«Оптика атмосферы», **4**, № 6 (1991)

УДК 551.521.535.31 :5 35.35

И.В. Мишин

К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ АТМОСФЕРЫ

Рассматривается формула для расчета горизонтально-неоднородной составляющей поля яркости уходящего излучения в атмосфере над поверхностью с изотропным отражением. Показано, что зависимость указанной составляющей яркости излучения от пространственных вариаций альбедо подстилающей поверхности является нелинейной.

В [1—3] построены прямой и обратный оптические передаточные операторы атмосферы, связывающие двумерное альбедо ламбертовской подстилающей поверхности, освещенной падающим солнечным излучением, с яркостью излучения, отраженного системой «поверхность—атмосфера». Теория оптических передаточных операторов атмосферы нашла развитие в довольно сложных моделях, учитывающих горизонтальную неднородность атмосферы, поляризацию излучения и анизотропию отражения земной поверхности [4—6]. В случае изотропного неоднородного отражения от подстилающей поверхности указанная теория в основном завершена и может внедряться в системах цифровой обработки спутниковых изображений, поэтому вызывают особый интерес новые результаты [7—14], полученные в данной области.

Пусть z — вертикальная координата; $\mathbf{r} = \{x, y\}$ — вектор горизонтальных координат; $\mathbf{s} = \{\mu, \mathbf{s}_\perp\}$ — единичный вектор направления; $\mu = \cos\theta$; $\mathbf{s}_\perp = \sqrt{1-\mu^2}\{\cos\varphi, \sin\varphi\}$; θ, φ — зенитный и азимутальный углы наблюдения; $z = 0$, $z = h$ — верхняя и нижняя границы атмосферы; Ω — единичная сфера; Ω_+, Ω_- — нижняя и верхняя полусферы; $q(\mathbf{r})$ — неоднородное альбедо поверхности; $\bar{q}$, $\tilde{q}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}) - \bar{q}$ — среднее и вариация альбердо; $f \equiv f(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\alpha(z)$, $\sigma(z)$ — индикатриса рассеяния, коэффициенты ослабления и рассеяния света в атмосфере.

Яркость уходящего излучения в рамках модели горизонтальнооднородной атмосферы, освещенной Солнцем и ограниченной однородно отражающей ламбертовской поверхностью, выражается в виде [2, 3]

$$I = \bar{I} + \tilde{I}. \tag{1}$$

Здесь

$$\bar{I} = D + \bar{q}\bar{E}\Psi_0 \tag{2}$$

— средняя составляющая яркости излучения; D — яркость дымки; $\bar{E} = E_0(1 - \bar{q}c_0)^{-1}$; πE_0, Ψ_0 — освещенность земной поверхности и норма оптической пространственно-частотной характеристики атмосферы при $\bar{q} = 0$; c_0 — сферическое альбедо слоя атмосферы. Вариация $\tilde{I}$ представляется в виде

$$\tilde{I} = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\Phi_\kappa, \tag{3}$$

где «порядки переотражения» Φ_κ определяются рекуррентно из системы краевых задач

$$\begin{cases} L\Phi_\kappa = S\Phi_\kappa; \ \Phi_\kappa\big|_{\substack{z=0\\ \mathbf{s}\in\Omega_+}} = 0; \\ \Phi_\kappa\big|_{\substack{z=h\\ \mathbf{s}\in\Omega_-}} = \bar{q}R\Phi_\kappa + q(\mathbf{r})\,R\Phi_{\kappa-1}, \ \kappa \geqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

$L = (\mathbf{s}, \nabla) + \alpha(z)$ — дифференциальный оператор переноса; S: $S\Phi_\kappa = \sigma(z)\int\limits_{\Omega}\Phi_\kappa f d\mathbf{s}$ — интегральный оператор многократного рассеяния; R: $R\Phi_\kappa = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega_+}\widehat{\Phi}_\kappa\Big|_{z=h}\mu d\mathbf{s}$ — оператор отражения.

