<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 6 (1995)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

УДК 528.85; 621.396

**Протасов К.Т.**

# РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АВТОМАТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВИДЕОДАННЫХ В УСЛОВИЯХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В рамках задач мониторинга подстилающей поверхности Земли и облачности для наиболее полного извлечения информации скомплектованных спутниковых видеоданных, картографической информации и результатов контактных измерений в условиях априорной неопределенности синтезированы новые оценочные байесовы решающие правила распознавания образов и автоматической классификации с учетом высокой размерности разнородных наблюдений, скудных объемов обучающих последовательностей и вырожденности носителей аппроксимирующих распределений.

Для оценивания состояний подстилающей поверхности Земли и облачности приходится обрабатывать большие объемы спутниковых многомерных данных, регистрируемых десятками спектральных каналов видимого диапазона (ВД), инфракрасного (ИК), сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазонов электромагнитного излучения с учетом результатов подспутниковых контактных измерений и ландшафтного тематического картографирования. Необходимость учета временны́х характеристик и пространственной текстуры видеоданных для решения проблем природопользования и экологического мониторинга лишь увеличивает размерность анализируемых наблюдений. Разработка методов совмещения разнородных изображений и появление орбитальных средств для периодического наблюдения поверхности Земли и облачности открывают перспективы совместного анализа разнородных и разновременных данных.

Традиционный подход анализа изображений ориентирован на обработку таких отдельных компонентов, как совокупность изображений ВД, ИК- или радиолокационных (РЛ) изображений с последующим агрегированием компонентных решений. Это приводит к безвозвратной потере информации межкомпонентных связей.

Возникает проблема наиболее полного извлечения информации многокомпонентных разнородных данных существенно высокой размерности.

Из алгоритмов предварительной обработки видеоданных основная роль отводится алгоритмам распознавания образов с <обучением> по тестовым участкам изображений и алгоритмам автоматической классификации, когда обучающие выборки отсутствуют. Эти алгоритмы позволяют анализировать геометрию многомерных выборочных пространств, эффективно решать задачу агрегирования, объективного сегментирования и дешифрирования данных.

Учитывая стохастическую природу регистрируемых полей, для построения алгоритмов распознавания образов и автоматической классификации естественно использовать статистическую теорию проверки гипотез и оценивания параметров, основанную на условных вероятностных распределениях распознаваемых ситуаций, которые, как правило, не известны.

В последнее время интенсивно развивается теория непараметрического оценивания неизвестных распределений по выборочным данным, при этом остаются открытыми вопросы выбора ядра этих оценок и, что более существенно, параметра сглаживания.

Определим структуру наблюдаемых разнородных данных и введем понятие элемента наблюдения – агрегата данных. Будем полагать, что все зарегистрированные компоненты изображений ВД-, ИК-, СВЧ-диапазонов, сопутствующие картографические данные и данные контактных наблюдений оцифрованы, согласованы по масштабам и нормализованы таким образом, что выбрав для учета текстурных характеристик за элемент наблюдения фрагмент $m_x \times m_y$ пикселей яркостных характеристик, например, видимого диапазона длин волн, мы сможем сформировать наборы соответствующих фрагментов по всем спектральным каналам ВД-, ИК-, СВЧ-диапазонов, дополнить фрагментами картографических данных и вектором контактных измерений. В зависимости от решаемой задачи, в частности, может быть выбран гексагональный фрагмент носителя пространственной информации, связанный с картографической основой.

