phi_{c0}^0(z)$, средние косинусы $\bar{\mu}$ (14) – через $\Phi_{c1}^0(z)$ и $\Phi_{c0}^0(z)$. Остальные характеристики могут вычисляться через сферические гармоники только приближенно, так как представляются бесконечными рядами.

Система уравнений для сферических гармоник [4–8] является бесконечной. В P_n–приближении метода сферических гармоник разложение (7) формально обрезается так, что опускаются все компоненты $\Phi_{ck}^0(z)$ с номерами $k > n$, и, как следствие, из разложения индикатрисы рассеяния (22) с индексом k от 0 до K будут учтены компоненты только с номерами $k \le K \le n$.

Выпишем те уравнения, которые содержат гармоники Φ_{c0}^0 ,Φ_{c1}^0, Φ_{c2}^0 [20]:

$$\frac{1}{3}\frac{d\,\Phi_{c1}^0}{d\,z} + [\sigma_t(z) - \sigma_s(z)]\,\Phi_{c0}^0(z) = a(z); \qquad (34)$$

$$\frac{2}{5}\frac{d\,\Phi_{c2}^0}{d\,z} + \frac{d\,\Phi_{c0}^0}{d\,z} + \left[\sigma_t(z) - \frac{\sigma_s(z)\,\omega_1(z)}{3}\right]\Phi_{c1}^0(z) = a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0; \qquad (35)$$

$$\frac{3}{7}\frac{d\,\Phi_{c3}^0}{d\,z} + \frac{2}{3}\frac{d\,\Phi_{c1}^0}{d\,z} + \left[\sigma_t(z) - \frac{\sigma_s(z)\,\omega_2(z)}{5}\right]\Phi_{c2}^0(z) = a(z)\,\omega_2(z)\,P_2(\mu_0). \qquad (36)$$

В P_1-приближении гармоника Φ_{c2}^0 опускается, и получается замкнутая система уравнений (34) и

$$\frac{d\,\Phi_{c0}^0}{d\,z} + \left[\sigma_t(z) - \frac{\sigma_s(z)\,\omega_1(z)}{3}\right]\Phi_{c1}^0(z) = a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0. \qquad (37)$$

В P_2-приближении, опуская компоненту Φ_{c3}^0, из уравнений (34) и (36) находим явное выражение

$$\Phi^0_{c2}(z) = A(z) + B(z)\,\Phi^0_{c0}(z), \tag{38}$$

$$A(z) = 2\,a(z)\left[\frac{\omega_2(z)}{2}\,P_2(\mu_0) - 1\right] \Big/ \left[\sigma_t(z) - \frac{\sigma_s(z)\,\omega_2(z)}{5}\right],$$

$$B(z) = 2\,[\sigma_t(z) - \sigma_s(z)] \Big/ \left[\sigma_t(z) - \frac{\sigma_s(z)\,\omega_2(z)}{5}\right],$$

с помощью которого можно приближенно оценивать $\Phi^0_{c2}(z)$ в P_1-приближении через сферическую гармонику $\Phi^0_{c0}(z)$ и уточнять радиационные характеристики, содержащие $\Phi^0_{c2}(z)$. Отметим, что в P_1-приближении радиационные характеристики с изотропной и рэлеевской индикатрисами рассеяния совпадают, а в P_2-приближении они различны, так как через компоненту $\Phi^0_{c2}(z)$ учитывается анизотропия рэлеевского рассеяния. Используя представление $\Phi^0_{c2}(z)$ (38), уравнение (35) можно привести к виду

$$r(z)\,\frac{d\,\Phi^0_{c0}}{d\,z} + t(z)\,\Phi^0_{c0}(z) + s(z)\,\Phi^0_{c1}(z) = p(z), \tag{39}$$

$$r(z) = 1 + \frac{2}{5}\,B(z)\,, \quad t(z) = \frac{2}{5}\frac{d\,B}{d\,z}, \quad s(z) = \sigma_t(z) - \frac{\sigma_s(z)\,\omega_1(z)}{3}\,,$$

$$p(z) = a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0 - \frac{2}{5}\frac{d\,A}{d\,z} = C(z)\,\exp\left[-\frac{\tau(z)}{\mu_0}\right],$$

и тогда с помощью системы уравнений (34) и (39) можно рассчитывать гармоники $\Phi^0_{c0}(z)$ и $\Phi^0_{c1}(z)$ в P_2-приближении.

