

**И.Е. Астахов, В.П. Будак, Д.В. Лисицин, В.А. Селиванов**

### **РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В МАЛОУГЛОВОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК**

Разработана малоугловая модификация метода сферических гармоник решения векторного уравнения переноса излучения. Предложенное приближение описывает основные эффекты распространения поляризованного излучения в мутной среде и отличается аналитической простотой. Проведен анализ точности решения и его сопоставление с точными решениями уравнения переноса.

При дистанционном зондировании природных образований вся доступная оптическим методам информация содержится в пространственно-угловом и спектральном распределении поляризационных характеристик отраженного или рассеянного ими излучения [1]. При фотометрическом (лучевом) описании излучения состояние поляризации определяется четырехмерным вектором, компоненты которого представляют собой коэффициенты разложения матрицы когерентности по соответствующему базису [1]. Наиболее часто [1] используется *SP*-представление (*stokes polarization*) поляризации в виде 4-х, легко измеримых на практике параметров  $\mathbf{L} = \{I, Q, U, V\}$ . В рамках лучевого приближения трансформация поляризованного излучения средой определяется из соответствующей краевой задачи для векторного уравнения переноса излучения (ВУПИ) [2–3].

Сложности решения ВУПИ хорошо известны [4]: даже при современном уровне развития численных алгоритмов и мощности ЭВМ решение поляризационных задач требует многочасовых расчетов. Решение для реальных сред зондирования усложняется угловой анизотропией рассеяния (аэрозольный тип матрицы). Как и в скалярном варианте, здесь развивалось малоугловое приближение [5–7], однако полученные результаты описывают ослабление компонент вектор-параметра в среде, но не дают их взаимного преобразования друг в друга и, что особенно важно для задач оптического зондирования, возникновение (<генерацию>) того или иного состояния поляризации в среде. Указанные методы разрабатывались в векторном варианте на основе скалярного малоуглового приближения в форме [8–9], являющегося следствием более общей формы [10]. Обобщению и развитию идей малоуглового приближения [10] для ВУПИ посвящена настоящая статья.

При решении задач пассивного дистанционного зондирования наибольший практический интерес представляют случаи зондирования объемов среды, имеющих одно из своих измерений значительно больше двух других: естественное освещение поверхности Земли, слоя атмосферы или океана и т.д. Для математического описания процессов переноса излучения в таких средах примем модель плоскопараллельного слоя мутной среды. Декомпозиция краевых задач для этого случая показывает [3], что общая краевая задача сводится к решению ВУПИ для слоя мутной среды, на которую падает плоская волна произвольно поляризованного света:

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}) + \varepsilon(z) \mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{\sigma(z)}{4\pi} \oint \hat{S}^{\leftrightarrow}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}', \quad (1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\Gamma_1} = L_0 \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), \\ \mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\Gamma_2} = 0; \end{cases}$$

где  $\mathbf{L}(z, \hat{\mathbf{I}})$  – вектор-параметр поляризации светового поля в глубине среды  $z$  по направлению  $\hat{\mathbf{I}} = \{\mu, \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi\}$ ;  $OXYZ$  – декартова система координат;  $\mu = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{I}}) = \cos \theta$ ;  $\theta, \varphi$  – зенитный и азимутальный углы;  $\hat{\mathbf{z}}$  – единичный орт в направлении  $OZ$ ;  $\hat{\mathbf{I}}_0 = \{\zeta, \sqrt{1 - \zeta^2}, 0\}$  –