Преобразование Фурье равенства (3) можно представить в форме [5, 7]

$$\hat{\tilde{I}} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi_\kappa = \bar{E}W(\mathbf{p}) \sum_{\kappa=1}^{\infty} Q^{n-1} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}) = \bar{E}W(\mathbf{p}) \sum_{\kappa=0}^{\infty} Q^{n} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}) = \bar{E}W(\mathbf{p})\,[E-Q]^{-1}\,\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}), \tag{5}$$

где $W(\mathbf{p}) = \Psi(p)\cdot[1-\bar{q}C(\mathbf{p})]^{-1}$; $\Psi(\mathbf{p})$ — оптическая пространственночастотная характеристика атмосферы; $\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$ — вектор пространственных частот; $\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{p},\mathbf{r})}d\mathbf{r}$ — Фурье спектр альбедо; E — единичный оператор; Q — оператор, действующий на множестве функций $\{g(\mathbf{p})\}$ по правилу $Qg(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')H(\mathbf{p}')g(\mathbf{p}')d\mathbf{p}'$; $H(\mathbf{p}) = RW(\mathbf{p}) = C(\mathbf{p})[1-\bar{q}C(\mathbf{p})]^{-1}$; $C(\mathbf{p}) = R\Psi(\mathbf{p})$.

В аналитическом представлении сумма ряда (3) выглядит следующим образом:

$$\tilde{I} = \tilde{I}_л + \tilde{I}_н = \frac{\bar{E}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{p})\,\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})}\,d\mathbf{p} +$$

$$+\bar{E}\sum_{\kappa=2}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{2\kappa}}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{p})\,\bar{H}(\mathbf{p}_1)\ldots\bar{H}(\mathbf{p}_{\kappa-1})\,\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\ldots$$

$$\ldots\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}_{\kappa-2}-\mathbf{p}_{\kappa-1})\,\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}_{\kappa-1})\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})}\,d\mathbf{p}_1\ldots d\mathbf{p}_{\kappa-1}\,d\mathbf{p}, \tag{6}$$

где $\tilde{I}_л$, $\tilde{I}_н$ — линейная и нелинейная по вариациям альбедо составляющие.

Аналогичные соотношения верны в задаче с поляризацией [5]. Для вектора Стокса уходящего излучения имеем

$$\mathbf{J} = \bar{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{J}}. \tag{7}$$

Здесь

$$\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{D} + \bar{q}\bar{E}\mathbf{\Psi}_0 \tag{8}$$

— «средняя» составляющая вектора Стокса; $\mathbf{D}$ — векторная «дымка»; $\mathbf{\Psi}_0$ — норма векторной оптической пространственно-частотной характеристики атмосферы при $\bar{q} = 0$.

Вариация $\tilde{J}$ определяется рядом

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\mathbf{\Phi}_\kappa, \tag{9}$$

где $\mathbf{\Phi}_\kappa$ удовлетворяют системе рекуррентных краевых задач

$$\begin{cases} L\mathbf{\Phi}_\kappa = S\mathbf{\Phi}_\kappa; \ \mathbf{\Phi}_\kappa\Big|_{\substack{z=0\\ s\in\Omega_+}} = 0; \\ \mathbf{\Phi}_\kappa\Big|_{\substack{z=h\\ s\in\Omega_-}} = [\bar{q}R\mathbf{\Phi}_\kappa + \tilde{q}(\mathbf{r})\,R\mathbf{\Phi}_{\kappa-1}]\,\mathbf{1}; \end{cases} \tag{10}$$

S: $S\mathbf{\Phi}_\kappa = \sigma(z)\int_\Omega \mathrm{P}\mathbf{\Phi}_\kappa d\boldsymbol{s}$ — матричный оператор многократного рассеяния; Р — угловая матрица; $\mathbf{1} = \{1, 0, 0, 0\}$. По указанной выше схеме получаем [5, 8]

$$\hat{\tilde{J}} = \bar{E}\mathbf{W}(\mathbf{p})\,[\boldsymbol{E}-Q]^{-1}\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}), \tag{11}$$