Если ввести коэффициент асимметрии индикатрисы рассеяния

$$g(z) = \int_{-1}^{1} \gamma(\mu)\,\mu\,d\,\mu \Big/ \int_{-1}^{1} \gamma(\mu)\,d\,\mu = \frac{\omega_1(z)}{3}$$

и перейти к оптической толщине (6), то систему уравнений (34), (37) можно переписать в виде

$$\frac{1}{3}\frac{d\,\Phi^0_{c1}}{d\,\tau} + [1 - \omega_s(\tau)]\,\Phi^0_{c0}(\tau) = \frac{S_\lambda}{4}\,\omega_s(\tau)\,\exp\left[-\frac{\tau}{\mu_0}\right], \tag{40}$$

$$\frac{d\,\Phi^0_{c0}}{d\,\tau} + [1 - \omega_s(\tau)\,g(\tau)]\,\Phi^0_{c1}(\tau) = \frac{3}{4}\,S_\lambda\,\omega_s(\tau)\,g(\tau)\,\mu_0\,\exp\left[-\frac{\tau}{\mu_0}\right]. \tag{41}$$

Сравнивая систему уравнений (40) – (41) с приближением В.В. Соболева [10 – 13], устанавливаем, что

$$\overline{\Phi} = \Phi^0_{c0}\,,\ \ \overline{H} = \Phi^0_{c1}\,/\,3,\ \ n = 4\,\pi\,\overline{\Phi},\ \ J = 4\,\pi\,\overline{H}.$$

В [14 – 15] сферические гармоники $I_0 = \Phi^0_{c0}$, $I_1 = \Phi^0_{c1}$ и система уравнений (40) – (41) совпадает с уравнениями в приближении Эддингтона. Однако введенные в [14] односторонние нисходящие потоки совпадают ($F^{\downarrow} = J^{\downarrow}$), а восходящие – противоположны по знакам ($F^{\uparrow} = -J^{\uparrow}$).

Точные и приближенные уравнения для сферических плотности и потока

Проинтегрируем уравнение (33) по μ на отрезке [–1, 1] с весом 1 и с весом μ, используя разложение нулевой азимутальной гармоники индикатрисы рассеяния (22) и определения n (8), J (9), D (17), и получим систему точных уравнений:

$$\frac{d\,J}{d\,z} + [\sigma_t(z) - \sigma_s(z)]\,n(z) = 4\,\pi\,a(z), \tag{42}$$

$$\frac{d\,[D(z)\,n(z)]}{d\,z}+\left[\sigma_t(z)-\frac{\sigma_s(z)\,\omega_1(z)}{3}\right]J(z)=\frac{4\pi}{3}\,a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0\,. \tag{43}$$

При нулевом значении правой части уравнения (43) систему (42) – (43) называют уравнениями квазидиффузии [17].

Путем исключения плотности $n(z)$ из системы (42) – (43) находим точное уравнение для определения вертикального потока

$$\frac{d}{d\,z}\frac{D(z)}{\sigma_t(z)-\sigma_s(z)}\frac{d\,J}{d\,z}-\left[\sigma_t(z)-\frac{\sigma_s(z)\,\omega_1(z)}{3}\right]J(z)=-\left\{\frac{4\pi}{3}\,a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0-\frac{d}{d\,z}\frac{D(z)\,4\pi\,a(z)}{\sigma_t(z)-\sigma_s(z)}\right\}. \tag{44}$$

Исключая поток $J(z)$, получаем точное уравнение типа <уравнения диффузии> для описания вертикального профиля плотности излучения

$$\frac{d}{d\,z}\frac{3}{3\sigma_t(z)-\sigma_s(z)\,\omega_1(z)}\frac{d\,[D(z)\,n(z)]}{d\,z}-[\sigma_t(z)-\sigma_s(z)]\,n(z)=-\left\{4\pi\,a(z)-\frac{d}{d\,z}\frac{4\pi\,a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0}{3\sigma_t(z)-\sigma_s(z)\,\omega_1(z)}\right\}. \tag{45}$$

Для консервативного слоя (без поглощения), когда $\sigma_t(z)=\sigma_s(z)$, плотность и поток находятся из точных уравнений

$$\frac{d\,J}{d\,z}=4\pi\,a(z), \tag{46}$$

$$3\,\frac{d\,[D(z)\,n(z)]}{d\,z}+\sigma_t(z)\,[3-\omega_1(z)]\,J(z)=4\pi\,a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0\,. \tag{47}$$