направление падения солнечных лучей;  $\mu_0 = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{I}}_0) = \cos \theta_0$ ,  $\theta_0$  – зенитный угол Солнца;  $\Gamma_1 = \{z = 0, \hat{\mathbf{I}} \in \Omega_+\}$ ,  $\Gamma_2 = \{z = H, \hat{\mathbf{I}} \in \Omega_-\}$ ;  $\Omega$  – единичная сфера:  $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ,  $\Omega_+(\mu > 0)$ ,  $\Omega_-(\mu < 0)$  – нижняя и верхняя полусферы. Среда характеризуется следующими параметрами:  $\varepsilon(z)$  – показатель ослабления;  $\Lambda(z)$  – альbedo однократного рассеяния;  $\sigma(z) = \Lambda(z) \varepsilon(z)$  – показатель рассеяния;  $\hat{\mathcal{K}}(\cos \gamma)$  – матрица рассеяния,  $\cos \gamma = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$  (здесь и далее символ  $\langle \wedge \rangle$  над буквой обозначает единичные векторы, а символ  $\langle \leftrightarrow \rangle$  – матрицу).  $\hat{\mathcal{S}}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \hat{\mathcal{R}}(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0) \hat{\mathcal{K}}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \hat{\mathcal{R}}(\hat{\mathbf{I}}_0 \times \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}')$  – матрица локального преобразования при рассеянии [1];  $\hat{\mathcal{R}}(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0) = \hat{\mathcal{R}}(\chi)$  – матрица преобразования вектор-параметра при вращении плоскости референции (ротатор), где  $\chi$  – двугранный угол между плоскостями  $(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}')$  и  $(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0)$  [1–3]. Далее  $\tau$  – оптическая глубина;  $\tau_0$  – оптическая толщина слоя. Падающее излучение характеризуется вектор-параметром  $\mathbf{L}_0$ .

Приближение [10] строится в скалярном варианте на малоугловой модификации метода сферических гармоник (МСГ). Сложность перехода в векторном случае к СГ, как и решение всей краевой задачи, определяется видом матрицы локального преобразования  $\hat{\mathcal{S}}$ , которая в свою очередь при заданной  $\hat{\mathcal{K}}(\cos \gamma)$ , зависит от вида ротатора  $\hat{\mathcal{R}}$ . Вид матрицы ротатора зависит от формы представления поляризации. Особенно простой (диагональный) вид  $\hat{\mathcal{R}}$  приобретает в случае разложения матрицы когерентности по циркулярному базису (CP-представление (circular polarization)) [3, 11]

$$\hat{\mathcal{R}}(\chi) = \text{Diag} (e^{i2\chi}, 1, 1, e^{-i2\chi}), \quad (2)$$

причем SP- и CP-представления связаны между собой линейно

$$\mathbf{L}_{CP} = \begin{bmatrix} L_{+2} \\ L_{+0} \\ L_{-0} \\ L_{-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q - iU \\ I - V \\ I + V \\ Q + iU \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \hat{\mathcal{T}}_{CS} \mathbf{L}_{SP}, \quad (3)$$

где  $\hat{\mathcal{T}}_{CS}$  – матрица перехода;  $i$  – мнимая единица.

Однако такой переход преобразует и матрицу рассеяния

$$\hat{\mathcal{K}}_{CP}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \hat{\mathcal{T}}_{CS} \hat{\mathcal{K}}_{SP}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \hat{\mathcal{T}}_{CS}^{-1}, \quad (4)$$

где в случае аэрозольного рассеяния [12] в соответствии с (4) имеем

$$\hat{\mathcal{K}}_{SP}(\gamma) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & -a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{K}}_{CP}(\gamma) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_1 + a_3 & a_2 + ia_4 & a_2 - ia_4 & a_1 - a_3 \\ a_2 + ia_4 & a_1 + a_3 & a_1 - a_3 & a_2 - ia_4 \\ a_2 - ia_4 & a_1 - a_3 & a_1 + a_3 & a_2 + ia_4 \\ a_1 - a_3 & a_2 - ia_4 & a_2 + ia_4 & a_1 + a_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Для перехода к системе уравнений по методу СГ [11, 13] введем в рассмотрение обобщенные сферические функции

$$\hat{\mathcal{Y}}_l^n(\mu) = \text{Diag} \{P_{n,+2}^l(\mu), P_{n,+0}^l(\mu), P_{n,-0}^l(\mu), P_{n,-2}^l(\mu)\},$$

где  $P_{n,s}^l(\mu)$  – обобщенные полиномы Лежандра [14],  $s = \pm 0, \pm 2$ .

