<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 6 (1994)

УДК 551.501

О.И. Алдошина, Н.Л. Сталь, А.В. Фабриков

ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКА ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрена возможность применения линейного адаптивного фильтра Калмана в задаче оценивания координат импульсного источника оптического излучения в схеме его наблюдения через атмосферу.

В радионавигации хорошо известен разностно-дальномерный метод определения координат потребителя информации с помощью сетевой спутниковой системы NAVSTAR, основанный на приеме модулированных сигналов с нескольких космических аппаратов (КА) [1]. После выбора оптимального (с точки зрения поставленной задачи) созвездия КА по разностям времен прихода сигналов и известным координатам КА рассчитываются координаты приемника. Тот же метод в несколько измененном виде был предложен для оценивания координат точечного импульсного изотропного источника оптического излучения по результатам измерения с нескольких КА [2]. В этом методе различными КА регистрируются, по сути дела, измененные по масштабу и сдвинутые во времени слабовозмущенные (в предположении спокойной безоблачной атмосферы) копии одного и того же сигнала обычно сложной, заранее неизвестной формы. Исходными данными для расчета координат источника являются запаздывания во времени этих <копий>.

Определение запаздывания <копий> по разности моментов времени, в которые аппаратура различных КА начала регистрацию поступающего на нее сигнала, возможно лишь с точностью, соответствующей точности фиксации теряющегося в шуме <нуля> сигнала, а она невелика и сильно зависит от отношения сигнал-шум. Более надежным способом определения запаздывания является оценивание временного сдвига <копий> в целом, обеспечивающего их оптимальное, в смысле среднего квадрата разностей, совмещение.

Эту задачу решает линейный адаптивный фильтр, работающий в режиме идентификации подключенной к нему параллельно неизвестной системы [3]. Имеется в виду идентификация линейной системы, способной преобразовать одну из сравниваемых между собой копий сигнала в другую. При полном совпадении <копий> по форме импульсным откликом $h(t)$ идентифицируемой системы являлась бы дельта-функция Дирака $h(t) = \delta\ (t - \Delta t)$, где Δt – сдвиг между копиями. В реальных условиях $h(t)$ будет, конечно, отличаться от $\delta\ (t - \Delta t)$, но можно ожидать, что для слабовозмущенных копий, нормированных по масштабу, положения средней точки (первого момента) и максимума функции $h(t)$ будут близки к Δt. Это же должно быть справедливо для адаптивного цифрового фильтра с импульсным откликом $h_i(n)$, аппроксимирующего идентифицируемую систему.

В установившемся режиме работы фильтра ($n \gg N$) его характеристику – положение средней точки или же точки максимума отклика $h_i(n)$ как функции i – можно использовать для оценивания искомых сдвигов Δt (запаздываний) между сравнительными копиями сигнала. Можно предположить, что точность оценивания будет ухудшаться с ростом Δt. Поэтому перед сравнением двух копий целесообразно предварительно сместить одну из них на ожидаемую (номинальную) величину запаздывания Δt_0 , сведя тем самым задачу к оцениванию малой величины $\Delta t - \Delta t_0$. Далее под Δt мы будем понимать эту разность между истинным и номинальным значениями запаздывания.

Проверке этих утверждений в численном эксперименте на цифровом адаптивном фильтре с конечным импульсным откликом $h_i(n)$, $i = 1, ..., N$, и посвящена данная статья.

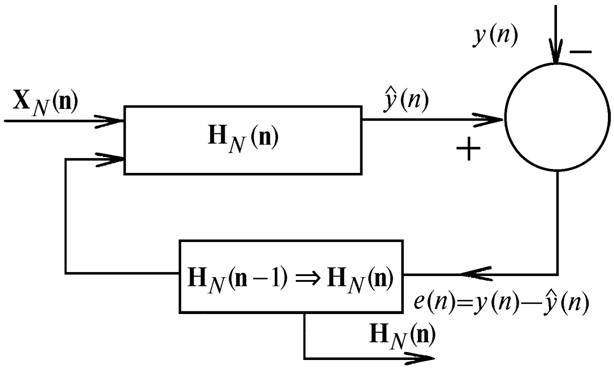

Рис. 1

Работа фильтра схематически представлена на рис. 1. Осуществляемое адаптивным фильтром преобразование описывается обычным для всех линейных фильтров уравнением свертки

$$\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(n)\, x(n-i) = H_N^{\mathrm{T}}(n)\, X_N(n) = X_N^{\mathrm{T}}(n)\, \mathbf{H}_N(n)\,, \tag{1}$$

