«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 6 (1997)

УДК 551.51+519.6

В.В. Пененко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ АТМОСФЕРЫ

Обсуждаются вопросы организации и построения математических моделей для климато-экологического мониторинга, прогнозирования, управления качеством природной среды и планирования наблюдений. Взаимосвязи между моделями, данными измерений, вариациями параметров модели и целевых функционалов реализуются на базе вариационного принципа.

1. Введение

Организация современных систем климато-экологического мониторинга для исследования природных процессов, реализующихся в условиях антропогенных воздействий, невозможна без активного применения методов математического моделирования и совместного использования моделей изучаемых явлений и данных натурных наблюдений. С социальной точки зрения главная цель таких исследований состоит прежде всего в выявлении предпосылок возникновения в конкретных регионах экологически неблагоприятных и катастрофических ситуаций и в получении количественных оценок допустимых уровней антропогенных нагрузок, исходя из критериев и ограничений экологической безопасности. Естественно, возникает также вопрос о планировании наблюдений в соответствии с некоторыми заданными критериями их оптимальности или повышения информативности измерений. Таким образом появляется новый класс задач, связанных с оценками экологической перспективы конкретных регионов при совместном воздействии естественных и антропогенных факторов. Для его решения требуются математические модели комплексного характера и эффективные методы их совместного использования с данными наблюдений для диагностики, идентификации и прогнозирования изменений в природной среде и отработки способов включения в экономико-климатическую систему региона обратных связей по управлению антропогенными нагрузками, влияющими на качество природной среды.

При рассматриваемом нами подходе базовый уровень в технологии моделирования составляют: модели гидротермодинамических процессов в климатической системе индустриальных регионов с учетом антропогенных воздействий; модели переноса и трансформации загрязняющих примесей; модели взаимодействия воздушных масс и примесей с элементами подстилающей поверхности [1–3].

Методика использования математических моделей для целей мониторинга и экологического прогнозирования имеет оптимизационный характер [4]. Поэтому базовые модели, наряду с их описанием в традиционной «дифференциальной» форме, удобно представить в вариационной формулировке с помощью интегрального тождества, учитывающего в основном функционале описание модели в виде систем дифференциальных уравнений, краевые и начальные условия, внешние воздействия и входные параметры. Функционал интегрального тождества будем определять исходя из уравнения баланса энергии и других соотношений баланса для исследуемых процессов. В качестве примера приведем здесь описание модели только одной части комплекса, а именно модели переноса и трансформации примесей в атмосфере; вариационная формулировка модели гидротермодинамики атмосферы дана в [5].

2. Модель переноса и трансформации загрязняющих примесей

В соответствии с целями исследований будем использовать двойственное описание модели в дифференциальной и вариационной формулировках.

1) Основные уравнения модели в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathrm{div}\, c_i\, \mathbf{u} - \mathrm{div}_s\, \mu\, \mathrm{grad}_s\, c_i - \frac{\partial}{\partial s}\, \nu\, \frac{\partial c_i}{\partial s} + (B\mathbf{c})_i = f_i(\mathbf{x}, t), \quad i = \overline{1, n}\ . \tag{1}$$

2) Интегральное тождество для модели переноса:

$$I_c(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{D_t} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_i}{\partial t} c_i^* - \frac{\partial c_i^*}{\partial t} c_i \right) + (\Lambda c_i, c_i^*) + \mu\, \mathrm{grad}_s\, c_i\, \mathrm{grad}_s\, c_i^* + \nu \frac{\partial c_i}{\partial s}\frac{\partial c_i^*}{\partial s} + (B\mathbf{c})_i\, c_i^* - (f_i\, c_i^*) \right\} dD dt - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega_t} \mu\, \frac{\partial c_i}{\partial n} c_i^*\, d\Omega\, dt - \int_{S_t} \left(\nu\, \frac{\partial c_i}{\partial \sigma} c_i^* \right) \Big|_0^1 dS\, dt + \frac{1}{2} \int_D c_i\, c_i^* \Big|_0^t dD \right\} = 0\ . \tag{2}$$

