

В.В. Пененко, Л.И. Курбацкая

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ СО СВОБОДНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ ВОЗДУШНЫХ МАСС ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ «ОСТРОВА ТЕПЛА»

Представлена математическая модель гидротермодинамики атмосферы в квазистатическом приближении на ограниченной территории и со свободной верхней границей воздушных масс. Используется система координат, следящая за рельефом поверхности Земли. Дискретные аппроксимации и схема вычислительного алгоритма реализации модели строятся на базе вариационного принципа и метода расщепления. Приводятся примеры моделирования мезоклимата промышленного региона при совместном влиянии рельефа и городского острова тепла.

1. Введение

Рассматривается задача о формировании атмосферной циркуляции со свободной верхней границей воздушной массы над орографически и термически неоднородной поверхностью Земли. Высота воздушной массы изменяется в пространстве и во времени и является искомой величиной. Для построения численной модели вводится система координат, следящая за рельефом поверхности (« σ -координаты») с вертикальной координатой

$$\sigma = (z - \delta(x, y))/h(x, y, t), \quad (1)$$

где $\delta(x, y)$ – функция, описывающая рельеф поверхности; $h(x, y, t) = H(x, y, t) - \delta(x, y)$, $H(x, y, t)$ – верхняя граница воздушной массы; t – время; (x, y) – горизонтальные координаты; x направлена на восток, y – на север.

Задачи такого типа возникают при исследовании изменений в климатической системе индустриальных регионов под влиянием антропогенных изменений свойств поверхности Земли на больших площадях. В данном случае исследуется динамика формирования мезоклимата при взаимодействии городского острова тепла с фоновым потоком. Это необходимо для оценок загрязнения атмосферы в специфических условиях городской циркуляции, когда одновременно действуют «остров тепла», неоднородности рельефа, и других характеристик подстилающей поверхности. Модель со свободной верхней границей в декартовых координатах рассматривалась в [1]. Основным элементом в схеме ее реализации было использование метода окаймления при построении уравнения для нахождения верхней границы.

Здесь решается близкая по постановке задача, и для ее решения на этапе согласования применяется явно-неявный безытерационный алгоритм, удобный и эффективный в реализации [2]. В силу энергетической сбалансированности дискретных аналогов модели обеспечивается устойчивость вычислений независимо от температурной стратификации. Модель строится на ограниченной территории. Для удобства изложения декомпозиция функций состояния по масштабам процессов на фон и отклонения от фона в постановке явно не производятся. Условия фоновой атмосферы участвуют при формировании начальных условий и при замыкании алгоритма реализации модели на верхней и боковых границах области.

2. Постановка задачи

Используя выбранную систему координат, запишем основные уравнения гидротермодинамики в виде

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \rho h u}{\partial t} + \text{div } \rho h u \mathbf{u} \right) - l \rho v = - \frac{\partial p}{\partial x} + B_x + F_u, \quad (2)$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \rho h v}{\partial t} + \operatorname{div} \rho h v \mathbf{u} \right) + l \rho u = - \frac{\partial p}{\partial y} + B_y + F_v, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -g \rho h, \quad (4)$$

$$\frac{A}{h} \left(\frac{\partial \rho h T}{\partial t} + \operatorname{div} \rho h T \mathbf{u} \right) + \frac{\gamma_a P}{gh} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} h \mathbf{u} \right) = F_T, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \operatorname{div} \rho h \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\omega = h \omega + \sigma \frac{\partial h}{\partial t} + u \left(\sigma \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + v \left(\sigma \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \right), \quad (7)$$

где

$$B_s = \frac{\partial p}{\partial s} \left(\frac{\sigma}{h} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{h} \frac{\partial \delta}{\partial s} \right); F_\phi = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\chi_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) + \operatorname{div}_s \rho \mu_s \operatorname{grad}_s \phi; s = (x, y); \phi = (u, v, T); A = 1 - \gamma_a R/g.$$

Здесь u, v, ω – компоненты вектора скорости ветра в направлении координат x, y, σ соответственно; $\mathbf{u} = (u, v, \omega)$; T – температура; p – давление; ρ – плотность; g – ускорение силы тяжести; l – параметр Кориолиса; μ_s – коэффициент турбулентности по горизонтали; $\chi_\phi = \nu + \mu |\operatorname{grad}_s \sigma|^2$; ν – коэффициент турбулентности по вертикали; R – универсальная газовая постоянная; γ_a – суходиабатический градиент; ω – аналог вертикальной скорости, который связан с w (вертикальной скоростью в декартовой системе координат) соотношением (7).

