<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 6 (1994)

УДК 551.501

О.И. Алдошина, А.Н. Еременко, А.В. Фабриков

РЕКУРСИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКА ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрен алгоритм рекурсивного оценивания координат точечного изотропного импульсного источника из данных наблюдений, осуществляемых из космоса. Приведены программы вычислений координат по методам Калмана и Поттера.

В [1] сформулирована задача и предложен разностно-дальномерный метод определения координат точечного изотропного импульсного источника оптического излучения по данным наблюдений, проводимых из космоса с помощью сетевой спутниковой системы типа <Навстар> [2]. Приведен алгоритм решения этой задачи прямым методом путем обращения матрицы произведения $G^{\mathrm{T}}(\Theta_0)\, G(\Theta_0)$, появляющейся в линеаризованном уравнении связи между координатами источника и данными наблюдений

$$\tilde{\upsilon} = G(\Theta_0)\, \tilde{\Theta} + N \tag{1}$$

после умножения его слева на транспонированную матрицу $G^{\mathrm{T}}(\Theta_0)$. В уравнении (1) приняты следующие обозначения $\Theta = \Theta - \Theta_0$; $\tilde{\upsilon} = \upsilon - L(\Theta_0)$; $\Theta = [\, x, y, z, T_0]^{\mathrm{T}}$; $\upsilon = [\upsilon_{12}, \upsilon_{13}, ..., \upsilon_{1n}]^{\mathrm{T}}$; x, y, z – координаты источника; T_0 – систематическая ошибка измерения запаздываний; υ_{ij} – разности моментов прихода сигнала к различным космическим аппаратам (КА), или запаздывания; Θ_0 – номинальное значение вектора Θ ; N – вектор-столбец случайных ошибок измерения, распределенных по гауссовскому закону с нулевым средним и дисперсией σ^2; $L(\Theta_0)$ – вектор-столбец с элементами $r_j - r_1 - cT_0$ ($j = 2, 3, ..., n$), рассчитанными для номинальных значений x, y, z, T_0; r_j – расстояние от источника до j-го КА; c – скорость света. Матрица $G(\Theta_0)$ имеет вид

$$G(\Theta_0) = -\,[G_1(\Theta_0), G_2(\Theta_0), ... , G_{n-1}(\Theta_0)]^{\mathrm{T}} , \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &G_j(\Theta_0) = [\alpha_{j+1}, \beta_{j+1},\gamma_{j+1},1] ,\\ &\alpha_j = (\, x_j - x_0)/r_{j0} - (\, x_1 - x_0)/r_{10} ,\\ &\beta_j = (\, y_j - y_0)/r_{j0} - (\, y_1 - y_0)/r_{10} ,\\ &\gamma_j = (\, z_j - z_0)/r_{j0} - (\, z_1 - z_0)/r_{10} ; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

r_{i0} – ($i = 1, 2, ..., n$) – значения r_i, рассчитанные для номинальных координат источника x, y, z. Оценка вектора $\tilde{\Theta}$ и матрицы ковариации погрешностей оценивания P в прямом методе производится по формулам

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\tilde{\Theta}} = (G^{\mathrm{T}}(\Theta_0)\, G(\Theta_0))^{-1}\, G^{\mathrm{T}}(\Theta_0)\, \upsilon ,\\ &\hat{P}(\Theta_0) = (G^{\mathrm{T}}(\Theta_0)\, G(\Theta_0))^{-1}\, \sigma^2 . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

При большом n, однако, прямой метод оценивания по формулам (4) становится громоздким. Удобнее воспользоваться одним из рекурсивных методов, в которых оценивание производится последовательно по мере поступления данных от различных КА, причем новая, улучшенная оценка представляется линейной комбинацией предыдущей оценки и новых данных. Ниже рассмотрены два подхода к задаче рекурсивного оценивания координат точечного импульсного источника оптического излучения по данным спутниковых измерений и проведено сравнение рекурсивных методов оценивания с прямым. Рассмотренные подходы основаны на алгоритме Калмана и его модификации – алгоритме корня квадратного из матрицы ковариации погрешностей оценивания, называемом также алгоритмом Поттера [3].