Здесь $\varphi \equiv \mathbf{c} = \{c_i, i = \overline{1, n}\}$ – вектор-функция с компонентами, описывающими концентрации загрязняющих примесей; n – число примесей; $\varphi^* \equiv \mathbf{c}^* = \{c_i^*, i = \overline{1, n}\}$ – вектор-функция с произвольными достаточно гладкими компонентами; $\mathbf{f} = \{f_i, i = \overline{1, n}\}$ – функции источников; $(B\mathbf{c})$ – оператор трансформации примесей; $\Lambda\varphi$ – оператор переноса субстанции φ на фоне воздушного потока со скоростью $\mathbf{u} = (u, v, w)$; μ, ν – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтали и вертикали соответственно, нижним индексом s отмечены операторы по горизонтальным переменным; $\mathbf{Y} = (\mu, \nu, \mathbf{u}, \mathbf{c}^0, \mathbf{f})$ – вектор входных параметров модели; $\mathbf{c}^0$ – начальное состояние; $D_t = D\times[0, \bar{t}]$, где $[0, \bar{t}]$ – интервал изменения времени t; D – область изменения пространственных переменных $\mathbf{x} = (x, y, \sigma)$; σ – вертикальная координата, следящая за рельефом поверхности Земли; x, y – горизонтальные координаты; Ω_t – боковая граница; S_t – нижняя граница области D_t. Коэффициенты вектора скорости $\mathbf{u}$ связаны между собой уравнением неразрывности, которое входит в состав модели гидротермодинамики атмосферы. В вертикальной составляющей w учитывается также скорость гравитационного осаждения частиц примесей. Вид функционала в тождестве (2) определяется исходя из уравнения энергетического баланса модели. Интегралы в (2) по границам Ω_t и S_t и по области D в момент времени $t = 0$ замыкаются с использованием соответствующих краевых и начальных условий:

а) при $t = 0$ $c_i(\mathbf{x}, 0) = c_i^0(\mathbf{x})$,

б) при $\sigma = 1$ $(z = Z_s(x, y))$ $R_{1i}(\mathbf{c}) = f_{1i}(x, y, t)$,

в) при $\sigma = 1$ $R_{2i}(\mathbf{c}) = f_{2i}(x, y, t)$.

На боковой границе Ω предполагается выход на фоновые значения концентрации примесей. Здесь $Z_s(x, y)$ – функция, описывающая рельеф поверхности; R_{1i}, R_{2i} – заданные операторы; f_{1i}, f_{2i} – источники и стоки примесей. Операторы $R_{1i}(\mathbf{c})$ описывают взаимодействие различных веществ между собой и с поверхностью Земли, включая обменные процессы между воздухом, водой, почвой, растительным покровом и др., а операторы $R_{2i}(\mathbf{c})$ – поведение примесей на верхней границе. Вид операторов $B_i(\mathbf{c})$, $R_{1i}(\mathbf{c})$, $R_{2i}(\mathbf{c})$ и функций f_{1i}, f_{2i} задается для каждой конкретной задачи специально, и поэтому их можно рассматривать как некоторые обобщенные входные параметры модели. Краевые и начальные условия для функций c_i^* являются следствиями вариационной формулировки модели и соответствующих постановок оптимизационных задач.

Предполагается, что функции φ и φ^* принадлежат соответствующим функциональным пространствами, а вектор $\mathbf{Y}$ – множеству допустимых значений параметров, т.е.

$$\varphi \in Q(D_t)\ , \quad \varphi^* \in Q^*(D_t)\ , \quad \mathbf{Y} \in R(D_t)\ . \tag{3}$$

3. Функционалы для управления и планирования

Для формулировки задач мониторинга, прогнозирования и проектирования и построения алгоритмов их решения введем совокупность функционалов вида

$$\Phi_k(\varphi) = \int_{D_t} F_k(\varphi)\, \chi_k(\mathbf{x}, t)\, dD\, dt\ , \quad k = \overline{0, K}\ , \tag{4}$$