Для вычисления функции ω используем уравнение неразрывности (6), проинтегрированное по вертикали с учетом граничных условий для $\omega = 0$ при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$:

$$\omega = - \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \int_0^\sigma \rho d\sigma + \int_0^\sigma \left(\frac{\partial \rho h u}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v}{\partial y} \right) d\sigma \right). \quad (8)$$

При $\sigma = 1$ получаем уравнение для вычисления h :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \left(\int_0^1 \rho d\sigma \right)^{-1} \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho h u}{\partial x} + \frac{\partial \rho h v}{\partial y} \right) d\sigma. \quad (9)$$

Система (1)–(6) рассматривается на интервале времени $[0, t]$ в области $D = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq \sigma \leq 1\}$; X, Y, \bar{t} – входные параметры модели.

Граничные условия для потоков момента количества движения и тепла при $\sigma = 0$ формируются с использованием параметризаций приземного слоя. На верхней границе при $\sigma = 1$ и на боковых границах области D_t предполагается выход на фоновые условия атмосферной циркуляции. В информационном плане эти условия замыкания модели удобно реализовать через первые производные соответствующих функций состояния. В начальный момент времени $t = 0$ состояние атмосферы предполагается известным. При организации сценариев моделирования оно определяется с учетом фоновых условий.

2. Вычислительные аспекты реализации модели

Дискретные аппроксимации модели (2)–(9) получаются на базе вариационного принципа в сочетании с методом расщепления [3]. Для этих целей наряду с системой определяющих уравнений (2)–(9) записывается вариационная формулировка модели в виде интегрального тождества, учитывающего все уравнения модели, начальные и краевые условия, а также соот-

ношения, описывающие входные параметры и внешние источники. Основной функционал этого тождества строится, исходя из условий энергетического баланса.

Для аппроксимации по времени используется метод слабой аппроксимации с дробными шагами. В результате получаются энергетически сбалансированные схемы расщепления, в которых традиционно выделяются два этапа: «перенос – согласование».

Не выписывая здесь интегральное тождество вариационной формулировки модели, отметим только, что для обеспечения энергетической сбалансированности дискретных аппроксимаций по пространственным переменным достаточно выполнить следующие условия:

1. Операторы переноса субстанций по траекториям воздушных масс должны аппроксимироваться с обеспечением и на дискретном уровне их свойств антисимметричности. Операторы турбулентного обмена должны сохранять в любом виде свойства симметричности [3].

2. Компоненты вектора градиента давления в уравнениях движения (2), (3) и в уравнении (7) для ω должны рассчитываться по одинаковым формулам.

3. Аппроксимации оператора градиента в уравнениях (2)–(4) должны быть согласованы с аппроксимацией оператора дивергенции в уравнении неразрывности (6) в соответствии со свойством антисимметричности, которой обладают операторы переноса в дифференциальной формулировке.

4. Аппроксимации $\partial p/\partial \sigma$ в уравнении гидростатики и коэффициента σ в выражении для вычисления w должны выбираться таким образом, чтобы для них выполнялись соотношения, аналогичные

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} + p = \frac{\partial \sigma p}{\partial \sigma}, \quad (10)$$

$$\int_0^1 \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial \sigma} + p \right) d\sigma = \sigma p \Big|_0^1 = p_H. \quad (11)$$

Рассмотрим способ построения аппроксимаций градиентов функций h , σ и p . Прежде всего возьмем слагаемое из уравнения баланса полной энергии системы, определяющее обмен между кинетической и потенциальной энергией на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$:

$$I(w) = \int_{D_t^j} g \rho w \, dD \, dt. \quad (12)$$

Данное выражение после несложных преобразований примет вид

$$\int_{D_t^j} \rho w \, dD \, dt = \int_{D_t^j} \frac{1}{h} (\rho z h) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} dD + \int_{\Omega_t^j} \rho z h u_n \, d\Omega \, dt, \quad (13)$$