Для обобщенных полиномов имеют место рекуррентные соотношения [14]

$$(2l+1)\mu \hat{\mathcal{Y}}_l^n(\mu) = [\hat{\mathcal{A}}_{l+1}^n \hat{\mathcal{Y}}_{l+1}^n + \hat{\mathcal{A}}_l^n \hat{\mathcal{Y}}_{l-1}^n] + n \hat{\mathcal{B}}_l \hat{\mathcal{Y}}_l^n; \quad (6)$$

$$i(2l+1)\sqrt{1-\mu^2} \hat{\mathcal{Y}}_l^n(\mu) = [d_n^+ \hat{\mathcal{C}}_{l+1}^- \hat{\mathcal{Y}}_{l+1}^{n-1} + g_n^+ \hat{\mathcal{C}}_l^+ \hat{\mathcal{Y}}_{l-1}^{n-1}] + h_n^+ \hat{\mathcal{B}}_l \hat{\mathcal{Y}}_l^{n-1}; \quad (7)$$

$$i(2l+1)\sqrt{1-\mu^2}\hat{Y}_l^n(\mu) = [d_n^+ \hat{C}_{l+1}^+ \hat{Y}_{l+1}^{n+1} + g_n^- \hat{C}_l^- \hat{Y}_{l-1}^{n+1}] + h_n^- \hat{B}_l \hat{Y}_l^{n+1}; \quad (8)$$

теорема сложения

$$e^{in\lambda'} P_{ns}^l(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}') e^{-is\lambda} = \sum_{r=-l}^{r=l} P_{mr}^l(\hat{\mathbf{I}}_0 \cdot \hat{\mathbf{I}}) \overline{P_{rs}^l(\hat{\mathbf{I}}_0 \cdot \hat{\mathbf{I}}')} e^{ir(\varphi - \varphi')}, \quad (9)$$

и справедливо соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} \hat{Y}_k^n(\mu) \overline{\hat{Y}_l^n(\mu)} d\mu = \frac{2}{2l+1} \hat{Y}_{lk}^n, \quad (10)$$

где  $d_n^\pm = \sqrt{(l \pm n + 1)(l \pm n + 2)}$ ;  $g_n^\pm = \sqrt{(l \pm n - 1)(l \pm n)}$ ;

$h_n^\pm = \sqrt{(l \pm n)(l \mp n + 2)}$ ;  $\hat{A}_l^n = \text{Diag} \left( \frac{\sqrt{(l^2 - s^2)(l^2 - n^2)}}{l} \right)$ ;

$\hat{B}_l = \text{Diag} \left( \frac{(2l+1)s}{l(l+1)} \right)$ ;  $\hat{C}_l = \text{Diag} \left( \frac{\sqrt{l^2 - s^2}}{l} \right)$ ;

$\delta_{lk}$  – символ Кронекера;  $\hat{Y} = \text{Diag} \{1, 1, 1, 1\}$ ; черта сверху означает комплексное сопряжение.

Представим все входящие в (1) функции в виде рядов по обобщенным сферическим функциям

$$\begin{aligned} [\hat{X}_{CP}(\cos \gamma)]_{rs} &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) x_{rs}^l P_{rs}^l(\cos \gamma); \\ \mathbf{L}(\tau, \nu, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} e^{im\varphi} \hat{Y}_l^n(\nu) \mathbf{f}_l^n(\tau), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\nu = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) = \cos \psi$  – косинус зенитного угла, а  $\varphi$  – азимутальный угол  $\hat{\mathbf{I}}$  относительно направления падения излучения  $\hat{\mathbf{I}}_0$ , причем  $\mu = \nu \mu_0 + \sqrt{1 - \mu_0^2} \sqrt{1 - \nu^2} \cos \varphi$ ;  $(\hat{X}_k)_{rs} = x_{rs}^k$ .