где $F_k(\varphi)$ – некоторые заданные функции от φ; $\chi_k(\mathbf{x}, t)$ – неотрицательные весовые функции, определяемые в D_t условиями или планами наблюдательных экспериментов, условиями оценивания состояния в области D_t или в ее подобластях или на дискретных множествах точек $D_t^m \subset D_t$, содержащих по меньшей мере одну точку, а $\chi_k(\mathbf{x}, t)dDdt$ – соответствующие им меры Радона или Дирака в области D_t. В этой совокупности выделим функционалы четырех типов, различающихся по структуре и по целевому назначению: 1) функционалы обобщенной оценки поведения системы; 2) функционалы качества, характеризующие отклонения между измеренными и вычисленными величинами; 3) функционалы ограничений на функции состояния; 4) целевые функционалы для управления антропогенными нагрузками.

В данном случае в рассмотрении участвуют ограничения, вытекающие из условий экологической безопасности и устойчивости, а целевые функционалы дополнительно учитывают и социально-экономические факторы, такие как стоимость ущерба природной среде и стоимость природоохранных мероприятий, направленных на уменьшение этого ущерба.

Ограничения на функции состояния обычно имеют характер неравенств. Они являются локальными или глобальными по отношению к области определения функций состояния и независимых переменных. Поскольку численные модели имеют большое число внутренних степеней свободы, то локальные ограничения типа неравенств технологически неудобно учитывать в оптимизационных алгоритмах итерационного типа. Поэтому мы их заменим эквивалентными глобальными ограничениями типа равенств:

$$\Phi_\alpha(\varphi) = 0\,, \quad \alpha \in \{k = \overline{0, K}\}\,. \tag{5}$$

При этом функции F_α и χ_α в определении функционалов вида (3) будут иметь специальные представления, так чтобы с помощью равенств (5) можно было исключать нарушения локальных ограничений.

Действительно, пусть локальные ограничения на функцию состояния φ заданы в виде неравенств

$$\Psi_\alpha(\varphi, \mathbf{x}, t) \le 0\,, \quad \varphi \in Q(D_t)\,, \quad (\mathbf{x}, t) \in D_t\,, \tag{6}$$

где ψ_α – заданные дифференцируемые относительно φ функции. Чтобы записать эквивалентные (6) интегральные ограничения (5), достаточно взять в качестве F_α в определении функционала (4) функции следующего вида:

$$F_\alpha(\varphi) = \left|\Psi_\alpha + \left|\Psi_\alpha\right|\right|. \tag{7}$$

Функционалы наблюдений определяются следующим образом. Предположим, что наблюдения осуществляются на некотором дискретном множестве точек $D_t^m \subset D_t$. Совокупность наблюдаемых величин обозначим через $\eta^m = \{\eta_k^m,\ k = \overline{1, k_0}\}$, где k_0 – число наблюдений, и соответствующих им моделей наблюдений – через $\mathbf{H}(\varphi) = \{H_k(\varphi),\ k = \overline{1, k_0}\}$, где $H_k(\varphi)$ – функциональное описание преобразований функции состояния в термины наблюдаемых величин. Символом $[H_k(\varphi)]_m$ будем обозначать результаты вычислений образов наблюдаемых величин η_m в точках множества D_t^m. С учетом сделанных обозначений введем определение функционалов невязки между измеренными и вычисленными значениями соответствующих величин:

$$\Phi(\varphi) = \int_{D_t} \sum_k [(\eta_k^m - [H_k(\varphi)])_m^2\, \chi_k^m(\mathbf{x}, t)]\, dD\, dt\,, \tag{8}$$

где $\chi_m^k dDdt$ – меры Дирака, сосредоточенные в точках множества D_t^m. Для целей усвоения данных измерений и диагностических исследований в функционалах вида (8) будем учитывать все наблюдения, а если требуется решать задачи планирования наблюдений, то в дополнение к функционалу, учитывающему все наблюдения, будем использовать функционалы этого же типа для одиночных наблюдений. Координаты точек размещения наблюдений отнесем к множеству входных параметров модели усвоения данных и планирования.