Скомпонованный таким образом агрегат наблюдаемых данных можно описать в виде следующей, зависящей от конкретной задачи, структуры с мультииндексами

$$\mathbf{z}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{ll} \{x^{ijk}\}_{m_i \times m_j \times m_k}, & i = 1, \ldots, m_i;\ j = 1, \ldots, m_j;\ k = 1, \ldots, m_k; \\ \{y^{\mu\nu}\}_{m_\mu \times m_\nu}, & \mu = 1, \ldots, m_\mu;\ \nu = 1, \ldots, m_\nu; \\ \{v^l\}_{m_l}, & l = 1, \ldots, m_l; \end{array} \right\},$$

где $\{x^{ijk}\}$ – оцифрованные значения <яркостей> компонент ВД-, ИК-, СВЧ-диапазонов со значениями на квадрате $m_i \times m_j$ пикселей опорного фрагмента видеоданных, $m_k$ – общее число отдельных изображений; $\{y^{\mu\nu}\}$ – оцифрованные картографические данные со значениями на квадрате $m_\mu \times m_\nu$ пикселей; $\{v^l\}$ – вектор подспутниковых наблюдений размерности $m_l$.

Если через $n$ обозначить обобщенную размерность агрегата данных $n = m_i \times m_j \times m_k + m_\mu \times m_\nu + m_l$, тогда $\mathbf{z}(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u}$ – набор мультииндексов, который иногда будем опускать, будет являться элементом $n$-мерного евклидова пространства; $\mathbf{z}(\mathbf{u}) \in E^n$. Хотя с теоретической точки зрения и существует изоморфизм пространства многомерных матричных структур данных и пространства векторов с компонентами, составленными из всех компонент матричных данных, тем не менее мы не будем прибегать к векторизации агрегатов $\mathbf{z}(\mathbf{u})$, так как последняя разрушает естественную структуру данных. В связи с этим необходимо определить скалярное (внутреннее) и прямое (внешнее) произведения элементов $\mathbf{z}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{z}'(\mathbf{u}) \in E^n$, причем для компактности изложения будем использовать векторную запись операций и соответствующую терминологию, поясняемые в Приложении.

Рассмотрим задачу построения решающего правила распознавания образов в статистической постановке, когда даны обучающие последовательности агрегатов, полученные с тестовых участков видеоданных, дополненных сопутствующей информацией контактных измерений.

Пусть в евклидовом $n$-мерном пространстве $E^n$ агрегатов данных $\mathbf{z}(\ ) \in E^n$ и пространстве образов $\Lambda = \{1, \ldots, L\}$ из $L$ образов (классов) определены вероятностные меры с априорным распределением ситуаций $P(\lambda)$ и условными функциями плотности вероятностей $f_\lambda(\mathbf{z}(\ ))$ агрегатов наблюдаемых данных $\mathbf{Z}(\ ) \in E^n$, где $n$ – обобщенная размерность данных. Определим простую матрицу потерь от принимаемых решений $(1 - \delta_{\lambda\mu})$, где $\delta_{\lambda\mu}$ – символ Кронекера.

Как известно [1], оптимальное в смысле минимума средних потерь, байесово решающее правило имеет следующий вид:

$$r(\mathbf{z}(\ )) = \arg \max_{\lambda \in \Lambda} P(\lambda) f_\lambda(\mathbf{z}(\ )),\ \ r, \lambda \in \Lambda, \tag{1}$$

где решение $r(\ )$ также принадлежит пространству классов $\Lambda$. В реальных задачах условные функции плотности $f_\lambda(\ )$ неизвестны, но имеются обучающие последовательности выборочных данных, классифицированные <учителем> $\mathbf{z}_1^\lambda(\ ), \ldots, \mathbf{z}_{N_1}^\lambda(\ )$, где $N_\lambda$ – объем выборки класса $\lambda \in \Lambda$. Для восстановления неизвестных распределений в $E^n$ естественно воспользоваться их непараметрическими оценками, например в метрике с гауссовым ядром [2]:

$$\hat{f}_\lambda(\mathbf{z}(\ )) = \frac{N_\lambda^{-1} h_\lambda^{-n}}{(\sqrt{2\pi})^n\ |\hat{G}_\lambda|^{1/2}} \sum_{j=1}^{N_\lambda} \exp\left\{ -\frac{1}{2 h_\lambda^2} (\mathbf{z}(\ ) - \mathbf{z}_j^\lambda(\ ))^{\mathrm{T}}\ \hat{G}_\lambda^{-1}\ (\mathbf{z}(\ ) - \mathbf{z}_j^\lambda(\ )) \right\}, \tag{2}$$