Подставим разложения (11) в уравнение (1), умножим обе его части на  $\hat{Y}_k^m(\mu) e^{-im\varphi}$  и проинтегрируем по полному телесному углу  $d\hat{\mathbf{I}}$ . Тогда с учетом выражений (6) – (10) для  $\hat{Y}_k^n(\mu)$  получим систему связанных дифференциальных уравнений метода СГ для ВУПИ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+1} \frac{d}{d\tau} \left\{ \mu_0 \left[ \hat{A}_k^m \mathbf{f}_{k-1}^m + \hat{A}_{k+1}^m \mathbf{f}_{k+1}^m + m \hat{B}_k \mathbf{f}_k^m \right] - \frac{i}{2} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[ d_{m-1}^+ \hat{C}_k^- \mathbf{f}_{k-1}^{m-1} - g_{m-1}^- \hat{C}_{k+1}^- \mathbf{f}_{k+1}^{m-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + h_{m-1}^- \hat{B}_k \mathbf{f}_k^{m-1} + d_{m+1}^+ \hat{C}_k^+ \mathbf{f}_{k-1}^{m+1} - g_{m+1}^+ \hat{C}_{k+1}^+ \mathbf{f}_{k+1}^{m+1} + h_{m+1}^- \hat{B}_k \mathbf{f}_k^{m+1} \right] \right\} + (1 - \Lambda) \hat{X}_k \mathbf{f}_k^m = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученная система метода СГ отличается от выведенной в [13] другой осью системы координат единичных векторов направлений в пространстве: в [13] в качестве оси бралась  $\hat{\mathbf{z}}$ , а при выводе (12) –  $\hat{\mathbf{I}}_0$ .

Малоугловая модификация метода СГ (МСГ) в скалярном случае основывается [10] на возможности аппроксимации значений коэффициентов разложения тела яркости по полиномам Лежандра от номера монотонной медленно убывающей функцией. Это позволяет разложить зависимость коэффициентов от номера в ряд и, сохраняя после подстановки в систему уравнений СГ только первые два члена, свести систему уравнений к одному дифференциальному уравнению. Основой для такого приближения является резкая анизотропия тела яркости вследствие особенностей решения для функции Грина уравнения переноса [15].

Рассмотрим подробнее граничные условия краевой задачи (1). В *CP*-представлении для падающего излучения яркости  $L$ , степени поляризации  $p$ , эллиптичности  $q$  [1] и для плоскости поляризации, совпадающей с плоскостью  $(\hat{\mathbf{I}}_0 \times \hat{\mathbf{z}})$ , можно записать по (3) в плоскости референции  $(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0)$  (только в переднюю полусферу!)

$$\mathbf{L}_{CP}^0(\tau = 0, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} p e^{i2\varphi} \\ 1 - q \\ 1 + q \\ p e^{-i2\varphi} \end{bmatrix} \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0). \quad (13)$$

Раскладывая в ряд верхнее граничное условие (13), получим

$$\mathbf{L}_{CP}^0(\tau = 0, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{L}{2} \sum_{k \geq s} \frac{2k+1}{4\pi} \begin{bmatrix} p e^{i2\varphi} P_{+2,+2}^k(\nu) \\ (1-q) P_{+0,+0}^k(\nu) \\ (1+q) P_{-0,-0}^k(\nu) \\ p e^{-i2\varphi} P_{-2,-2}^k(\nu) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что все  $\mathbf{f}_k^m(\tau = 0) = \text{const}$ . С ростом  $\tau$  за счет рассеяния  $\mathbf{f}_k^m \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , однако на небольших  $\tau$  при сохранении значительного веса первых кратностей рассеяния и без учета обратного рассеяния, которое для аэрозольных частиц мало, зависимость  $\mathbf{f}_k^m$  от  $k$  должна быть медленной и монотонно убывающей. Это позволяет ввести аналогично скалярному варианту непрерывную зависимость коэффициентов  $\mathbf{f}^m(k)$  от номера  $k$ . Далее, из (14) видно, что азимутальная часть содержит только  $m = 0, \pm 2$ , т.е.  $k \gg m$ . Допустим, что это соотношение соблюдается и для  $\tau \neq 0$ . Разложим  $\mathbf{f}^m(k)$  в ряд Тейлора