где $x(n)$ и $\hat{y}(n)$ – подаваемый на вход и вырабатываемый на выходе фильтра случайные сигналы; $\mathbf{H}_N(n)$ – импульсная характеристика фильтра на момент времени n, представляемая вектором-столбцом длиной N,

$$\mathbf{H}_N(n) = [h_0(n), \ldots, h_{N-1}(n)]^{\mathrm{T}}\,; \tag{2}$$

$\mathbf{X}_N(\mathrm{n})$ – отрезок входного сигнала, включающий значения x для моментов времени $n, n-1, \ldots, n-N+1$, представляемый вектором-столбцом длиной N

$$\mathbf{X}_N(n) = [\,x(n), \ldots, x(n-N+1)]^{\mathrm{T}}\,; \tag{3}$$

т – знак транспонирования матрицы. Все элементы вектора $\mathbf{X}_N(n)$, для которых $n-i<1$ $(i=0, 1, \ldots, N-1)$, равны нулю. Особенностью адаптивного фильтра является то, что с ростом n его характеристика $\mathbf{H}_N(n)$ непрерывно меняется, причем так, чтобы приблизить выходной сигнал $\hat{y}(n)$ к желаемому, или опорному сигналу $y(n)$. В идеальном случае характеристика фильтра $\mathbf{H}_N(n)$ должна определяться статистическим условием минимума невязки

$$\varepsilon(\mathrm{n}) = E\big[\,|\,y(n) - \hat{y}(n)\,|^2\big]\,, \tag{4}$$

где $E[\bullet]$ – оператор математического ожидания стоящей в скобках случайной величины. На практике, однако, удовлетворяются более простым условием

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\, e^2(i\,/\,n) = \min\,, \tag{5}$$

где

$$e(i\,/\,n) = y(i) - \mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}(n)\, \mathbf{H}_N(n) \tag{6}$$

ошибка предсказания i-го выборочного значения желаемого сигнала $y(i)$ фильтром $\mathbf{H}_N(n)$, вычисленным в момент времени n; λ – близкий к единице весовой коэффициент. Изменения $\mathbf{H}_N(n)$ с ростом n в процессе адаптации фильтра к поставленной задаче приближения $\hat{y}(n)$ к $y(n)$ определяются рекуррентным уравнением

$$\mathbf{H}_N(n) = \mathbf{H}_N(n-1) + \mathbf{g}_N(n)\,\big[(\,y(n) - \mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}(n))\,\mathbf{H}_N(n-1)\big]\,, \tag{7}$$

где $\mathbf{g}_N(n)$ – вектор коэффициентов усиления, к вычислению которых для каждого n и сводится задача построения адаптивного фильтра. Собственно, это уравнение вместе с процедурой обновления $\mathbf{g}_N(n)$ при переходе от $n-1$ к n и называется адаптивным фильтром. Работа фильтра по этому уравнению начинается от момента времени $n = 1$ до конечного значения $n = p \geq N$, за которым величина $\varepsilon(n)$ практически уже не изменяется.

Это рекурсивный адаптивный фильтр, построенный по методу наименьших квадратов. Его работа может быть представлена следующей схемой. Начальные условия при $n = 0$:

$$\mathbf{H}_{NN}(0) = \mathbf{X}_{NN}(0) = 0 \,, \tag{8}$$

$$C_{NN}(0) = \delta\, I_{NN}\,, \quad (\delta \gg 1)\,. \tag{9}$$

Входные данные для n от 1 до конечного значения p: $y(n)$, $\mathbf{X}_N(n)$.