4. Задачи управления источниками

Рассмотрим постановку задач по управлению источниками примесей. В этом случае функции источников в (1) представим в виде

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{M_i} (1 - e_{ki})\, q_{ki}(t)\, \omega_{ki}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{0, n}, \tag{9}$$

где q_{ki} – функции мощности источников, а $\omega_{ki}(\mathbf{x})$ – функции их пространственного размещения в области D; M_i – число источников примеси с номером i, $\mathbf{e} = \{e_{ki}, k = \overline{1, M_i}, i = \overline{1, n}\}$ – коэффициенты относительного регулирования мощности источников. Предполагается, что параметры регулирования удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \le e_{ki} \le E_{ki} \le 1, \quad k = \overline{1, M_i}, \quad i = \overline{0, n}, \tag{10}$$

где E_{ki} – заданные предельные значения. Значения $e_{ki} = 0$ соответствуют исходному состоянию источников, а если $E_{ki} = 1$, то соответствующий источник в некоторых ситуациях может быть полностью отключен.

Задача проектирования состоит в нахождении допустимых уровней антропогенных нагрузок в соответствии с заданным целевым критерием и при условиях, что функции состояния связаны с параметрами и источниками посредством математической модели (1) в дискретной форме и удовлетворяют заданной совокупности ограничений [4]. Алгоритмически ее решение сводится к оценке компонент вектор-параметра $\mathbf{e}$, исходя из условий оптимальности целевого критерия с ограничениями. В качестве последних выступают уравнения численной модели и функционалы эколого-климатических ограничений.

Ввиду нелинейности моделей и функционалов задача решается итерационными методами градиентного типа. Центральное место здесь занимают алгоритмы формирования соотношений чувствительности и алгоритмы расчета самих функций чувствительности для каждого из функционалов из совокупности (4), (5), (8).

Их определения и расчетные формулы имеют вид:

1) для соотношений чувствительности

$$\delta\Phi_i^h(\varphi) = (\mathrm{grad}_{\mathbf{Y}}\, \Phi_i^h, \delta\mathbf{Y}) \equiv \frac{\partial}{\partial\xi} I^h(\varphi, \mathbf{Y} + \xi\, \delta\mathbf{Y}, \varphi_i^*)\Big|_{\xi = 0}, \quad i = \overline{0, K}; \tag{11}$$

2) для функций чувствительности

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{Y}}\, \Phi_i^h \equiv \frac{\partial\Phi_i^h(\varphi)}{\partial\mathbf{Y}} \equiv \frac{\partial}{\partial\delta\mathbf{Y}} \frac{\partial}{\partial\xi} I^h(\varphi, \mathbf{Y} + \xi\, \delta\mathbf{Y}, \varphi_i^*)\Big|_{\xi = 0}, \quad i = \overline{0, K}. \tag{12}$$

Здесь и далее верхний индекс h обозначает дискретный аналог соответствующего объекта; ξ – вещественный параметр; δ – символ вариации соответствующего объекта, например $\delta\mathbf{Y}$ – вектор вариаций параметров $\mathbf{Y}$. Предполагается выполнение условий $\mathbf{Y}, \mathbf{Y} + \xi\delta\mathbf{Y} \in R^h(D_t^h)$, D_t^h – сеточная область в D_t.

В (11), (12) φ и $\varphi_i^*(i = \overline{0, K})$ – решения основной и сопряженных задач при невозмущенных значениях параметров $\mathbf{Y}$. Эти задачи порождаются дискретными аналогами функционалов

$$\tilde{\mathrm{F}}_i^h(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi_i^*) \equiv \Phi_i^h(\varphi) + I^h(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi_i^*), \quad i = \overline{0, K}. \tag{13}$$

В отличие от тождества (2) в (13) функция φ^* приобретает более конкретный смысл – она здесь играет роль распределенного множителя Лагранжа для учета дискретных уравнений численной модели в качестве ограничений при рассмотрении функционала из (4) с номером i и поэтому в формулах (11)–(13) она снабжается индексом i соответственно.