$$\mathbf{f}^m(k \pm 1) = \mathbf{f}^m(k) \pm \frac{\partial \mathbf{f}^m(k)}{\partial k} + \dots \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) (сохраняя только члены первого порядка малости) и учитывая, что  $k \gg m$  и  $\mu_0 \rightarrow 1$ , получим

$$\mu_0 \frac{d}{d\tau} \mathbf{f}^m(\tau) + (\overset{\leftarrow}{\mathbf{Y}} - \Lambda \overset{\leftarrow}{\mathbf{X}}_k) \mathbf{f}^m(\tau) = 0. \quad (16)$$

С учетом пренебрежения в граничных условиях обратным рассеянием в МСГ они примут вид

$$\mathbf{f}^0(0) = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - q \\ 1 + q \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}^2(0) = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}^m(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Решение матричного дифференциального уравнения (16) при граничных условиях (17) для однородной по глубине мутной среды имеет вид [16]

$$\mathbf{f}_k^m(\tau) = \exp(-\tau/\mu_0) \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\exp(\Lambda \tau \zeta_i / \mu_0) (\zeta_i \overset{\leftarrow}{\mathbf{Y}} - \overset{\leftarrow}{\mathbf{X}}_k)^{\nu}}{\frac{d}{dz} \det(z \overset{\leftarrow}{\mathbf{Y}} - \overset{\leftarrow}{\mathbf{X}}_k) \Big|_{z=\zeta_i}} \right) \mathbf{f}_k^m(0), \quad (18)$$

где символ  $\langle \nu \rangle$  означает матрицу алгебраических дополнений к данной (дополнительная матрица), а  $\zeta_i$  являются решениями характеристического уравнения

$$\det(z \overset{\leftarrow}{\mathbf{Y}} - \overset{\leftarrow}{\mathbf{X}}_k) = 0. \quad (19)$$

Выражение (18) и есть решение ВУПИ в малоугловой модификации метода СГ. Нетрудно видеть, в этом приближении  $\mathbf{f}_k^m(\tau)$  на самом деле не зависит от азимутального индекса  $m$ , т.е. в решении независимо от глубины сохраняется азимутальный спектр падающего. Поскольку в падающем излучении содержатся только гармоники с  $m = 0, \pm 2$ , то решение краевой задачи представимо в виде

$$\mathbf{L}(\tau, \nu, \varphi) = \sum_{n=-1}^{+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{l+1}}{4\pi} e^{i2n\varphi} \hat{\mathbf{Y}}_l^{2n}(\nu) \hat{\mathbf{Y}}_l(\tau) \mathbf{f}_l^{2n}(0), \quad (20)$$

где

$$\hat{\mathbf{Y}}_k(\tau) = \sum_{i=1}^4 \frac{\exp(\Lambda\tau\zeta_i/\mu_0) (\zeta_i \hat{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{X}}_k)^{\nu}}{\frac{d}{dz} \det(z\hat{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{X}}_k) \Big|_{z=\zeta_i}} \exp(-\tau/\mu_0) \quad (21)$$

– коэффициент разложения матричной функции Грина плоского слоя мутной среды (матрица переноса [1]).

Свойства матрицы переноса (21) определяются корнями характеристического уравнения, а те, в свою очередь, зависят от матрицы  $\hat{\mathbf{X}}_k$ . В соответствии с разложением (11) и (5) имеем

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} u_k & c_k & \bar{c}_k & v_k \\ c_k & x_k & s_k & \bar{c}_k \\ \bar{c}_k & s_k & x_k & c_k \\ v_k & \bar{c}_k & c_k & u_k \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{a_1(\mu) + a_3(\mu)}{2} P_{2,2}^k(\mu) d(\mu); & v_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{a_1(\mu) - a_3(\mu)}{2} P_{2,-2}^k(\mu) d(\mu); \\ x_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{a_1(\mu) + a_3(\mu)}{2} P_{0,0}^k(\mu) d(\mu); & s_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{a_1(\mu) - a_3(\mu)}{2} P_{0,0}^k(\mu) d(\mu); \\ c_k &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{a_2(\mu) + ia_4(\mu)}{2} P_{2,0}^k(\mu) d(\mu). \end{aligned}$$