Текущий (n-й) цикл вычислений:

$$e(n\,/\,n-1) = y(n) - \mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}(n)\,\mathbf{H}_N(n-1) \text{ – (ошибка предсказания)}, \tag{10}$$

$$\mu(n) = \mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}(n)\, C_{NN}(n-1)\, \mathbf{X}_N(n)\,, \tag{11}$$

$$\mathbf{g}_N(n) = \frac{C_{NN}(n-1)\,\mathbf{X}_N(n)}{\lambda + \mu(n)} \text{ – (вектор усиления)}\,, \tag{12}$$

$$\mathbf{H}_N(n) = \mathbf{H}_N(n-1) + \mathbf{g}_N(n)\, e(n\,/\,n-1) \text{ – (обновленная оценка)}\,, \tag{13}$$

$$C_{NN}(n) = (1/\lambda)\left[C_{NN}(n-1) - \mathbf{g}_N(n)\,\mathbf{X}_N^{\mathrm{T}}(n)\, C_{NN}(n-1)\right]. \tag{14}$$

На завершающем (p-м) цикле на выход выдаются N чисел $h_0(p)$, $h_1(p)$, ..., $h_{N-1}(p)$, образующих вектор-столбец $\mathbf{H}_N(p)$. Начальное условие $C_{NN}(0) = \delta I_{NN}$,($\delta \gg 1$), где I_{NN} – единичная $N \times N$ матрица, вводится для обеспечения существования обратной матрицы C_{NN}^{-1} на первых $n \leq N$ этапах вычислений, так как при других условиях матрица $C_{NN}(n)$ могла быть сингулярной.

Приведенный алгоритм нужно рассматривать лишь как базовый, поясняющий принцип работы адаптивного фильтра в режиме идентификации линейной системы. Цикл вычислений по нему требует выполнения $\mathrm{O}(N^2)$ арифметических операций. Число операций можно уменьшить до $\mathrm{O}(N)$, используя другие, более эффективные процедуры вычислений [4, 5], основанные на схеме быстрой калмановской фильтрации. В приложении приведена программа расчета адаптивного фильтра на языке Паскаль. Помимо вычисления $\mathbf{H}_N(p)$ программа включает в себя также оценку временного сдвига между копиями Δt по формуле

$$\Delta t = \sum_{i=0}^{N-1} i\, h_i(p)\,, \qquad p \geq N = 20 \div 40\,. \tag{15}$$

Сходимость реализуемого программой алгоритма иллюстрируется кривыми на рис. 2, где приведены зависимости коэффициентов $h_i(n)$ от i при отношении сигнал-шум, равном 30, для различных значений n (N=20). Значения λ и δ в расчетах были приняты равными 0,9 и 5 соответственно. На рис. 3 показаны параметры адаптивного фильтра для двух сигналов, имеющих одинаковую форму при отсутствии шума.

Как видно из рис. 3, индекс максимальной компоненты адаптивного фильтра соответствует разности времени прихода сигналов $\Delta t = 4\tau$, где τ – шаг по времени.

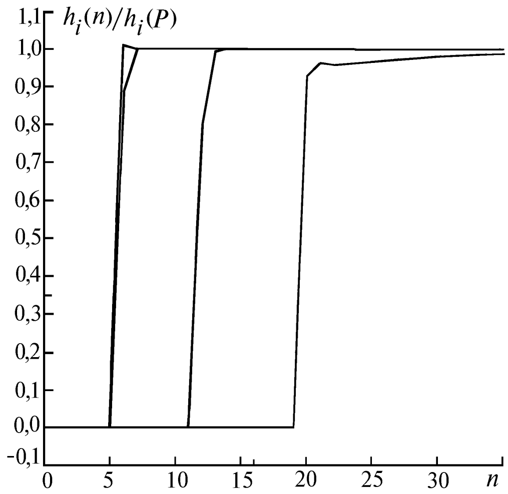

Рис. 2. Параметры адаптивного фильтра для двух сигналов, имеющих одинаковую форму при наличии <белого> шума, $i = 0;\ 4;\ 10;\ 18$