где Ω_t^j – боковая граница области D_t^j , $D_t^j = D \times [t_j, t_{j+1}]$; u_n – нормальная к границе составляющая вектора скорости \mathbf{u} ; $d\Omega$ – элемент площади на боковой границе Ω области D_t^j . Чтобы выполнить это соотношение в дискретной форме, необходимо взять соответствующую аппроксимацию для w . Она должна быть согласована по пространственным переменным с уравнением неразрывности. При этом аппроксимации градиентов должны быть такими, чтобы в интегральном тождестве соответствующие слагаемые были антисимметричными. Тогда в уравнении баланса энергии они будут сокращаться. Из этих условий получаются разностные аналоги для градиента функции $h(x, y, t)$.

Для получения согласованных аппроксимаций для градиентов функции p , так чтобы сохранить дивергентный характер, возьмем выражение, которое в интегральном тождестве участвует для согласования полей ветра и давления и используется при построении уравнения баланса энергии на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$ [2]:

$$\int_{D_t^j} \left[u^{j+1} \frac{\partial p^j}{\partial x} + v^{j+1} \frac{\partial p^j}{\partial y} + \omega^{j+1} \frac{\partial p^j}{\partial \sigma} + \frac{p^j}{h} \left(\frac{\partial h u^{j+1}}{\partial x} + \frac{\partial h v^{j+1}}{\partial y} + \frac{\partial h \omega^{j+1}}{\partial \sigma} \right) \right] dD dt = \int_{D_t^j} \frac{1}{h} \operatorname{div} h p^j \mathbf{u}^{j+1} dD dt = \int_{\Omega_t^j} h p^j u_n^{j+1} d\Omega dt, \quad (14)$$

где верхний индекс у функций отмечает момент времени, на котором берутся эти функции. Согласованные дивергентные разностные схемы для градиентов функции p строятся так же, как и аппроксимации градиентов функции h , что позволяет получать семейство согласованных аппроксимаций в том и другом случае при условии выбора одних и тех же схем.

Сформулируем последовательность основных операций для реализации вычислительного алгоритма задачи согласования.

1. Предполагаем, что в момент времени $t = t_j$ заданы значения всех функций u, v, ω, h, p, T . Функция p^j находится из уравнения гидростатики, функция ρ^j – из уравнения состояния, функция h^j – из (9) по заданному полю скоростей.

2. Решаются уравнения движения относительно функций u^{j+1}, v^{j+1} . Используется метод матричной прогонки по вертикальной переменной.

3. Находятся $\partial h/\partial t$ с помощью уравнения (8) и функция ω^{j+1} из (8).

4. Решается уравнение притока тепла относительно T^{j+1} .

5. Решается уравнение (9) относительно h^{j+1} .

6. Рассчитывается значение функции p^{j+1} на верхней границе воздушной массы по формуле

$$(\ln p^{j+1}) = [(\ln p^j) - g(h^{j+1} - h^j)]/(R \cdot T^{j+1}).$$

На этапе переноса для построения дискретных аппроксимаций берется интегральное тождество с симметризованной формой представления операторов турбулентного обмена и градиентной формы для операторов переноса. Весовые функции задаются через решения локальных сопряженных задач. Окончательно для аппроксимации адвективных диффузионных операторов получаются устойчивые численные схемы, обладающие свойствами монотонности и транспортности [2]. Здесь необходимо сделать следующее замечание. Поскольку модель рассматривается в области с переменным рельефом, то возможны два варианта задания операторов турбулентного обмена. Первый – в декартовых координатах на поверхностях $z = \text{const}$ и второй – непосредственно в σ -координатах на поверхностях $\sigma = \text{const}$.

Оператор переноса по форме остается инвариантным при любом выборе координат. В первом случае требуется преобразование оператора турбулентности к σ -координатам. При этом в уравнениях появляются дополнительные слагаемые, обусловленные отличием z -поверхностей от σ -поверхностей и затрудняющие построение монотонных численных схем. Чтобы формально обойти это затруднение, вводится эффективный вектор скорости переноса так, что его компоненты дополняются «диффузионными» добавками, возникающими за счет изменения координатных осей [4].