Вследствие сильной анизотропии индикатрисы рассеяния (малости обратного рассеяния) и свойства [12]

$$a_3(\mu) \approx a_1(\mu), \text{ при } \mu \rightarrow 1; \quad a_3(\mu) \approx -a_1(\mu), \text{ при } \mu \rightarrow -1;$$

для аэрозольных частиц значения коэффициентов  $s_k$  и  $v_k$  очень малы и ими можно пренебречь. Тогда решения характеристического уравнения выражаются в виде

$$\zeta_{12,34} = \frac{x_k + u_k}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_k - u_k)^2}{4} + 4r^2} = \alpha + \Delta, \quad (23)$$

где

$$r = \begin{cases} \text{Re } c_k = P, & \text{для корней 1,2;} \\ i \text{Im } c_k = iQ, & \text{для корней 3,4;} \end{cases} \quad \Delta = \begin{cases} \pm \beta, & \text{для корней 1,2;} \\ \pm i\delta, & \text{для корней 3,4.} \end{cases}$$

Здесь и далее для коэффициентов  $\zeta, r, \alpha, \Delta, P, Q, \beta, \delta$  индекс  $k$  для простоты записи выражений опускается. Для определенности во всех дальнейших выражениях  $\delta$  рассматривается как чисто действительная величина.

Подставляя полученные значения корней  $\zeta$  в выражения (17), (20), (21), с учетом связи  $SP$ - и  $CP$ - представлений получим

$$\mathbf{L}_{sp}(\tau, \nu, \varphi) = \frac{L}{2} \exp(-1(1 - \Lambda\alpha)\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \begin{bmatrix} (\operatorname{ch}(\Lambda\beta\tau) + \frac{(\alpha-u)}{\beta} \operatorname{sh}(\Lambda\beta\tau)) P_{0,0}^k(\nu) + 2pP\beta^{-1} \operatorname{sh}(\Lambda\beta\tau) \cos 2\varphi P_{2,0}^k(\nu) \\ 2P\beta^{-1} \operatorname{sh}(\Lambda\beta\tau) P_{2,0}^k(\nu) + p(\operatorname{ch}(\Lambda\beta\tau) + \frac{(u-\alpha)}{\beta} \operatorname{sh}(\Lambda\beta\tau)) \cos 2\varphi P_{2,2}^k(\nu) \\ -2Qq\delta^{-1} \sin(\Lambda\beta\tau) P_{2,0}^k(\nu) + p(\cos(\Lambda\beta\tau) + \frac{(u-\alpha)}{\delta} \sin(\Lambda\beta\tau)) \sin 2\varphi P_{2,2}^k(\nu) \\ q(\delta \cos(\Lambda\beta\tau) + \frac{(\alpha-u)}{\delta} \sin(\Lambda\beta\tau)) P_{0,0}^k(\nu) - 2pQ\delta^{-1} \sin(\Lambda\beta\tau) \sin 2\varphi P_{2,0}^k(\nu) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Для расчетов по приведенным выражениям необходимо знать разложение  $\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$  по обобщенным сферическим функциям. Эти вопросы рассмотрены несколькими авторами (в частности, [17]), где приведены как алгоритмы расчетов, так и примеры разложений. Однако сформулированное выше основное допущение МСГ о медленно монотонно убывающем характере коэффициентов разложения вектор-параметра поляризации и пренебрежении обратным рассеянием накладывает свое ограничение и на характер матрицы рассеяния. Поскольку характер рассеянного излучения в плоском случае определяется в основном матрицей рассеяния [15], то ход  $\hat{\mathbf{x}}_k$  от  $k$  должен быть также медленно монотонно убывающим. Если обратиться к результатам [17], то это требование не является слишком жестким для аэрозольных сред, однако должно быть проведено сглаживание хода  $\hat{\mathbf{x}}_k$  от  $k$ .