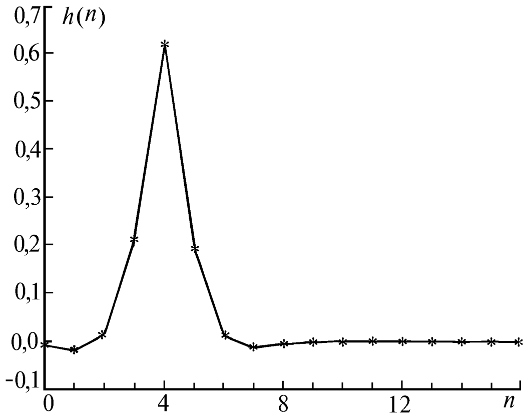

Рис. 3

Таким образом, по максимальной компоненте адаптивного фильтра можно определить Δt с погрешностью, не превышающей τ. Формула (15) в этом случае дает значение разности времени прихода сигналов с существенно более высокой точностью. Вместе с тем при наличии шума величина p не должна намного превышать характерную длительность сигнала. В противном случае адаптивный фильтр начнет подстраиваться не под сигнал, а под шум. Как показали расчеты, для двух одинаковых сигналов при отсутствии шума компоненты адаптивного фильтра практически не зависят от формы сигналов. Через 5÷10 шагов по времени после начала второго импульса компоненты вектора $\mathbf{H}_N(n)$ перестают изменяться, а все компоненты с индексами, превышающими Δt на величину ≈ 10, равны нулю. Индекс максимальной компоненты вектора $\mathbf{H}_N(n)$ соответствует моменту времени, который менее чем на $\tau/2$ меньше Δt.

При наличии гауссова шума, искажающего первый и второй сигналы (шумы, поступающие на каждый из приемников, независимы), а также с учетом неравномерной затяжки облачной атмосферой сигналов, поступающих на приемники, расположенные на различных КА, вектор $\mathbf{H}_N(n)$ заметно искажается. Компоненты вектора $\mathbf{H}_N(n)$ с большими индексами уже не обращаются в нуль. Формула (15) при этом уже не будет давать удовлетворительной точности. Для определения величины Δt в этом случае можно использовать время, соответствующее максимальной (главный максимум) компоненте вектора $\mathbf{H}_N(n)$. При этом точность определения величины Δt равна шагу по времени τ. Для уменьшения влияния шума на точность определения времени Δt можно сравнивать сигналы после их сглаживания. В качестве интегратора (сглаживателя сигнала) выбирается RC-цепь, описываемая уравнением

$$V(t) = \frac{1}{t_I}\int_0^t X(\tau)\exp\left(-\frac{t-\tau}{t_I}\right)d\tau\,, \tag{16}$$

где $X(\tau)$ – исходный, а $V(t)$ – сглаженный сигналы. Применяя формулы численного интегрирования с шагом, равным τ, получим выражение для $V(t)$

$$V(t) = X(t) - t_I\,\mathrm{e}^{-t/t_I}\sum_{j=1}^{i} D_j\left(\mathrm{e}^{t_j/t_I} - \mathrm{e}^{t_{j-1}/t_I}\right), \tag{17}$$

$$D_j = \frac{X(t_j) - X(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\,. \tag{18}$$

Сглаживание сигналов существенно увеличивает отношение сигнал-шум. При этом компоненты вектора $\mathbf{H}_N(n)$ с большими индексами все еще не обращаются в нуль и пользование формулой (15) для расчета разности времени прихода сигналов не дает качественных результатов. Вместе с тем операция интегрирования с большим t_I приводит к тому, что главный максимум функции $\mathbf{H}_N(n)$ становится более выраженным и определять разность времен прихода сигналов по главному максимуму функции $\mathbf{H}_N(n)$ можно при более низких отношениях сигнал-шум.