Если вектор данных $\tilde{\upsilon}$ связан с вектором параметров $\tilde{\Theta}$ уравнением [1], то оценивание методом Калмана [3, 4] производится по уравнениям

$$\hat{\tilde{\Theta}} = \bar{\tilde{\Theta}} + K(\tilde{\upsilon} - G\bar{\tilde{\Theta}})\,; \quad \hat{P} = \bar{P} - KG\bar{P}\,,$$

где $\bar{\tilde{\Theta}}$ и $\bar{P}$ – априорная оценка и априорная матрица ковариации; K и D определяются уравнениями

$$K = \bar{P}\,G^{\mathrm{T}} D^{-1}\,, \quad D = G\,\bar{P}\,G^{\mathrm{T}} + I\sigma^2.$$

Входными параметрами рекурсивного фильтра являются начальные значения $\tilde{\Theta}_0 = 0$ и $P_0 = (G^{\mathrm{T}}(\Theta_0)\,G(\Theta_0))^{-1}\,\sigma^2$, данные z_j и набор коэффициентов A_j, где z_j – j-й элемент вектор-столбца $\tilde{\upsilon}$ (скаляр) и A_j – j-я строка матрицы $G(\Theta_0)$ (вектор-строка). Вычисления ведутся по схеме

$l_j = P_j A_j^{\mathrm{T}}$, $r_j = A_j l_j + 1$ – ковариация предсказанного остатка,
$K_j = l_j/r_j$ – вектор коэффициентов усиления,

$\tilde{\upsilon}_j = z_j - A_j\tilde{\Theta}_j$ – предсказанный остаток;

$\tilde{\Theta}_{j+1} = \tilde{\Theta}_j + K_j\tilde{\upsilon}_j$ – обновленная оценка вектора $\tilde{\Theta}$;

$\bar{P}_{j+1} = \bar{P}_j - K_j l_j^{\mathrm{T}}$ – обновленная ковариация;

$\bar{l}_j = \bar{P}_{j+1} A_j^{\mathrm{T}}$, $P_{j+1} = (\bar{P}_{j+1} - \bar{l}_j K_j^{\mathrm{T}}) + K_j K_j^{\mathrm{T}}$ – стабилизированная обновленная ковариация, где $\tilde{\Theta}_j$ и P_j – оценка вектора Θ и матрица ковариации оценивания после обработки j наблюдений.

Таблица 1

Координаты источника: x = 2879,592; y = 2249,784; z = 5218,817;

№ КА	Координаты КА : x_i, y_i, z_i			Моменты прихода сигнала, t_i
	Эксперимент 1 Номинальные значения			
	x_0 = 2882,544	y_0 = 2252,107	z_0 = 5224,175	T_0 = 0,300
1	15338,253	20331,950	348,959	0,07502580
2	17241,558	9276,542	16292,524	0,06487520
3	9044,992	–7212,935	22692,147	0,06940000
4	–12974,502	1986,421	21828,613	0,07659680
5	–4876,855	11856,692	22009,251	0,06952020
	Эксперимент 2 Номинальные значения			
	x_0 = 2882,580	y_0 = 2252,156	z_0 = 5224,273	T_0 = 0,300
1	15341,989	20331,475	162,199	0,07516880
2	17313,940	9369,671	16161,949	0,06492040
3	9143,620	–7080,761	22694,248	0,06930500
4	–12910,977	1840,856	21878,980	0,07657960
5	–5035,433	11876,259	21962,940	0,06962480
	Эксперимент 3 Номинальные значения			
	x_0 = 2882,416	y_0 = 2252,008	z_0 = 5223,957	T_0 = 0,300
1	15347,692	20325,722	–295,894	0,07552140
2	17490,615	9593,661	15837,113	0,06503740
3	9387,755	–6758,228	22692,955	0,06907640
4	–12757,058	1481,394	21996,293	0,07654380
5	–5422,602	11926,737	21843,136	0,06988440