где $\hat{G}_\lambda$ – оцениваемая по обучающей выборке класса корреляционная матрица; т – знак транспонирования; $h_\lambda$ – параметр сглаживания; $N_\lambda$ – объем выборки материала обучения; $\lambda \in \Lambda$. Учитывая вырожденность обратной корреляционной матрицы $\hat{G}_1^{-1}$, возникающей в связи с бедностью статистики выборочных данных материала обучения, и высокую размерность пространства наблюдений, так что $n \geq N_\lambda$, рассмотрим вопросы корректного вычисления $\hat{f}_\lambda(\mathbf{z}(\,))$, используя результаты Приложения.

С этой целью представим квадратичную форму гауссова ядра в (2) следующим образом (П. 6):

$$Q_j = (\mathbf{z}(\,) - \mathbf{z}_j(\,))^{\mathrm{T}}\, \hat{G}^{-1}\, (\mathbf{z}(\,) - \mathbf{z}_j(\,)) = (\mathring{\mathbf{z}}(\mathbf{u}) - \mathring{\mathbf{z}}_j(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma_i^2}\, \mathbf{\Phi}_i(\mathbf{u})\, \mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{v})\, (\mathring{\mathbf{z}}(\mathbf{v}) - \mathring{\mathbf{z}}_j(\mathbf{v})) + (\mathring{\mathbf{z}}(\mathbf{u}) - \mathring{\mathbf{z}}_j(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{\sigma^2}\, \mathbf{\Phi}_i(\mathbf{u})\, \mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{v})\, (\mathring{\mathbf{z}}(\mathbf{v}) - \mathring{\mathbf{z}}_j(\mathbf{v})),$$

где центрирование агрегатов производится относительно оценки математического ожидания соответствующего класса, $\mathring{\mathbf{z}}(\,) = \mathbf{z}(\,) - \hat{\mu}(\,)$, $\sigma_i^2 = \lambda_i$, $\{\mathbf{\Phi}_i(\,)\}_1^k$ – <главная> (П. 6) и $\{\mathbf{\Phi}_i(\,)\}_{k+1}^n$ – <дополнительная> части базиса Карунена – Лоэва; $\sigma$ – регуляризующий параметр, единый для всего дополнительного базиса ввиду отсутствия информации для его конкретизации.

Преобразуем квадратичную форму $Q_j$ с учетом следующих замечаний, а именно: так как <главная> часть базиса $\{\mathbf{\Phi}_i(\,)\}_1^k$ получена по выборочным значениям класса, то центрированные значения обучающей выборки с высокой точностью представимы в базисе <своего> класса. В связи с этим коэффициенты представления этих выборочных значений в базисе <дополнения> $\{\mathbf{\Phi}_i(\,)\}_{k+1}^n$ близки к нулю и ими можно пренебречь, тогда

$$Q_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{(y^i - x_j^i)^2}{\sigma_i^2} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(y^i)^2}{\sigma^2},$$

где $y^i$ и $x_j^i$ – коэффициенты представления центрированных наблюдений $\mathring{\mathbf{z}}(\,)$ и $\mathring{\mathbf{z}}_j(\,)$ в базисе $\{\mathbf{\Phi}_i(\,)\}_1^k$ и $\{\mathbf{\Phi}_i(\,)\}_{k+1}^n$ (П. 3). Как нетрудно видеть, $\sum_{i=k+1}^{n} (y^i)^2$ есть не что иное, как ошибка аппроксимации наблюдаемой реализации $\mathbf{z}(\,)$, предварительно центрированной относительно математического ожидания класса $\hat{\mathbf{m}}(\,)$ в базисе этого же класса, т.е.