где $W(\mathbf{p}) = \mathbf{\Psi}(\mathbf{p})[1-\bar{q}C(\mathbf{p})]^{-1}$; $\mathbf{\Psi}(\mathbf{p})$ — векторная оптическая пространственно-частотная характеристика атмосферы; $\mathbf{E}$ — единичный матричный оператор; Q — оператор, действующий на множестве вектор-функций $\{\mathrm{g}(\mathbf{p})\}=\{g(\mathbf{p})\mathbf{1}\}$ по правилу $Qg(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\bar{H}(\mathbf{p}')g(\mathbf{p}')d\mathbf{p}'$;

$\bar{H}(\mathbf{p}) = \bar{C}(\mathbf{p})[1 - \bar{q}\bar{C}(\mathbf{p})]^{-1}$; $\bar{C}(\mathbf{p}) = R\Psi_1(\mathbf{p})$; $\Psi_1(\mathbf{p})$ – первая компонента вектор-функции $\Psi(\mathbf{p})$. В аналитическом представлении сумма ряда (9) выглядит следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}_{л} + \tilde{\mathbf{J}}_{н} = \frac{\bar{E}}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(\mathbf{p}) \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p})\, e^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})}\, d\mathbf{p} +$$

$$+ \bar{E} \sum_{\kappa=2}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2\kappa}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(\mathbf{p})\, \bar{H}(\mathbf{p}_1) \ldots \bar{H}(\mathbf{p}_{\kappa-1})\, \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \ldots$$

$$\ldots \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}_{\kappa-2} - \mathbf{p}_{\kappa-1})\, \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}_{\kappa-1})\, e^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})}\, d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_{\kappa-1}\, d\mathbf{p}, \quad (12)$$

где $\bar{\mathbf{J}}_{л}$, $\bar{\mathbf{J}}_{н}$ – линейная и нелинейная по вариациям альбедо составляющие вектора $\tilde{\mathbf{J}}$.

На основании (5) в [7] сделан вывод, что

$$\tilde{I} = \frac{\bar{E}}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{W(\mathbf{p})\, \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p})\, e^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})}\, d\mathbf{p}}{1 - \dfrac{1}{(2\pi)^2} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, H(\mathbf{p}')\, d\mathbf{p}'}\,. \quad (13)$$

Из (11), согласно [8], следует

$$\tilde{J} = \frac{\bar{E}}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{W}(\mathbf{p})\, \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p})\, e^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})}\, d\mathbf{p}}{1 - \dfrac{1}{(2\pi)^2} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, H(\mathbf{p}')\, d\mathbf{p}'}\,. \quad (14)$$

Формулы (13), (14) в замкнутом виде выражают суммы соответствующих рядов (5), (11). Учитывая формульную идентичность (13), (14), проведем дальнейшее исследование на примере скалярной задачи.

Разложим подынтегральное выражение в правой части (13) в ряд

$$\tilde{I} = \tilde{I}_{л} + \tilde{I}_{н} =$$

$$= \frac{\bar{E}}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{p})\, \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p})\, e^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})} \left[1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, H(\mathbf{p}')\, d\mathbf{p}' \right)^{\kappa} \right] d\mathbf{p}. \quad (15)$$

В [15] показано, что при реальных значениях оптических параметров атмосферы и альбедо поверхности вклад составляющей $I_{н}$ в яркость излучения I составляет приблизительно 1%. Для высоких значений $\bar{q}$, $\max|\tilde{q}(\mathbf{r})|$ и слабо вытянутых индикатрис рассеяния этот вклад может достигать нескольких процентов. Сложность вычисления составляющей $\tilde{I}_{н}$ (6), с одной стороны, и ее относительно малый вклад в I, с другой, заставляют на практике пренебрегать величиной $\tilde{I}_{н}$. Формула же (13), открытая возможность простого учета нелинейной составляющей, снимает вопрос ее предварительной оценки. Однако ближайшее рассмотрение показывает, что формула (13) получена неверно. При переходе от (5) к (13) допущена ошибка, состоящая в отождествлении суммы операторного ряда с суммой геометрической прогрессии. Сравним (6) и (15). Линейные составляющие в (6), (15) совпадают: $\tilde{I}_{л} = \frac{\bar{E}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{p}) \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})} d\mathbf{p}$, а нелинейные различаются: в (6) порядки возмущений представляют собой интегралы свертки, а в (15) слагаемые имеют вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{p})\, \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p})\, e^{-i(\mathbf{p},\mathbf{r})} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, H(\mathbf{p}')\, d\mathbf{p}' \right)^{\kappa} d\mathbf{p}$$