Заметим, что характерные масштабы процессов на этапах переноса и согласования полей различны. Поэтому для обеспечения аппроксимаций в соответствии с физическим смыслом моделируемых явлений шаги по времени при реализации этих процессов могут выбираться различными. Сама процедура согласования масштабов не вызывает затруднений, поскольку она производится в рамках вариационного принципа.

4. Численные эксперименты по моделированию мезоклиматов

Приведем некоторые результаты численных экспериментов по моделированию мезоклимата в промышленном регионе. В качестве примера рассматривается область, которая по рельефу и характеру подстилающей поверхности соответствует Томскому региону с г. Томском в центральной части. Карта-схема Томского региона приведена в [5].

Свойства подстилающей поверхности задаются в согласии с определениями категорий землепользования: водная поверхность, болота, лес, населенные пункты, город. Температура на поверхности задается в соответствии с типом поверхности. В данном случае она равномерно увеличивается от водной поверхности к городской застройке. Такое распределение температуры соответствует дневным условиям весенне-летнего периода. Город выступает в роли острова тепла. Рельеф области повышается с северо-запада на юг, юго-восток и восток, и высота его изменяется в пределах 60–260 м. Сценарий моделирования организуется так, что в начальный момент времени задается состояние покоя, температура поверхности остается постоянной во времени, на западной границе области ветер остается неизменным в течение всего интервала времени моделирования. Атмосферная циркуляция развивается под влиянием температурных контрастов и неровностей рельефа. С течением времени она выходит на установившийся режим, который при

постоянных входных параметрах имеет характерные черты мезоклимата. Интервал времени установления соответствующего циркуляционного режима в рассматриваемой ситуации составляет 5–6 ч. Расчеты проводились при следующих входных параметрах модели: $X = Y = 100$ км, $H = 3000$ м, $\Delta t = 10$ с, $\Delta x = \Delta y = 4000$ м, $\Delta \sigma = 0,1$, $\sigma = 1$, $\mu_x = \mu_y = 1500$ м²/с, $\nu = 10$ м²/с. Приведенные здесь рисунки иллюстрируют влияние орографии и температурного контраста на образование атмосферной циркуляции над городом и его окрестностями и на изменение верхней границы воздушной массы.

На рис. 1 показано установившееся векторное поле скорости ветра на поверхности $\sigma = 0,1$. Длина стрелок пропорциональна значениям скорости ветра в узлах сетки. Квадратик на конце стрелки обозначает, что соответствующая величина вектора скорости на порядок меньше максимального в области значения. В окрестности города, в центральной части области, движение воздуха более интенсивное. С наветренной стороны происходит характерное «бризовое» усиление циркуляции за счет температурного контраста «река – город», а с подветренной стороны за городом заметно ослабление потока с вихревыми образованиями, направленными против преобладающего потока.

На рис. 2 показана высота свободной границы воздушной массы в конечный момент времени, ее градиент в горизонтальной плоскости наиболее ярко выражен над участками подстилающей поверхности с сильным температурным контрастом, и его превышение по всей области составляет 83 м.