$$\sum_{i=k+1}^{n} (y^i)^2 = \|\mathring{\mathbf{z}}(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^{k} y^i\, \mathbf{\Phi}_i(\mathbf{u})\|^2 = \mathcal{E}_k^2\, (\mathring{\mathbf{z}}(\,)).$$

Таким образом, модифицированная оценка неизвестной функции плотности имеет следующий вид:

$$\tilde{f}_\lambda(\mathbf{z}(\,)) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n-k_\lambda}} \frac{1}{\sigma_1^{n-k_1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\,\sigma_1^2}\, \mathcal{E}_{k_\lambda}^2\, (\mathring{\mathbf{z}}(\,))\right\} \frac{N_\lambda^{-1}}{(\sqrt{2\pi})^{k_\lambda}} \frac{h_\lambda^{-k_\lambda}}{(\prod_{i=1}^{k_\lambda} \sigma_{\lambda\, i})} \sum_{j=1}^{N_\lambda} \exp\left\{-\frac{1}{2\, h_\lambda^2} \sum_{i=1}^{k_\lambda} \frac{(y^i - x_j^i)^2}{\sigma_{\lambda\, i}^2}\right\} \qquad (3)$$

и следующую геометрическую интерпретацию, а именно: в пространстве выборочных данных мы имеем обычную непараметрическую оценку плотности в пространстве спектральных признаков базиса Карунена – Лоэва (вторая компонента в (3)), первая компонента в (3) ввиду недостатка информации есть гауссова функция плотности, описывающая распределение ошибки представления произвольного наблюдения в базисе класса.

Качество решающего правила (1) с модифицированными оценками функций плотности (3) будем характеризовать эмпирическим риском [7], а именно:

$$\hat{R} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{N_\lambda} \sum_{j=1}^{N_\lambda} P(\lambda)\, I\, \{\lambda = \arg\max_{\mu \in \Lambda} P(\mu)\, \tilde{f}_\mu(\mathbf{z}_{\mathrm{j}}^{\lambda}(\,))\}, \qquad (4)$$

где $I$\{истина\} = 0, $I$\{ложь\} = 1 – индикаторная функция ошибочных решений. Причем для экономии выборочных значений эмпирический риск подсчитывается методом <скользящего>

контроля, а именно при $\lambda = \mu$ в формуле (4) при подсчете $\tilde{f}_{\mu=\lambda}(\mathbf{z}_j^\lambda(\,))$ в точке $\mathbf{z}_j^\lambda(\,)$ последняя исключается из выборочных данных $\mathbf{z}_1^\lambda(\,)$, ..., $\mathbf{z}_{j-1}^\lambda$, $\mathbf{z}_{j+1}^\lambda(\,)$, ..., $\mathbf{z}_{N_\lambda}^\lambda(\,)$, по которым, собственно, и оценивается сама функция $\tilde{f}_{\mu=\lambda}(\,)$ (3).

Следует заметить, что каждая из оценок функций плотности $\tilde{f}_\lambda(\,)$ имеет по два недоопределенных параметра $h_\lambda$ и $\sigma_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$. Естественно выбрать такие параметры $h_\lambda$, $\sigma_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, которые бы доставляли минимум функции риска $\hat{R}$ (4). Учитывая многоэкстремальность и недифференцируемость $\hat{R}$, для решения задачи минимизации нами модифицированы поисковые методы оптимизации [5], сочетающие случайный поиск с локальным <градиентным> спуском.

При этом необходимо знать область изменения варьируемых параметров. Приближенное значение границ изменения параметров можно оценить из условий максимума функционала эмпирического правдоподобия [6], тогда

$$\left[\sum_{i=1}^{N_\lambda}\min_{\{j\}_{j\neq i}}\sum_{l=1}^{k_\lambda}\frac{(x_i^l-x_j^l)^2}{\sigma^2_{\lambda l}\,N_\lambda\,k_\lambda}\right]^{1/2} < h_\lambda < \left[\sum_{i=1}^{N_\lambda}\max_{\{j\}}\sum_{l=1}^{k_\lambda}\frac{(x_i^l-x_j^l)^2}{\sigma^2_{\lambda l}\,N_\lambda\,k_\lambda}\right]^{1/2}, \qquad (5)$$

$$\sigma_\lambda \cong \left[\frac{\sum_{j=1}^{M_1}\mathcal{E}^2_{k_\lambda}(\mathring{\mathbf{z}}_j(\,))}{(n-k_\lambda)\,M_\lambda}\right]^{1/2},$$