Неравенство правых частей (6) и (15) можно установить прямой проверкой. Для этого достаточно взять вариацию альбедо в виде простой гармоники

$$\tilde{q}(\mathbf{r}) = \Delta q \cdot \cos(\omega, \mathbf{r}), \tag{16}$$

поскольку любая функция $\tilde{q}(\mathbf{r})$ представима интегралом Фурье. Подставляя (16) в (13) и используя равенства $W(-\omega) = W^*(\omega)$, $C(-\omega) = C^*(\omega)$, $H(-\omega) = H^*(\omega)$, где * — значок комплексного сопряжения, и $\hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}) = \Delta q \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) e^{i(\mathbf{p},\mathbf{r})} d\mathbf{p} = \Delta q[\delta(\mathbf{p} - \boldsymbol{\omega}) + \delta(\mathbf{p} + \boldsymbol{\omega})]$, получаем

$$\tilde{I} = \frac{\Delta q \bar{E}}{2} \left\{ \frac{W(-\omega) e^{i(\omega, \mathbf{r})}}{1 - 0{,}5\Delta q [H(-2\omega) + H(0)]} + \frac{W(\omega) e^{-i(\omega, \mathbf{r})}}{1 - 0{,}5\Delta q [H(0) + H(2\omega)]} \right\} =$$
$$= \Delta q \bar{E} \operatorname{Re} \left\{ \frac{W(\omega) e^{-i(\omega, \mathbf{r})}}{1 - 0{,}5\Delta q [H(0) + H(2\omega)]} \right\}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что $\tilde{I}$ меняется по гармоническому закону с частотой ω. Это противоречит физическому смыслу, поскольку за счет многократно переотраженных от подстилающей поверхности фотонов решение прямой задачи нелинейно относительно $\tilde{q}(\mathbf{r})$ (см. формулу (6)) и должно содержать высшие гармоники $\cos(n\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})$, $\sin(n\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})$. В последнем можно убедиться, подставив (16) в (6),

$$\tilde{I} = \Delta q \bar{E} \operatorname{Re} \left\{ W(\omega) e^{-i(\omega, \mathbf{r})} + \left(\frac{\Delta q}{2}\right) H(\omega) \left[W(2\omega) e^{-2i(\omega, \mathbf{r})} + W(0) \right] + \right.$$
$$+ \left(\frac{\Delta q}{2}\right)^2 \left[W(3\omega) H(-2\omega) H(-\omega) e^{-3i(\omega, \mathbf{r})} + \right.$$
$$+ W(\omega) H(-\omega) [H(-2\omega) + H(0)] e^{-i(\omega, \mathbf{r})} +$$
$$\left. \left. + W(-\omega) H(-\omega) H(0) e^{i(\omega, \mathbf{r})} \right] + O\left(\frac{\Delta q}{2}\right)^3 \right\}. \tag{18}$$

Как и следовало ожидать, при $|\omega| \to 0$ правые части (6) и (13) равны:

$$\tilde{I}\big|_{|\omega| \to 0} = \Delta q \bar{E} W(0) [1 - \Delta q H(0)]^{-1}.$$

При $|\omega| \to \infty$ $(z = 0)$ из (18) и (17) получаем соответственно: $\tilde{I}_{н} = (\tilde{I} - \tilde{I}_{л})\big|_{|\omega| \to \infty} = 0$ и

$$\tilde{I}_{н} = (\tilde{I} - \tilde{I}_{л})\big|_{|\omega| \to \infty} = \frac{0{,}5\Delta q H(0)}{1 - 0{,}5\Delta q H(0)} \Delta q \bar{E} e^{-\tau_0/|\mu| - i(\omega, \mathbf{r})}.$$

Отсюда следует, что относительная ошибка расчета $\tilde{I}_{н}$ с использованием формулы (13) $\gamma = \dfrac{\tilde{I}_{н}\big|_{(18)} - \tilde{I}_{н}\big|_{(17)}}{\tilde{I}_{н}\big|_{(18)}}$ неограниченно возрастает с ростом ω.