Плотность удовлетворяет точному <уравнению диффузии>

$$\frac{d}{d\,z}\frac{3}{\sigma_t(z)\,[3-\omega_1(z)]}\frac{d\,[D(z)\,n(z)]}{d\,z}=-\left\{4\pi\,a(z)-\frac{d}{d\,z}\frac{4\pi\,a(z)\,\omega_1(z)\,\mu_0}{\sigma_t(z)\,[3-\omega_1(z)]}\right\}, \tag{48}$$

а поток можно выразить явно из (46) с помощью квадратур. В случае однородного слоя с ламбертовой границей уравнение (46) разрешимо в явном виде [10 – 12]. Системы уравнений (42) – (43) и (46) – (47), а также <уравнения диффузии> (44), (45), (48) содержат нелинейный коэффициент $D(z)$. В P_1-приближении $D(z)=1/3=\mathrm{const}$ и перечисленные задачи становятся линейными.

Точные и приближенные уравнения для полусферических плотностей и потоков

Проинтегрируем уравнение (33) по μ на отрезках [0, 1] и [–1, 0] и воспользуемся определениями $J^{\downarrow}$ (11), $J^{\uparrow}$ (10), $\mu^{\downarrow}$, $\mu^{\uparrow}$ (15), $\gamma_0^{\downarrow}$ (23), $\gamma_0^{\uparrow}$ (24), $n^{\downarrow}$ (12), $n^{\uparrow}$ (13). В результате тождественных преобразований получим систему точных уравнений для полусферических потоков с нелинейными параметрами $\mu^{\downarrow}$, $\mu^{\uparrow}$, $\gamma_0^{\downarrow}$, $\gamma_0^{\uparrow}$:

$$\frac{d\,J^{\downarrow}}{d\,z}+\left[\frac{\sigma_t(z)-\sigma_s(z)}{\mu^{\downarrow}(z)}+\frac{\sigma_s(z)\,\gamma_0^{\downarrow}(z)}{2\,\mu^{\downarrow}(z)}\right]J^{\downarrow}(z)-\frac{\sigma_s(z)\,\gamma_0^{\uparrow}(z)}{2\,\mu^{\uparrow}(z)}\,J^{\uparrow}(z)=2\pi\,a(z)\,\gamma_0^{+}(z,\mu_0), \tag{49}$$

$$\frac{d\,J^{\uparrow}}{d\,z}+\left[\frac{\sigma_t(z)-\sigma_s(z)}{\mu^{\uparrow}(z)}+\frac{\sigma_s(z)\,\gamma_0^{\uparrow}(z)}{2\,\mu^{\uparrow}(z)}\right]J^{\uparrow}(z)-\frac{\sigma_s(z)\,\gamma_0^{\downarrow}(z)}{2\,\mu^{\downarrow}(z)}\,J^{\downarrow}(z)=2\pi\,a(z)\,\gamma_0^{-}(z,\mu_0). \tag{50}$$

Аналогичная система дифференциальных уравнений двухпотокового приближения для однородного слоя сформулирована Э.П. Зеге [9]. Подобный подход предложен Е.С. Кузнецовым [31].

С помощью определений $\mu^{\downarrow}$, $\mu^{\uparrow}$ (15) из (49) – (50) получаем систему точных уравнений для полусферических плотностей:

$$\frac{d\,[\mu^{\downarrow}(z)\,n^{\downarrow}(z)]}{d\,z}+\left\{\sigma_t(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\,[2-\gamma_0^{\downarrow}(z)]\right\}n^{\downarrow}(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\,\gamma_0^{\uparrow}(z)\,n^{\uparrow}(z)=2\pi\,a(z)\,\gamma_0^{+}(z,\mu_0), \tag{51}$$

$$\frac{d\,[\mu^{\uparrow}(z)\,n^{\uparrow}(z)]}{d\,z}+\left\{\sigma_t(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\,[2-\gamma_0^{\uparrow}(z)]\right\}n^{\uparrow}(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\,\gamma_0^{\downarrow}(z)\,n^{\downarrow}(z)=2\pi\,a(z)\,\gamma_0^{-}(z,\mu_0). \tag{52}$$

Такая система уравнений использована для ускорения сходимости итераций в методе средних потоков [18].