где $\mathring{\mathbf{z}}_1^\lambda(\,)$, ..., $\mathring{\mathbf{z}}_{M_\lambda}^\lambda(\,)$ – обучающая выборка всех классов объема $M_\lambda = \sum_{i=1,\, i\neq\lambda}^{L} N_i$, когда из нее удален класс $\lambda$, а центрирование производится относительно математического ожидания класса $\lambda$ и ошибка $\mathcal{E}^2_{k_\lambda}(\,)$ вычисляется с использованием базиса класса $\lambda\in\Lambda$.

После того как параметры $h_\lambda$, $\sigma_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, минимизирующие эмпирический риск, будут определены, решающее правило (1) может быть использовано для анализа агрегатов данных, не участвующих в обучении алгоритма.

Теперь предположим, что обучающие выборки отсутствуют, но имеется смешанная выборка, и задача заключается в том, чтобы, изучая геометрию расположения данных смешанной выборки, выявить некоторое сравнительно небольшое число групп <компактности> выборочных данных, называемых кластерами или таксонами. Выделенные классы компактности, а точнее, выборочные значения, образующие эти классы, далее могли бы служить обучающими выборками для построения оценочных байесовых решающих правил (1).

Будем использовать статистическую модель описания ситуаций и полагать, что в нашем распоряжении имеется неклассифицированная выборка агрегатов наблюдений $\mathbf{z}_1(\,)$,..., $\mathbf{z}_N(\,)$, где $N$ – объем выборки; $\mathbf{z}(\,)\in E^n$.

Предположим, что случайный агрегат $\mathbf{Z}(\,)$ имеет функцию плотности распределения вероятностей следующего вида:

$$f(\mathbf{z}(\,)) = \sum_{\lambda\in\{1,\ldots,L\}} P(\lambda)\,f_\lambda(\mathbf{z}(\,)), \qquad (6)$$

где $L$ – число кластеров; $f_\lambda(\mathbf{z}(\,))$ – условная одномодальная функция плотности кластера $\lambda$; $P(\lambda)$ – вес функции плотности $f_\lambda(\,)$ в смеси, имеющий смысл априорной вероятности появления кластера $\lambda$; $\sum_{\lambda\in\{1,\ldots,L\}} P(\lambda) = 1$, причем величины, входящие в (6), не известны.

Задача заключается в том, чтобы по имеющейся неклассифицированной выборке $\mathbf{z}_1(\,)$, ..., $\mathbf{z}_N(\,)$ объема $N$ наблюдаемых агрегатов $\mathbf{z}(\,)$ восстановить компоненты смеси (6) $\{L, P(\lambda), f_\lambda(\,), \lambda\in\{1, ..., L\}\}$. Следует заметить, что задача восстановления компонентов смеси (6) имеет решение лишь в случае ее идентифицируемости [7]. Это трудно проверяемое на практике условие с геометрической точки зрения означает, что $f(\mathbf{z}(\ ))$ должна иметь <ярко выраженные> локальные моды, порождаемые кластерообразующими подвыборками смешанной выборки. Кроме того, для упрощения задачи будем полагать, что объемы этих кластерообразующих подвыборок приближенно пропорциональны значениям $P(\lambda)$,так что

$$P(\lambda) \cong N_\lambda / N, \quad \lambda \in \{1, ..., L\}.$$

Решение задачи восстановления смеси в корректной постановке связано с поиском максимума функционала правдоподобия, варьированием неизвестных параметров с учетом выбранной параметризации $f_\lambda(\ )$ и является громоздким в вычислительном плане. Поэтому оправданы эвристические подходы приближенного решения этой задачи, основанные на анализе геометрии расположения выборочных агрегатов в пространстве смешанной выборки.