Аналогичные выводы справедливы в случае учета поляризации. В [7—14] прослеживаются дальнейшие ошибочные построения, которые повлекли за собой формулы (13), (14). Например в [14], в знаменателе основного выражения для вектора Стокса (формула (8) на стр. 405) встречается знакомое выражение

$$t(\mathbf{p}) = 1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{q}}(\mathbf{p}') H(\mathbf{p} - \mathbf{p}') d\mathbf{p}'.$$

В заключение заметим, что учет горизонтальной неоднородности альбедо приводит к изменению средней яркости I. На это указывает постоянная составляющая в (18):

$$\Delta q \bar{E} \operatorname{Re} \left[\frac{\Delta q}{2} H(\omega) H(0) + \left(\frac{\Delta q}{2}\right)^2 W(-\omega) H(-\omega) H(0) + O\left(\frac{\Delta q}{2}\right)^3 \right].$$

В практических расчетах этой составляющей можно пренебречь.

1. Золотухин В.Г., Усиков Д.А., Грушин В.А. //Исследование Земли из космоса. 1980. № 3. С. 58—68.
2. Золотухин В.Г., Мишин И.В., Усиков Д.А. и др. //Исследование Земли из космоса. 1984. № 4. С. 14—22.
3. Креков Г.М., Орлов В.М., Белов В.В. и др. Имитационное моделирование в задачах оптического дистанционного зондирования. Новосибирск: Наука, 1988. 165 с.
4. Численное решение задач атмосферной оптики /Под ред. М.В. Масленникова, Т.А. Сушкевич. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1984. 235 с.
5. Мишин И.В., Усиков Д.А., Фоменкова М.Н. Точное представление переходного оператора системы переноса поляризованного излучения в рассеивающем слое. М., 1983. 31 с. (Препринт /ИКИ АН СССР, № 833).
6. Мишин И.В. //Перенос изображения в земной атмосфере. Томск: ИОА СО АН СССР. 1988. С. 152—163.
7. Сушкевич Т.А. //О рядах Неймана для решения краевой задачи теории переноса с неоднородной ламбертовой границей. М., 1986. 24 с. (Препринт /ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 48).
8. Стрелков С.А., Сушкевич Т.А. Аналитический учет вклада ламбертовой поверхности при решении поляризационной задачи методом пространственночастотных характеристик и функций влияния. М., 1987. 28 с. (Препринт /ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 200).
9. Иолтуховский А.А., Стрелков С.А., Сушкевич Т.А. Алгоритм решения поляризационных задач при горизонтально-неоднородной ламбертовой подложке методом пространственно-частотных характеристик. М., 1987. 26 с. (Препринт/ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 227).
10. Сушкевич Т.А. Полуаналитический метод решения уравнения переноса солнечного излучения в неоднородной плоской атмосфере. М., 1988. 26 с. (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 38).
11. Иолтуховский А.А. О постановке и решении обратной задачи атмосферной оптики. М., 1988. 23 с. (Препринт /ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 84).
12. Иолтуховский А.А., Стрелков С.А., Сушкевич Т.А. Тестовые модели численного решения уравнения переноса. М., 1988. 25 с. (Препринт /ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 150).
13. Сушкевич Т.А. //Перенос изображения в земной атмосфере. Томск: ИОА СО АН СССР. 1988. С. 1112—121.
14. Сушкевич Т.А., Стрелков А.С., Иолтуховский А.А. //Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 4. С. 403—408.
15. Мишин И.В. //Исследование Земли из космоса. 1982. № 6. С. 80—85.

Московский институт инженеров геодезии,
аэрофотосъемки и картографии

Поступила в редакцию
21 января 1991 г.

I.V. Mishin. **On the Theory of Atmospheric Optical Transfer Operators.**

The formula for calculation of the horizontally inhomogeneous component of upwelling radiance field in the atmosphere above the surface with isotropic reflection is considered. It is shown that the dependence of this component on the spatial variations of the surface albedo is nonlinear.