Достаточно удобно для практических расчетов аппроксимировать, как и в скалярном случае, произвольную матрицу рассеяния линейной комбинацией малоугловых матриц, использующих функцию Хеньи–Гринштейна [18]

$$\hat{\mathbf{x}}_{HG}(\mu) = \frac{1-g^2}{\sqrt{(1+g^2-2g\mu)^3}} \hat{\mathbf{x}}_0(\mu), \quad (25)$$

где  $g$  – средний косинус индикатрисы Хеньи–Гринштейна;

$$\hat{\mathbf{x}}_0(\mu) = \begin{bmatrix} 0,25(1+\mu)^2 R_m, 0,5(1-\mu^2) R_m, 0,5(1-\mu^2) R_m \\ 0,5(1-\mu^2) R_m, 1, 0, 0 \\ 0,5(1-\mu^2) R_m, 0, 1, 0,5(1-\mu^2) R_m, 0,5(1-\mu^2) R_m, 0,25(1+\mu)^2 \\ 0, 0,5(1-\mu^2) R_m, 0,5(1-\mu^2) R_m \end{bmatrix};$$

$R_m = P_m + iQ_m$ ;  $P_m, Q_m$  – максимальные степени линейной и круговой поляризации при однократном рассеянии. Простые аналитические выражения для коэффициентов разложения одной матрицы Хеньи–Гринштейна по (22) приведены в [18].

Нетривиальность приведенных при МСГ преобразований делает затруднительной аналитическую оценку точности полученного приближения. Наиболее эффективным путем такой оценки является сравнение с точными численными или аналитическими решениями ВУПИ. На рис. 1 приведено сравнение полученного решения с аналитическим решением, предложенным С. Чандрасекаром [2] для однородного слоя с рэлеевской матрицей рассеяния и  $\Lambda = 1$ .

Как видно, для оптических толщ  $0,2 < \tau \leq 5$  различие степеней линейной поляризации в области углов визирования  $0 \leq \gamma \leq 90^\circ$  для точного метода и МСГ составляет менее 10%. В верхней полусфере это различие велико, что соответствует неучету дисперсии путей рассеянных фотонов и пренебрежению обратным рассеянием в малоугловой модификации. Для оптических толщ  $\tau > 5$  существенную роль начинает играть дисперсия путей, что и наблюдаем на графиках рис. 2, где приведено убывание максимальной линейной поляризации с ростом оптической толщи.

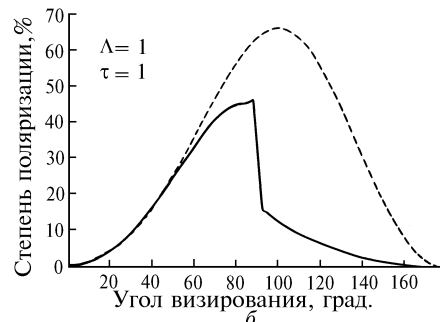
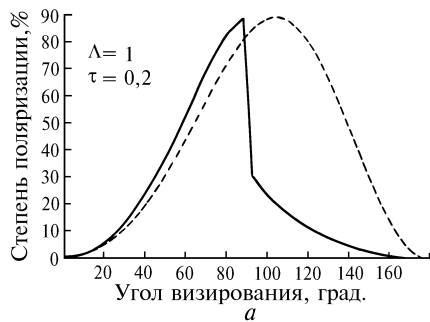


Рис. 1. Сравнение расчетов степени поляризации излучения внутри среды по МСГ (штриховая линия) с аналитическим решением С. Чандрасекара (сплошная)