Иерархическая процедура выделения кластеров строится следующим образом: в пространстве наблюдений определяется функция <расстояния>, и анализируются расстояния между всевозможными парами выборочных данных $\mathbf{z}_1(\ ), ..., \mathbf{z}_N(\ )$. На первом шаге объединяются в кластеры те из пар выборочных элементов, которые наиболее <близки> между собой в смысле выбранного расстояния [8]. Результатом первого шага является выявление <центров сгущений> агрегатов. На втором и последующих шагах анализируются все расстояния между обнаруженными на первом шаге <сгущениями>, причем расстояние между сгущениями определяется через расстояние между сгущением и каждой точкой другого сгущения, выбирается ближайшая в смысле этого расстояния точка второго сгущения и вновь объединяются те из них, расстояния между которыми минимальны, вновь производятся укрупнение кластеров и уменьшение их числа.

Процесс укрупнения кластеров продолжается до тех пор, пока не будет получено необходимое или близкое к ожидаемому количество кластеров, или до тех пор, пока все точки смешанной выборки не сольются в один таксон.

Пусть $\mathbf{z}_1^\lambda(\ ), ..., \mathbf{z}_{M_\lambda}^\lambda(\ )$ – подвыборка объема $M_\lambda$ из смешанной выборки $\mathbf{z}_1(\ ), ..., \mathbf{z}_N(\ )$, выделенная в кластер $\lambda$ на некотором шаге итерации. Степень принадлежности анализируемого наблюдения $\mathbf{z}(\ )$ к совокупности $\mathbf{z}_1^\lambda(\ ), ..., \mathbf{z}_{M_\lambda}^\lambda(\ )$ выделенных в кластер наблюдений определим величиной, ассоциируемой со значением непараметрической оценки функции плотности в точке $\mathbf{z}(\ )$ следующим образом:

$$\rho(\mathbf{z}(\ );\ \mathbf{z}_1^\lambda(\ ), ..., \mathbf{z}_{M_\lambda}^\lambda(\ )) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M_\lambda} \frac{|\hat{G}|^{-1/2}\, h_\lambda^{-n}}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\,h_\lambda^2}(\mathbf{z}(\ ) - \mathbf{z}_j^\lambda(\ ))^{\mathrm{T}}\, \hat{G}^{-1}\,(\mathbf{z}(\ ) - \mathbf{z}_j^\lambda(\ ))\right\}, \tag{7}$$

где $h_\lambda$ – параметр сглаживания, изменяющийся в процессе итераций от $h_{\min}$ до $h_{\max}$; $\hat{G}$, $\hat{G}^{-1}$ – оценки корреляционной и обратной корреляционных матриц по выборке $\mathring{\mathbf{z}}_1^\lambda(\ ), ..., \mathring{\mathbf{z}}_{M_\lambda}^\lambda(\ )$ объема $M_\lambda$ с учетом <устойчивого> вычисления. Заметим, что на первых шагах итерационной процедуры, когда объем выборочных данных кластера $M_\lambda$ мал, для оценивания $\hat{G}$ и $\hat{G}^{-1}$ следует использовать всю смешанную выборку. После того как все расстояния $\rho_\lambda(\mathbf{z}(\ ))$ вычислены $\lambda \in \{1, ...\}$, элемент $\mathbf{z}(\ )$ присоединяется к тому набору $\{\mathbf{z}_j^\lambda\}_1^{M_\lambda}$, для которого значение расстояния $\rho_\lambda(\ )$ максимально, другими словами, по правилу Байеса (1) с оценками $\tilde{P}(\lambda)\ \tilde{f}_\lambda(\mathbf{z}(\ ))$ (7).