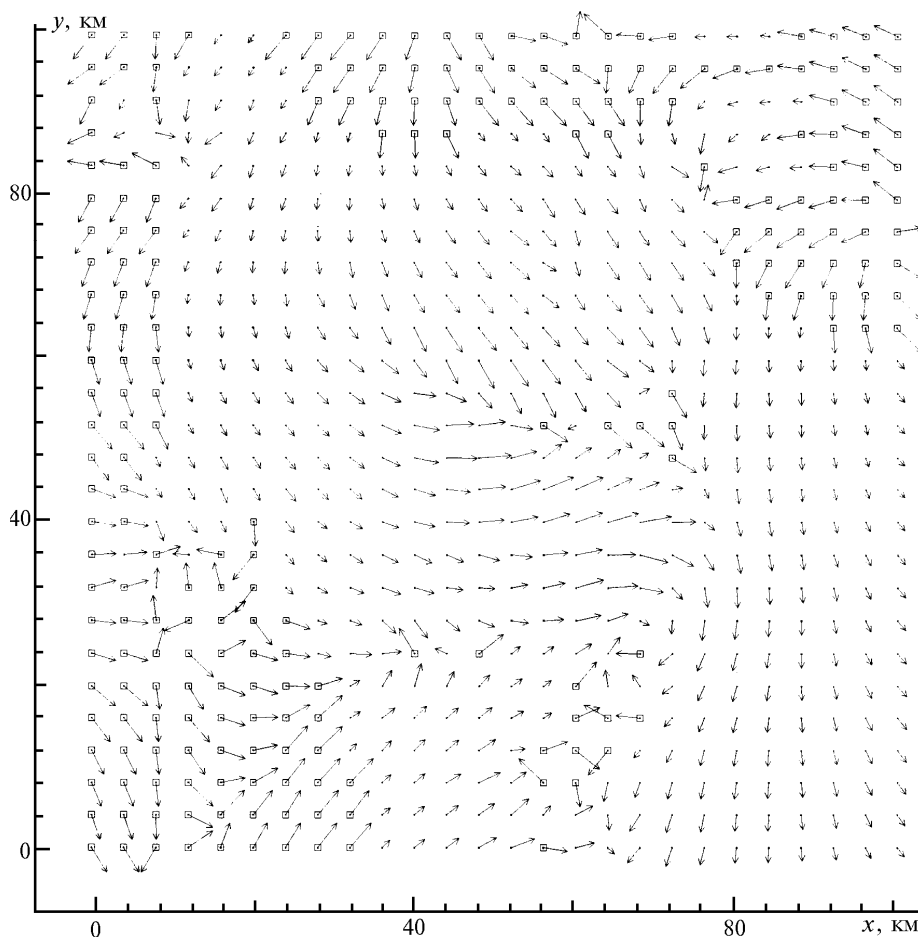


Рис. 1. Векторные поля скорости на $\sigma = 0,1$ в плоскости (x, y)

На рис. 3 показано поведение ветра в вертикальном сечении, параллельном оси OX , в центральной части области, на котором прослеживаются сформировавшиеся восходящие движения за городом, а над рекой и пойменной частью области виден нисходящий поток. При наличии сильного фонового потока влияние орографии и температурного контраста проявляется слабее.

Таким образом, приведенные эксперименты показывают, что наличие рельефа и температурного контраста приводит к образованию циркуляции, наиболее интенсивной в местах выраженного «острова тепла», над которым формируется область повышения свободной поверхности.