Таблица 2

Метод	Вычисленные значения (оценки) параметров x, y, z, cT_0 и (в скобках) диагональные элементы матрицы ковариации
	Эксперимент 1
Прямой	2881,296 (0,000) 2251,138 (0,001) 5222,083 (0,007) – 0,166 (0,003)
Калмана	2880,445 (0,000) 2250,237 (0,001) 5221,257 (0,007) 0,300 (0,003)
Поттера	2879,842 (0,015) 2249,976 (0,032) 5220,137 (0,084) 0,598 (0,053)
	Эксперимент 2
Прямой	2881,288 (0,000) 2251,155 (0,001) 5222,106 (0,007) – 0,169 (0,003)
Калмана	2880,336 (0,000) 2250,276 (0,001) 5221,483 (0,007) 0,300 (0,003)
Поттера	2879,889 (0,016) 2249,897 (0,032) 5220,439 (0,084) 0,598 (0,052)
	Эксперимент 3
Прямой	2881,286 (0,000) 2251,137 (0,001) 5222,056 (0,007) – 0,140 (0,003)
Калмана	2880,427 (0,000) 2250,789 (0,001) 5221,875 (0,007) 0,300 (0,003)
Поттера	2879,579 (0,016) 2249,693 (0,033) 5220,846 (0,082) 0,598 (0,052)

В алгоритме корня квадратного вместо априорного значения P_0 матрицы ковариации P на входе фильтра используется априорное значение корня квадратного из P_0, равного в данном случае $S_0 = G^{-T}(\Theta_0)\,\sigma$, где $G(\Theta_0)$ рассчитано по формулам (2), (3) для $n = 5$. Вычисления ведутся по схеме:

$l_j^{T} = A_j S_j$, $r_j = 1/(l_j^{T} l_j + 1)$ – обратная величина ковариации предсказанного остатка;

$K_j = S_j\, l_j$ – вектор коэффициентов усиления;

$\tilde{\upsilon}_j = z_j - A_j \tilde{\Theta}_j$ – предсказанный остаток;

$\tilde{\Theta}_{j+1} = \tilde{\Theta}_j + K_j(\tilde{\upsilon}_j\, r_j)$ – обновленная оценка вектора $\tilde{\Theta}$;

$\gamma_j = r_j / (1 + \sqrt{r_j})$, $S_{j+1} = S_j - (\gamma_j K_j)\, l_j^{T}$ – обновленный корень квадратный ковариации;

$P_{j+1} = S_{j+1} S_{j+1}^{T}$ – ковариация.

Для проверки эффективности описанных алгоритмов был поставлен численный эксперимент с исходными данными и данными наблюдений приведенными в табл. 1. Прямым методом вычисления проводились для $n = 5$, рекурсивными – для $n = 14$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

В приложении приведены программы вычислений по методам Калмана и Поттера на языке Паскаль.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1а