В P_1-приближении система уравнений (49) – (50) становится линейной и замкнутой:

$$4\frac{dJ^{\downarrow}}{dz}+[7\,\sigma_t(z)-4\,\sigma_s(z)-\sigma_s(z)\,\omega_1(z)]\,J^{\downarrow}(z)+[4\,\sigma_s(z)-\sigma_t(z)-\sigma_s(z)\,\omega_1(z)]\,J^{\uparrow}(z)=8\pi\,a(z)\,\gamma_0^{+}(z,\mu_0), \qquad (53)$$

$$4\frac{dJ^{\uparrow}}{dz}-[7\,\sigma_t(z)-4\,\sigma_s(z)-\sigma_s(z)\,\omega_1(z)]\,J^{\uparrow}(z)-[4\,\sigma_s(z)-\sigma_t(z)-\sigma_s(z)\,\omega_1(z)]\,J^{\downarrow}(z)=8\pi\,a(z)\,\gamma_0^{-}(z,\mu_0). \qquad (54)$$

Система (51) – (52) в P_1-приближении содержит нелинейные параметры $\mu^{\downarrow}(z)$, $\mu^{\uparrow}(z)$:

$$\frac{d[\mu^{\downarrow}(z)\,n^{\downarrow}(z)]}{dz}+\left\{\sigma_t(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\left[1+\frac{\omega_1(z)}{2}\,\mu^{\downarrow}(z)\right]\right\}n^{\downarrow}(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\left[1+\frac{\omega_1(z)}{2}\,\mu^{\uparrow}(z)\right]n^{\uparrow}(z)=2\pi\,a(z)\,\gamma_0^{+}(z,\mu_0), \qquad (55)$$

$$\frac{d[\mu^{\uparrow}(z)\,n^{\uparrow}(z)]}{dz}+\left\{\sigma_t(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\left[1-\frac{\omega_1(z)}{2}\,\mu^{\uparrow}(z)\right]\right\}n^{\uparrow}(z)-\frac{\sigma_s(z)}{2}\left[1-\frac{\omega_1(z)}{2}\,\mu^{\downarrow}(z)\right]n^{\downarrow}(z)=2\pi\,a(z)\,\gamma_0^{-}(z,\mu_0). \qquad (56)$$

В случае рэлеевского рассеяния в системах (53) – (54), (55) – (56) опускаются слагаемые, содержащие $\omega_1(z)$, и используются значения (32). Для консервативного слоя достаточно положить $\sigma_t(z)=\sigma_s(z)$.

Интегрируя уравнение (33) по μ на отрезках [0,1] и [–1,0] с весами 1 и μ можно получить точную систему уравнений, из которой одновременно определяются полусферические плотности $n^{\downarrow}$, $n^{\uparrow}$ и потоки $J^{\downarrow}$, $J^{\uparrow}$ [11].

Граничные условия

Как показано выше, радиационные характеристики можно выразить в терминах сферических гармоник. Поэтому формулировать граничные условия в моделях расчета потоков и плотностей, представляющих собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, будем аналогично методу сферических гармоник [5, 22, 32], исходя из краевой задачи для нулевой азимутальной гармоники (33). Требуя выполнения физического условия баланса потоков излучения на границах слоя с <вакуумом>:

$$\text{На } \Gamma_0\text{: } \int_0^1 \Phi_c^0(0,\mu)\,\mu\,d\mu=0, \qquad (57)$$

$$\text{На } \Gamma_H\text{: } \int_{-1}^0 [\Phi_c^0(H,\mu)-\Phi^*]\,\mu\,d\mu=0, \qquad (58)$$

когда

$$\mu\,\Phi_c^0(0,\mu)\big|_{\Gamma_0}\equiv 0,\quad \mu\,[\Phi_c^0(H,\mu)-\Phi^*]\big|_{\Gamma_H}\equiv 0,$$

и предполагая существование разложения (7), с учетом ортогональности полиномов Лежандра на отрезке [0, 1] приходим к условиям для коэффициентов Фурье [7] ($m = 0, 1, 2,...$):

$$\int_0^1 \mu\,\Phi_c^0(0,\mu)\,P_{2m}(\mu)\,d\mu=0,\ \int_{-1}^0 \mu\,[\Phi_c^0(H,\mu)-\Phi^*]\,P_{2m}(\mu)\,d\mu=0. \qquad (59)$$

Используя рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, выражения (59) можно переписать в эквивалентной форме ($m = 0, 1, 2,...$):

$$\int_0^1 \Phi_c^0(0,\mu)\,P_{2m+1}(\mu)\,d\mu=0,\quad \int_{-1}^0 [\Phi_c^0(H,\mu)-\Phi^*]\,P_{2m+1}(\mu)\,d\mu=0. \qquad (60)$$

Условия (60) являются условиями Маршака [5, 32, 33]. В [5] доказано, что эти приближенные граничные условия обеспечивают наименьшую погрешность метода сферических гармоник, т.е. являются <наилучшими> с точки зрения вариационного принципа, минимизирующего значения квадратичного функционала в рамках P_{2m+1}-приближения.