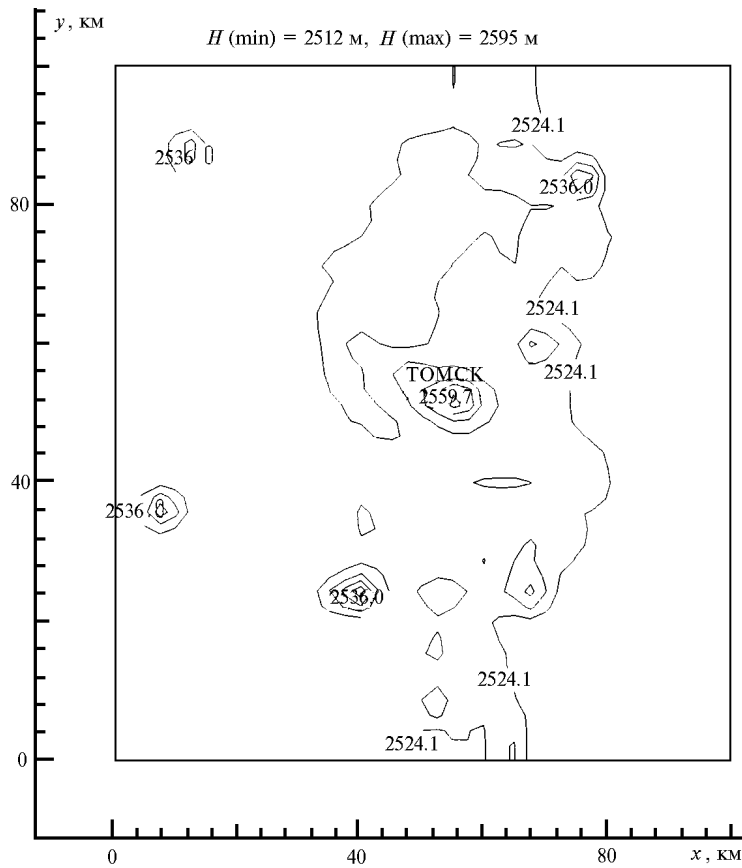


Рис. 2. Изолинии поля свободной верхней границы

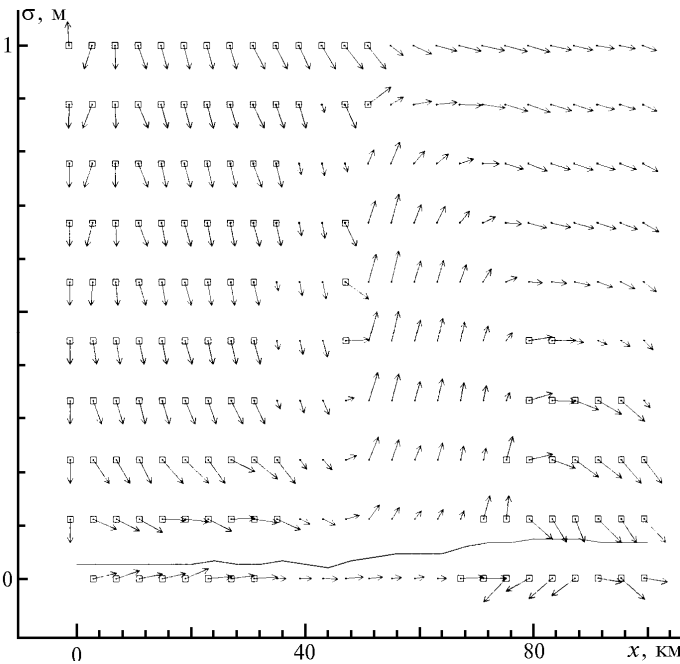


Рис. 3. Векторные поля скорости в плоскости (x -, σ -координаты) в сечении $y = 13$ км. (Сплошная линия – рельеф поверхности в сечении, $\Delta\sigma = 0,1$ соответствует $\Delta z = 300$ м)

5. Заключение

Описанная в статье математическая модель ориентирована на исследование совместного влияния рельефа местности и распределенных источников тепла естественного и антропогенного происхождения на формирование локальной циркуляции на фоне крупномасштабных атмосферных движений. По структуре она является частью разрабатываемого в ВЦ СО РАН комплекса моделей взаимосвязанных задач экологии и климата. Использование в модели декартовой системы координат с переходом к следящим за рельефом и свободной верхней границей координатам позволяет при необходимости отказаться от гидростатического приближения. Такие ситуации возникают на практике при интенсивных тепловых воздействиях антропогенного происхождения, сопряженных с выбросами загрязняющих примесей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 94-05-16105.

1. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
2. Пененко В.В. Явно-неявный метод решения задач динамического согласования полей метеоэлементов. Новосибирск, 1994. 28 с. (Препринт/ ВЦ СО РАН, N 1037).
3. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 270 с.
4. Пененко В.В. Численные схемы для адвективно-диффузионных уравнений с использованием локальных сопряженных задач. Новосибирск, 1993. 50 с. (Препринт/ВЦ СО РАН, N 984).
5. Пененко В.В., Коротков М.Г. Моделирование мезоклиматов и загрязнения атмосферы промышленных регионов (на примере г.Томска) // Оптика атмосферы и океана. Т. 10. N 6. С. 590–597.

Вычислительный центр СО РАН,
Новосибирск

Поступила в редакцию
22 января 1997 г.

V.V. Penenko, L.I. Kurbatskaya. **Numerical Model with Free Upper Air Boundary for Investigation of «Heat Island» Dynamics.**

Mathematical model of atmospheric hydrothermodynamics in quasistatic approximation on limited area with free upper boundary is presented. The terrain-following system of coordinates is used. Discrete approximations and computational algorithm are based on variational principle and splitting method. Examples of modeling industrial region mesoclimate are shown. They demonstrate joint influence of topography and «heat island» on local atmospheric circulation.