Процедура Калмана

```
PROCEDURE Kalman ;
VAR       i , j                                  :  INTEGER ;
       TYPE
           VECTOR = ARRAY [1 .. 10]             OF REAL ;
       VAR
              S, Sigma, Delta                    : REAL ;
              V                                  : VECTOR ;
       BEGIN
              Sigma : = 1 .;
              Delta : = z ;                                              { z – вход }

              FOR    i : = 1 TO N DO BEGIN
                    V[i] : = 0. ;
                         FOR j : = 1 TO N DO
                              V[i] : = V[i] + P[i, j]*A[ j] ;            {P, A – вход}
                    Delta : = Delta – A[i]*X[i] ;                        {x  – вход}
                    Sigma : = Sigma + A[i]*V[i] ;
              END ;
              Sigma : = 1. /Sigma ;
              FOR    i : = 1 TO N DO BEGIN
                    K[i] : = V[i]*Sigma ;                               {K – выход}
                    X[i] : = X[i] + K[i]*Delta ;                 {X – выход оценка}
```

```
                FOR    j : = 1 TO N DO BEGIN
                     P[i, j] : = P[i, j] – K[i]*V[ j] ;
                     P[ j, i] : = P[i, j] ;
                END ;
          END ;
          FOR    i : = 1 TO N DO BEGIN
          V[i] : = 0. ;
                FOR j : = 1 TO N DO
                     V[i] : = V[i] + P[i, j]*A[ j] ;
          END ;
          FOR j : = 1 TO N DO
               FOR    i : = 1 TO  j DO BEGIN
                S : = 0,5*(P[i, j] – V[i]*K[ j] + P[i, j] – V[ j]*K[i]) ;
                P[i, j] : = S + K[i]*K[ j] ;                              {P – выход}
                P[ j, i] : = P[i, j] ;
          END ;
          FOR   i : = 1 TO N DO
               FOR   j : = 1 TO N DO BEGIN
                  PklOut [i, j] : = Pkl  [i, j] ;
          END ;

          Xout : = X0 + X[1] ;                                {X – выход координата}
          Yout : = Y0 + X[2] ;                                {Y – выход координата}
          Zout ; = Z0 + X[3] ;                                {Z – выход координата}
     END ;   (* . . . . . . . конец процедуры Калмана . . . . . . .  *)
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 1б

Процедура Поттера

```
PROCEDURE Potter ;
       TYPE
            VECTOR = ARRAY[1 .. 10]                        of REAL ;
       VAR
            Sigma, Delta, Gamma, Alfa                       : extended ;
            V                                               : VECTOR ;
       VAR i , j : INTEGER ;
       BEGIN
            Sigma : = 1. ;
            Delta : = Z ;                                                {z –вход}
            FOR i : = 1 TO N DO BEGIN
                 V[i] : = 0.;
                      FOR   j : = 1 TO N DO
                           V[i] : = V[ i] + S[ j, i]*A[ j] ;              {S, A – вход}
                 Delta : = Delta – A[i]*X[i] ;                           {X – вход}
                 Sigma : = Sigma : + V[i]*V[i] ;
            END ;
            Sigma : = 1./Sigma ;
            Delta : = Delta*Sigma ;
            Gamma : = Sigma/(1. + SQRT(Sigma)) ;
            Alfa : = 0 ;
            FOR i : = 1 TO N DO
                 Alfa := Alfa + S[i, j]*V[ j] ;
            X[i] : = X[i] + Alfa*Delta ;                                 {X – выход}
            Alfa := Alfa*Gamma ;
            FOR j ; =1 TO N DO
                 S[i, j] : = S[i, j] – Alfa*V[ j] ;                {X – выход оценка}
            Xout : = X0 + X[1] ;                              (X – выход координата)
            Yout : = Y0 + X[2] ;                              (Y – выход координата)
            Zout : = Z0 + X[3] ;                              (Z – выход координата)
  END ;  {***           Конец процедуры Поттера           ***}
```


1. Алдошина О.И., Фабриков А.В., Фабриков В.А. // Методы и системы приема и отображения информации. Сб. научн. тр. ТулПИ. Тула. 1993. С. 63–80.
2. Milleken R.J., Zoller C.J. // Navigation (USA). 1978. V. 25. N 2. P. 95–106.

3. B i e r m a n G . J . Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. N 4.: Academic Press, 1977. 241 p.
4. Я р л ы к о в М . С . Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985. 344 с.

Всероссийский НИИ оптико-физических
измерений Госстандарта России, Москва

Поступила в редакцию
6 марта 1994 г.

O.I. A l d o s h i n a , A.N. E r y o m e n k o , A.V. F a b r i k o v . **Recursion Filtration in Application to Calculations of Coordinates of an Optical Radiation Source by the Difference-Telemetric Method.**

In this paper we analyze the algorithm of recursive estimation of coordinates of a pulsed isotropically emitting source of radiation from data of spaceborne observations. Computer programs for calculating the coordinates of a source based on Kalman and Potter methods are presented.