Найдем условия Маршака в P_1-приближении метода сферических гармоник для систем уравнений (34) – (35), (34) и (37), (34) и (39), (40) – (41). Подставим в (57) и (58) разложение (7) и в результате получим

$$\text{на } \Gamma_0\text{: } \frac{1}{2}\Phi^0_{c0}(0) + \frac{1}{3}\Phi^0_{c1}(0) = 0, \tag{61}$$

$$\text{на } \Gamma_H\text{: } (1-q)\frac{1}{2}\Phi^0_{c0}(H) = (1+q)\frac{1}{3}\Phi^0_{c1}(H) + \frac{1}{2}f^*_H\,. \tag{62}$$

Подставим точное представление Φ^0_{c1} и P_1-приближение для F^0_{c0} через полусферические потоки в условия Маршака (61), (62):

$$J^{\downarrow}(0) = 0,\ -J^{\uparrow}(H) = q\,J^{\downarrow}(H) + \pi f^*_H\,. \tag{63}$$

Как видим, условия Маршака в P_1-приближении являются точными для граничных значений полусферических потоков. Граничные условия в модели В.В.Соболева [10 – 13] совпадают с условиями Маршака в P_1-приближении. Такие же условия использованы в Эддингтон-приближении [14].

Выпишем точные представления граничного значения:

– через сферические гармоники

$$\Phi^* = f^*_H + q\,\Phi^0_{c0}(H) + \frac{2}{3}q\,\Phi^0_{c1}(H) + 2\,q\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(H)\,R_{2m}; \tag{64}$$

– через сферические плотности и потоки

$$\Phi^* = f^*_H + q\,\frac{n(H)}{4\pi} + 2\,q\,\frac{J(H)}{4\pi} + 2\,q\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(H)\,R_{2m}; \tag{65}$$

– через полусферические потоки и плотности

$$\Phi^* = f^*_H + \frac{q}{\pi}J^{\downarrow}(H);\ \ \Phi^* = f^*_H + \frac{q}{\pi}\mu^{\downarrow}(H)\,n^{\downarrow}(H). \tag{66}$$

В P_1-приближении

$$\Phi^* = f^*_H + q\,\Phi^0_{c0}(H) + \frac{2}{3}q\,\Phi^0_{c1}(H);\ \Phi^* = f^*_H + q\,\frac{n(H)}{4\pi} + q\,\frac{J(H)}{4\pi}\,. \tag{67}$$

Точные и приближенные модели расчета сферических потоков и плотностей солнечного излучения сводятся к двум основным видам:

– либо система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dw}{dz} + \alpha(z)\,v(z) = \varphi(z)\exp\left[-\frac{\tau(z)}{\mu_0}\right], \tag{68}$$

$$\frac{dv}{dz} + \beta(z)\,w(z) = p(z)\exp\left[-\frac{\tau(z)}{\mu_0}\right] \tag{69}$$

граничными условиями

$$w(0) = \alpha_0\,v(0) + \varphi_0,\quad w(H) = \alpha_H\,v(H) + \varphi_H, \tag{70}$$

– либо одно уравнение второго порядка типа <уравнения диффузии>:

$$\frac{d}{dz}m(z)\frac{du}{dz} - k^2(z)\,u = -f(z) \tag{71}$$

с источником

$$f(z) = F(z)\exp\left[-\frac{\tau(z)}{\mu_0}\right]$$

и граничными условиями

$$m(z)\frac{d\,u}{d\,z}\Big|_{z=0} = \kappa_0\, u(0) + \beta_0, \quad m(z)\frac{d\,u}{d\,z}\Big|_{z=H} = \kappa_H\, u(H) + \beta_H. \tag{72}$$

Обычно <диффузионные> модели (71) – (72) выводятся из системы двух уравнений (68) – (69) с граничными условиями (70) путем исключения одной из компонент $w(z)$ или $v(z)$ [21].