Проведенные расчеты показали, что параметры адаптивного фильтра Калмана, преобразующие первый из поступивших сигналов в сигнал, минимально отличающийся от второго, могут быть использованы для расчета времени между началом прихода сигнала на приемники. Даже при наличии шумов и неравномерной (по КА) затяжки оптических сигналов в облачной атмосфере погрешность определения времени Δt по параметрам фильтра $\mathbf{H}_N(n)$ не превосходит шаг по времени τ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Программа расчета дискретного адаптивного фильтра Калмана $\mathbf{H}_N(n)$ и времени задержки сигналов. Временная зависимость входного и опорного сигналов задается функциями $Fx(j)$ и $Fy(j)$.

```
Program FK;
                                Const N 1 = 50;                    {ширина окна}
    Delta : Extended = 5.0;        La : Extended = 0.9;            P = 50;
    Ti : Extended = 10;     {постоянная интегрирования}
  Var i, j, j1, j2, j3 : Integer;
    S, S1, S2, S3, S4, M, E, Y : Extended;
     X, X1, Y1, H, g, g1 : Array [0..N1–1] of Extended;
          C : Array [0..N1–1, 0..N1–1] of Extended;
  Begin       For j3 : = 0 to N1–1 do
              For i : = 0 to N1–1 do C[ j3, i] : = 0;
  For i : = 0 To N1–1 Do Begin
     X[i] : = 0; H[i] : =0; C[i, i] : = Delta       End;
       For j2 : = 1 to P do Begin {j2}
  If j2 <= N1–1 Then Begin j : =j2; j1 : =j2–1          End
              Else Begin j : = N1–1; j1 : = j       End;
  For i : = j Down To 1 do X[i] : = X[i–1];
     X1 [ j] : = Fx( j);                  {вектор входного сигнала}
     Y1 [ j] : = Fy( j);                  {вектор выходного сигнала}
     {интегрирование сигналов}
  S1 : = 0; S4 : = 0;
  For i : = 1 To j do Begin {i}
    S2 : = ( j – i)/Ti; If S2 > 60 Then S2 : = 0 Else S2 : = Exp(–S2);
     S3 : = ( j – i + 1)/Ti; If S3 > 60 Then S3 : = 0 Else S3 : = Exp(–S3);
       S1 : = S1 + (X1[i] – X1[i – 1])*(S2 – S3);
         S4 : = S4 + (Y1[i] – Y1[i – 1])*(S2 – S3) End; {i}
         X[0] : = X1[ j ] – Ti*S1;    Y : = Y1[ j ] – Ti*S4;
                        {расчет ошибки предсказания сигнала}
  S : = 0; For i : = 0 to j1 do S : = S + X[i]*H[i]; E : = Y – S;
                        {расчет величины μ(n)}
  M : = 0; For j3 : = 0 to j1 do Begin S : = 0;
           For i : = 0 to j1 do S : = S + X[i]*C[ j3, i]; M : = M + S*X[ j3]      End;
                        {расчет вектора усиления}
           For j3 : = 0 to j1 do Begin S : = 0;
  For i : = 0 to j1 do S : = S + C[ j3, i]*X[i];
                             g[ j3] : = S/(LA + M)    End;
                        {расчет обновленной оценки}
  For i : = 0 to j1 do H[i] : = H[i] + g[i]*E;
  For i : = 0 to j1 do Begin g1[i] : = 0;
  For j3 : = 0 to j1 do g1[i] : = g1[i] + X[ j3]*C[ j3, i] End;
    For j3 : = 0 to j1 do For i : = 0 to j1 do
    C[ j3, i] : = (C[ j3, i] – g[ j3]*g1[i])/La End; { j2}
    {расчет разности времени прихода сигналов}
    S : = 0; For i : = 0 to N1–1 do S : = S + i*H[i]             End                End.
```


1. Шабшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. М.: Радио и связь, 1982. 272 с.
2. Алдошина О.И., Фабриков А.В. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7, N 6. С. .827 – 832.
3. Ундроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.

4. Cioffi J.M., Kailath T. // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1984, V. ASSP-32, N 2. P. 304–337.
5. David W. // IEEE Trans. accoust., Speech, Signal Processing. 1984. V. ASSP-32, N 5. P. 998–1005.

Всероссийский НИИ оптико-физических
измерений Госстандарта России, Москва

Поступила в редакцию
6 марта 1994 г.

O.I. Aldoshina, N.L. Stal', A.V. Fabrikov. **Use of an Adaptive Filter in the Problem on Estimating Coordinates of an Optical Radiation Source.**

In this paper we analyze a possibility of using Kalman linear adaptive filter in the problem on estimating coordinates of a pulsed source of optical radiation observed through the atmosphere.