Чтобы иметь возможность измерять расстояния (7), необходимо параметр сглаживания либо изменять в некоторых пределах, либо брать следующим [6]:

$$h = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}(\mathbf{z}_i(\ ) - \mathbf{z}_j(\ ))^{\mathrm{T}}\, \hat{G}^{-1}\,(\mathbf{z}_i(\ ) - \mathbf{z}_j(\ ))}{N(N-1)\,n}\right]^{1/2} \tag{8}$$

Таким образом, если смесь (6) идентифицируема и локальные экстремумы – моды совместной функции плотности достаточно <ярко выражены>, то выявленные описанным итерационным процессом <сгущения> выборочных данных восстанавливают одномодальные компоненты наблюдаемой смеси [9].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя соглашения о векторно-функциональной форме записи агрегатов $\mathbf{z}(\ ) = \mathbf{z}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{w}(\ ) = \mathbf{w}(\mathbf{u})$, определим их внутреннее или скалярное произведение следующим образом:

$$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(\ )\,\mathbf{w}(\ ) = (\mathbf{z}(\ ), \mathbf{w}(\ )) = \sum_{\{\mathbf{u}\}} \mathbf{z}(\mathbf{u})\,\mathbf{w}(\mathbf{u}),$$

где произведения образуются из сомножителей, являющихся соответствующими компонетами агрегатов $\mathbf{z}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{w}(\mathbf{u})$, а суммирование производится по всем одноименным парам мультииндексов.

Внешнее или прямое произведение агрегатов $\mathbf{z}(\ )$ и $\mathbf{w}(\ )$ определим следующим образом:

$$\mathbf{z}(\mathbf{u})\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(\mathbf{v}) = \mathbf{z}(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{w}(\mathbf{v}),$$

при этом появляется объект новой структуры с размерностью $n \times n$. Эта структура состоит из элементов, образованных произведениями всевозможных пар компонент из $\mathbf{z}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{w}(\mathbf{v})$, причем каждый элемент этой структуры индексируется составным индексом, состоящим из компонент $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ соответственно.

Воспользуемся методикой построения базиса Карунена – Лоэва по выборочным данным, изложенной в [3], когда наблюдениями являются агрегаты разнородных данных $\mathbf{z}(\ )$. Будем полагать, что в нашем распоряжении имеется выборка данных $\mathbf{z}_1(\ ), ..., \mathbf{z}_N(\ )$, $\mathbf{z}(\ ) \in E^n$, объема $N$, являющаяся результатом $N$ наблюдений случайного агрегата $\mathbf{Z}(\ )$. Предположим, что эта выборка центрирована относительно выборочного математического ожидания.

Представим наблюдаемый агрегат следующим образом:

$$\mathbf{Z}(\ ) \cong \sum_{i=1}^{k} X^i\,\mathbf{\Phi}_i(\ ), \tag{П. 1}$$

где случайные коэффициенты $\{X^i\}_1^k$ и неслучайный базис ортонормированных функций-агрегатов $\{\mathbf{\Phi}_i(\ )\}_1^k$ находятся из условий минимума усредненного квадратичного критерия качества аппроксимации случайного агрегата $\mathbf{Z}(\ )$ в этом базисе

$$\mathcal{E}_k^2 = M\,\|\,\mathbf{Z}(\ ) - \sum_{i=1}^{k} X^i\,\mathbf{\Phi}_i(\ )\,\|^2 = \min\,(\{X^i\}_1^k, \{\mathbf{\Phi}_i(\ )\}_1^k), \tag{П. 2}$$

где $M$ – знак оператора математического ожидания; $\|\,.\,\|$ – евклидова норма в пространстве агрегатов $E^n$.