Для того чтобы постановка задачи расчета сферических потоков и плотностей была полной, необходимо к системе уравнений (68) – (69) присоединить два граничных условия, которые в каком-то смысле учитывали бы граничные условия (33). Существует произвол в выборе таких условий, так как граничные условия (33) могут быть удовлетворены приближенно различными способами. Уравнение (68) получается в результате интегрирования по μ на [–1, 1] с весом 1, а (69) – с весом μ. Аналогичные преобразования для формулировки граничных условий (70) некорректны, так как условия (33) односторонние и их нельзя интегрировать на отрезке $\mu \in [-1, 1]$.

Проинтегрируем по μ условие (33) на Γ_0 на отрезке [0,1], а на Γ_H – на [–1, 0] и получим точные соотношения:

на Γ_0: $\Phi^0_{c0}(0) + \frac{1}{2}\Phi^0_{c1}(0) + \sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m+1}(0)\, R^0_{2m+1} = 0,$

или $2\, n(0) + 3\, J(0) + 8\pi \sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m+1}(0)\, R^0_{2m+1} = 0;$

$$\text{на } \Gamma_H:\ \Phi^0_{c0}(H) - \frac{1}{2}\Phi^0_{c1}(H) - \sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m+1}(H)\, R^0_{2m+1} = \Phi^*, \tag{73}$$

$$\text{или}\quad 2\, n(H) - 3\, J(H) - 8\pi \sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m+1}(H)\, R^0_{2m+1} = 8\pi\, \Phi^*. \tag{74}$$

С помощью (64) условие (73) приводится к виду

$$(1-q)\,\Phi^0_{c0}(H) = f^*_H + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}q\right)\Phi^0_{c1}(H) + \sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m+1}(H)\, R^0_{2m+1} + 2\,q\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(H)\, R_{2m}\,,$$

а с помощью (65) условие (74) можно записать следующим образом:

$$(1-q)\,\frac{n(H)}{4\pi} = f^*_H + \left(\frac{3}{2} + 2\,q\right)\frac{J(H)}{4\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m+1}(H)\, R^0_{2m+1} + 2\,q\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(H)\, R_{2m}\,.$$

В P_1-приближении

$$2\,\Phi^0_{c0}(0) + \Phi^0_{c1}(0) = 0,\ (1-q)\,\Phi^0_{c0}(H) = f^*_H + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}q\right)\Phi^0_{c1}(H); \tag{75}$$

$$2\, n(0) + 3\, J(0) = 0, \quad 2(1-q)\, n(H) = 8\pi f^*_H + (3 + 4\,q)\, J(H). \tag{76}$$

Проинтегрируем по μ с весом μ условие (33) на Γ_0 на отрезке [0, 1], а на Γ_H – на [–1, 0]:

$$\text{на } \Gamma_0:\ \Phi^0_{c0}(0) + \frac{2}{3}\Phi^0_{c1}(0) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(0)\, R_{2m} = 0\,,$$

$$\text{или}\ \ n(0) + 2\, J(0) + 8\pi\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(0)\, R_{2m} = 0;$$

$$\text{на } \Gamma_H:\ \Phi^0_{c0}(H) - \frac{2}{3}\Phi^0_{c1}(H) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(H)\, R_{2m} = 0, \tag{77}$$

$$\text{или}\ \ n(H) - 2\, J(H) + 8\pi\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(H)\, R_{2m} = 0, \tag{78}$$

с помощью условия (64) из (77) определяем

$$(1-q)\,\Phi^0_{c0}(H) = f^*_H + (1+q)\frac{2}{3}\Phi^0_{c1}(H) - 2(1-q)\sum_{m=1}^{\infty}\Phi^0_{c,2m}(H)\, R_{2m}\,,$$

а с помощью (66) из условия (78) находим

$$(1-q)\, n(H) = 4\pi f_H^* + 2(1+q)\, J(H) - (1-q)\, 8\pi \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{c,2m}^0(H)\, R_{2m}\, .$$

В P_1-приближении получаем условия Маршака:

$$\Phi_{c0}^0(0) + \frac{2}{3}\Phi_{c1}^0(0) = 0, \quad (1-q)\, F_{c0}^0(H) = f_H^* + (1+q)\frac{2}{3}\Phi_{c1}^0(H); \tag{79}$$

$$n(0) + 2\, J(0) = 0, \quad (1-q)\, n(H) = 4\pi f_H^* + 2(1+q)\, J(H). \tag{80}$$

Как видим, граничные условия (75) – (76) и (79) – (80), построенные разными способами, в P_1-приближении отличаются значениями коэффициентов. Отметим, что вторым способом сформулированы практически условия Маршака.