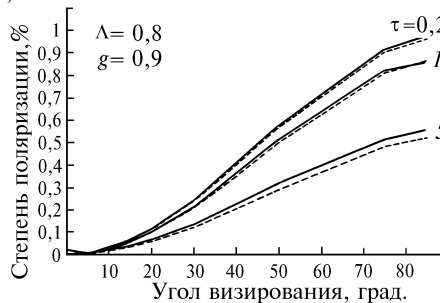
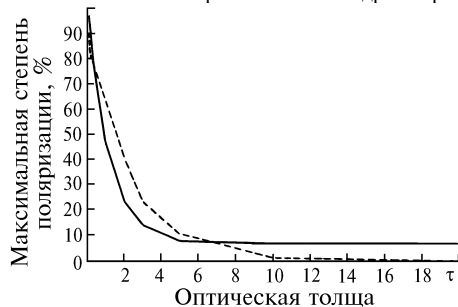


Рис. 2. Сравнение кривых ослабления максимальной степени поляризации с глубиной по МСГ (штриховая линия) с аналитическим решением С. Чандрасекара (сплошная) (рэлеевское рассеяние)

Рис. 3. Сравнение расчетов степени поляризации излучения внутри аэрозольной среды по МСГ (штриховая линия) с численным решением методом Монте-Карло (сплошная)

Для аэрозольных сред и неконсервативного рассеяния ( $\Lambda \neq 1$ ) оценка точности осуществлялась сравнением с результатами расчетов полей методом Монте-Карло. Результаты расчетов ( $3 \cdot 10^5$  испытаний, максимальная дисперсия менее 4%) приведены на рис. 3. Графики даны в передней полусфере визирования для аэрозольной среды с  $\Lambda = 0,8$  и матрицей рассеяния вида (24) – (25) с  $g = 0,9$ .

1. Розенберг Г. В. // УФН. 1977. Т. 121. N 1. С. 97–138.
2. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953. 431 с.
3. Сушкевич Т. А., Стрелков С. А., Иолтуховский А. А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики // М.: Наука, 1990. 296 с.
4. Garcia R. D. M., Siewert C. E. // JQSRT. 1986. V. 36. N 5. P. 401–423.
5. Зеге Э. П., Чайковская Л. И. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1985. Т. 21. N 10. С. 1043–1049.
6. Васильков А. П., Кондранин Т. В., Мясников Е. В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. N 8. С. 873–882.
7. Ito S., Oguchi T. // JOSA. 1989. V. A6. N 12. P. 1852–1858.
8. Wentzel G. // Ann. d. Phys. 1922. B. 69. N 5. S. 335–368.
9. Moliere G. // Zeit. f. Natur. 1948. B. 3a. N. 2 S. 78–97.
10. Будак В. П., Сармин С. Э. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N 9. С. 981–987.
11. Kušđer I., Ribarič M. // Optica Acta. 1959. V. 6. N 1. P. 42–51.
12. Хюлст ван де Г. Рассеяние света малыми частицами // М.: ИЛ, 1961. 636 с.
13. Устинов Е. А. // Космические исследования. 1988. Т. 26. Вып. 4. С. 550–562.
14. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 354 с.
15. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса // М.: Наука, 1986. 272 с.
16. Ланкастер П. Теория матриц // М.: Наука, 1982. 272 с.
17. De Rooij W. A., van der Stap C. C. A. H. // Astr. et Astrop. 1984. V. 131. P. 237–248.
18. Зеге Э. П., Чайковская Л. И. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1981. Т. 17. N 6. С. 604–613.

Московский энергетический институт  
Московский технический университет связи и информатики

Поступила в редакцию  
15 марта 1994 г.

I. E. Astakhov, V. P. Budak, D. V. Lisitsin, V. A. Selivanov. **Solution of the Vector Radiative Transfer Equation in the Small-Angle Approximation of the Spherical Harmonics Method.**

In this paper we present a version of small-angle approximation of the spherical harmonics method for solving the radiation transfer equation in vector form. The approach proposed in this paper enables one to describe the main effects accompanying the propagation of a polarized radiation through turbid media being very simple analytically. The accuracy of this solution technique is estimated and it is compared with that of an exact solution of the radiation transfer equation.

**Решение векторного уравнения переноса**

759