Коэффициенты $\{X^i\}_1^k$ представления (П. 1), минимизирующие (П. 2) при фиксированном базисе $\{\mathbf{\Phi}_i(\ )\}_1^k$, имеют следующий вид:

$$X^i = (\mathbf{Z}(\ ), \mathbf{\Phi}_i(\ )) = \sum_{\{\mathbf{u}\}} \mathbf{Z}(\mathbf{u})\,\mathbf{\Phi}_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, ... , k, \tag{П. 3}$$

где (,) – знак введенного скалярного произведения. Решение указанной вариационной задачи (П. 2) на условный (в смысле ограничений на ортонормированность базисных элементов $\{\mathbf{\Phi}_i(\ )\}_1^k$, вводимых в функционал (П. 2) с помощью множителей Лагранжа) экстремум приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$(M[\mathbf{Z}(\mathbf{u})\,\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{v})], \mathbf{\Phi}(\mathbf{v})) = \lambda\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}), \tag{П. 4}$$

где $\lambda$ – множитель Лагранжа, а индекс у базисных элементов $\mathbf{\Phi}(\ )$ и $\lambda$ отсутствует ввиду эквивалентности всех уравнений.

Если воспользоваться оценкой корреляционной функции и по выборке центрированных агрегатов $\mathbf{z}_1(\ ),\ ...,\ \mathbf{z}_N(\ )$

$$M[\mathbf{Z}(\mathbf{u})\ \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{v})] \cong \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{z}_j(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{z}_j(\mathbf{v}), \qquad (\text{П. } 5)$$

то задача нахождения базисных функций из (П. 4) существенно упрощается и сводится к решению полной проблемы собственных значений положительно определенной матрицы Грама порядка $N$ [3]. В результате чего удается определить базис Карунена – Лоэва $\{\mathbf{\Phi}_i(\ )\}_1^k$ и спектр собственных значений $\{\lambda_i\}_1^k$, $k \le N$, где $k$ – номер последнего <устойчивого> собственного значения из спектральных компонент, расположенных в ряд по убыванию $\lambda_1 \ge ... \ge \lambda_k \ge ... \ge \lambda_N$.

Используя лишь устойчивые собственные значения и теорему Мерсера [4], обратную корреляционную функцию можно оценить следующим образом:

$$\{M[\mathbf{Z}(\mathbf{u})\ \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{v})]\}^{-1} \cong \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{\Phi}_i(\mathbf{u})\ \mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{v}), \qquad (\text{П. } 6)$$

которая используется в гауссовой метрике при построении непараметрических оценок функций плотности.


1. Р е п и н  В . Г . ,  Т а р т а к о в с к и й  Г . П .  Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
2. Ф у к у н а г а  К .  Введение в статистическую теорию распознавания образов / Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 368 с.
3. П р о т а с о в  К . Т .  // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N 1. С. 51 – 55.
4. В а н  Т р и с  Г .  Терия обнаружения, оценок и модуляции / Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1972. Т. 1. 744 с.
5. Ц ы п к и н  Я . З .  Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 400 с.
6. И в а н о в а  Н . В . ,  П р о т а с о в  К . Т . // Мат. статистика и ее приложения. Томск: Изд-во ТГУ, 1982. Вып. 8. С. 50 – 65.
7. П р и к л а д н а я  статистика: Классификация и снижение размерности: Справ. изд. / Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. М.: Финансы и статистика, 1989. 607 с.
8. П а т р и к  Э . А .  Основы теории распознавания образов. М.: Сов. радио, 1980. 408 с.
9. Ж и г л я в с к и й  А . А .  Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: ЛГУ, 1985. 296 с.



Институт оптики атмосферы, СО РАН,
Томск



Поступила в редакцию
6 декабря 1994 г.



К . Т .  P r o t a s o v .  **Pattern Recognition and Automated Classification of Multi-component Pictorial Data under Condition of Statistical Indeterminacy.**

Within the confines of a problem of monitoring of the Earth underline surface and cloudiness new estimating Bayes solving rules for pattern recognition and automated classification were synthesized. They are intended to obtain maximum information from sattelite completed pictorial data as well as mapping information and results of contact measurements under condition of a priori indeterminacy. The rules take into account high dimensionality of miscellaneous observations, poor quantity of teaching sequences, and degeneracy of approximating distributions carriers.