Точные и приближенные модели расчета полусферических плотностей ($w = \mu^{\downarrow} n^{\downarrow}$, $v = \mu^{\uparrow} n^{\uparrow}$) или потоков ($w = J^{\downarrow}$, $v = J^{\uparrow}$) описываются системами дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,w}{d\,z} + a(z)\, w + b(z)\, v = \varphi(z) \exp\left[-\frac{\tau(z)}{\mu_0}\right], \tag{81}$$

$$\frac{d\,v}{d\,z} + c(z)\, v + d(z)\, w = p(z) \exp\left[-\frac{\tau(z)}{\mu_0}\right] \tag{82}$$

с граничными условиями

$$\xi_0\, v(0) = \alpha_0\, w(0) + \varphi_0,\ \xi_H\, v(H) = \alpha_H\, w(H) + \varphi_H. \tag{83}$$

При постановке граничных условий для расчета полусферических плотностей и потоков первым способом, используя определения $n^{\downarrow}$ (12), $n^{\uparrow}$ (13), $\mu^{\downarrow}$, $\mu^{\uparrow}$ (15), $J^{\downarrow}$ (11), $J^{\uparrow}$ (10), из условий (33) получаем точные соотношения:

$$\text{на } \Gamma_0\text{:}\quad n^{\downarrow}(0) = 0, \tag{84}$$

$$\text{на } \Gamma_H\text{:}\quad n^{\uparrow}(H) = 2\,\pi\,\Phi^*, \tag{85}$$

которые с помощью (66) можно записать по-разному:

$$n^{\uparrow}(H) = 2\,\pi f_H^* + 2\,q\, J^{\downarrow}(H);\ n^{\uparrow}(H) = 2\,\pi f_H^* + 2\,q\,\mu^{\downarrow}(H)\, n^{\downarrow}(H); \tag{86}$$

$$\frac{1}{\mu^{\uparrow}(H)} J^{\uparrow}(H) = 2\,\pi f_H^* + 2\,q\,\mu^{\downarrow}(H)\, n^{\downarrow}(H);\ \ \frac{1}{\mu^{\uparrow}(H)} J^{\uparrow}(H) = 2\,\pi f_H^* + 2\,q\, J^{\downarrow}(H). \tag{87}$$

Воспользуемся представлениями $\mu^{\downarrow}$, $\mu^{\uparrow}$ в P_1-приближении, чтобы условия (86), (87) переписать в следующей форме:

$$(6+q)\, n^{\uparrow}(H) = 12\,\pi f_H^* + 7\,q\, n^{\downarrow}(H), \tag{88}$$

$$-7\, J^{\uparrow}(H) = 8\,\pi f_H^* + (8\,q - 1)\, J^{\downarrow}(H). \tag{89}$$

Во втором способе точные граничные условия

$$\text{на } \Gamma_0\text{:}\quad J^{\downarrow}(0) = 0, \tag{90}$$

$$\text{на } \Gamma_H\text{:}\quad -J^{\uparrow}(H) = \pi\,\Phi^* \tag{91}$$

с помощью (66) принимают следующий вид:

$$-J^{\uparrow}(H) = \pi f_H^* + q\, J^{\downarrow}(H),\quad -J^{\uparrow}(H) = \pi f_H^* + q\,\mu^{\downarrow}(H)\, n^{\downarrow}(H),$$

$$-\mu^{\uparrow}(H)\, n^{\uparrow}(H) = \pi f_H^* + q\,\mu^{\downarrow}(H)\, n^{\downarrow}(H),\quad -\mu^{\uparrow}(H)\, n^{\uparrow}(H) = \pi f_H^* + q\, J^{\downarrow}(H).$$

В P_1-приближении

$$(7+q)\, n^{\uparrow}(H) = 12\,\pi f_H^* + (7\,q + 1)\, n^{\downarrow}(H). \tag{92}$$

Для системы (49) – (50) точными являются граничные условия (90) – (91), полученные вторым способом, а для системы (51) – (52), чтобы избавиться от нелинейных параметров, можно использовать условия (84) и (88), полученные первым способом, или (92), полученные вторым способом, в P_1-приближении.

Большинство алгоритмов радиационной коррекции в проблемах дистанционного зондирования формулируется на основе приближенных моделей переноса излучения с привлечением приближенных методов решения возникающих при этом математических задач, допускающих параметризацию обрабатываемых данных. Однако необходимо разрабатывать репрезентативные алгоритмы для проведения высокоточных эталонных расчетов с целью верификации инженерных методик, методик для экспресс-анализа и оперативной обработки и установления области их применимости с достаточной точностью. С единых методических позиций построены точные и приближенные модели расчета радиационных характеристик солнечного излучения, широко используемых в быстрых алгоритмах радиационной коррекции. Устойчивые корректные численные расчеты предлагается проводить быстрыми методами прогонки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–05–08542).

1. Фейгельсон Е.М., Краснокутская Л.Д. Потоки солнечного излучения и облака. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 157 с.
2. Ленобль Ж. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. Стандартные методы расчета. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 263 с.
3. Радиационно-фотохимические модели атмосферы / Под. ред. И.Л. Кароля. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 192 с.
4. Марчук Г.И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1961. 668 с.
5. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, М.: Изд-во АН СССР, 1961. 158 с. (Тр. МИАН; вып. 61).
6. Адамская И.А. // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. N 5. С. 927 – 941.
7. Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978. 216 с.
8. Султангазин У.М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука. Каз. ССР, 1979. 267 с.
9. Зеге Э.П. О двухпотоковом приближении в теории переноса излучения. Минск, 1971. 58 с. (Препринт / Институт физики АН БССР).
10. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: ГИТТЛ, 1956. 391 с.
11. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972. 336 с.
12. Сушкевич Т.А., Петроковец Е.М., Максакова С.В., Курдюкова О.С. Аналитические решения уравнения переноса для плоского слоя в приближении В.В. Соболева. М., 1992. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 56).
13. Сушкевич Т.А., Петроковец Е.М., Максакова С.В., Курдюкова О.С. Решение уравнения переноса для неоднородного плоского слоя в приближении В.В. Соболева. М., 1992. 28 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 64).
14. Shettle E.P., Weinman J.A. // J. Atm. Sci. 1970. V. 27. P. 1048–1055.
15. Joseph J.H., Wiscombe W.J., Weinman J.A. // J. Atm. Sci. 1976. V. 32. N 12. P. 2452–2459.
16. Зеге Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
17. Гольдин В.Я. // ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4. N 6. С. 1078–1087.
18. Гермогенова Т.А., Сушкевич Т.А. // Вопросы физики защиты реакторов. М.: Атомиздат, 1969. Вып. 3. С. 34–46.
19. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
20. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Обобщенная модель расчета плотности и потоков солнечного излучения. М., 1993. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 9).
21. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Линейные и нелинейные модели расчета плотности и потоков солнечного излучения. М., 1993. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 23).
22. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. О граничных условиях в моделях расчета плотности и потоков солнечного излучения. М., 1993. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 31).
23. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Дискретные алгоритмы расчета горизонтального потока солнечного излучения в приближении В.В. Соболева. М., 1993. 28 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 44).
24. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Однородные консервативные разностные схемы расчета плотности и потока солнечного излучения в приближении уравнения диффузии. М., 1993. 28 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 43).
25. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Однородные консервативные разностные схемы расчета плотности и потока солнечного излучения из системы дифференциальных уравнений. М., 1993. 28 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 54).
26. Сушкевич Т.А., Игнатьева Е.И., Максакова С.В. Однородные консервативные разностные схемы расчета полусферических плотностей и потоков солнечного излучения из системы дифференциальных уравнений. М., 1993. 28 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 55).
27. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
28. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

29. Г о б с о н Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИИЛ, 1952. 476 с.
30. К у з н е ц о в Е . С . // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. N 4. С. 769–772.
31. К у з н е ц о в Е . С . // Д. АН СССР. 1942. Т. 37. N 7–8. С. 237–244.
32. В л а д и м и р о в В . С . // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. N 5. С. 1091–1094.
33. M a r s h a k R . E . // Rhys. Rev. 1947. V. 71. P. 443 – 446.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, Москва

Поступила в редакцию
6 марта 1994 г.

T.A. Sushkevich, E.I. Ignatieva, S.V. Maksakova. **On the Models for Calculating Density and Fluxes of Solar Radiation.**

In this paper we formulate linear and nonlinear, exact and approximate models for calculating spherical and hemispherical densities and fluxes of solar radiation in layers of scattering and absorbing media. Particular cases of Rayleigh and conservative layers are analyzed. Special attention is paid to formulation of boundary conditions.