При этом основная задача получается из условий стационарности функционалов (13) при произвольных и независимых вариациях компонентов функции φ_i^* в узлах сеточной области D_t^h, а сопряженные задачи – из условий стационарности этих же функционалов при вариациях компонентов функции состояния φ в узлах сетки D_t^h. Сопряженных задач решается столько, сколько всего функционалов входит в совокупность (4). В качестве источников для сопряженных задач выступают функции $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi}$. Отсюда и возникает требование дифференцируемости функционалов (4), (5), (8) по отношению к функциям состояния. Различные применения сопряженных задач для исследования природных систем обсуждаются в работах [1, 2, 4, 6].

Решения основной и сопряженных задач позволяют в соотношениях чувствительности (11) исключить внутренние степени свободы самой численной модели и таким образом получить с помощью функций чувствительности непосредственные связи между вариациями всех функционалов и вариациями параметров. Анализ функций чувствительности позволяет выявить области повышенной чувствительности исследуемых функционалов и к вариациям параметров. Как уже отмечалось выше, функции источников примесей мы отнесли к числу обобщенных параметров моделей. Таким образом, функции чувствительности к вариациям параметров $\delta\mathbf{f}$ дают нам информацию для районирования территорий региона D по степени чувствительности заданных функционалов к вариациям источников антропогенных воздействий и для включения обратных связей по управлению самими источниками.

Если функции $q_{ki}(t)$ и $\omega_{ki}(x)$ в представлении (9) заданы и не варьируются, а варьируются только параметры регулирования $\mathbf{e}$, то соотношения чувствительности в рамках итерационного алгоритма градиентного типа дают нам способ нахождения значений этих параметров. На каждом итерационном шаге поправки к ним рассчитываются по значениям функций чувствительности оптимизируемого целевого функционала, а ограничения учитываются с помощью метода проектирования градиента целевого функционала в направлении вектора искомых параметров на линейное многообразие, порождаемое соотношениями чувствительности для функционалов ограничений (5)–(7).

Оператор проектирования формируется с помощью матрицы этого многообразия. Ее элементы состоят из значений функций чувствительности, соответствующих вариациям искомых параметров.

Получаемые таким образом значения параметров источников дают количественное представление о допустимых уровнях антропогенных нагрузок таких, что не выводят состояние климатической системы из области экологических ограничений. Если уточнению подлежат и функции географического размещения источников $\omega_{ki}(\mathbf{x})$ в формуле (9), то для оценок необходимо использовать функции чувствительности к вариациям $\delta\omega_{ki}(\mathbf{x})$.

Здесь мы, для удобства изложения, рассматриваем алгоритмически разомкнутый вариант модели переноса примесей по отношению к моделям гидротермодинамики, предполагая, что состояние атмосферы известно и задано в совокупности входных параметров полем скорости $\mathbf{u}$ и коэффициентами турбулентности μ, ν. В реальных условиях модели должны выступать в комплексе и при необходимости должны учитываться прямые и обратные связи между гидротермодинамическими процессами и загрязнением атмосферы, поскольку поведение атмосферы и условия формирования мезоклиматов во многом определяют уровни допустимых антропогенных нагрузок [2, 7]. По существу вопрос состоит в поиске условий сохранения климатоэкологической устойчивости при взаимодействии естественных и антропогенных факторов. Поэтому очень важно при анализе результатов моделирования исследовать степень чувствительность как целевых функционалов, так и функционалов ограничений ко всему множеству входных параметров и внешних воздействий.

5. Усвоение данных и планирование

Задачи усвоения данных наблюдений, «диагностики» моделей и планирования для целей мониторинга решаются с помощью методов совместного использования моделей и данных наблюдений [8]. Чтобы алгоритмически организовать прямые и обратные связи между моделями и наблюдениями, необходимо предположить, что по меньшей мере один из элементов технологии моделирования, т.е. модель, ее параметры, начальные и входные данные, содержит ошибки. Ошибки также могут содержать и результаты наблюдений.

Для построения алгоритмов решения задач усвоения данных и диагностики модели определим обобщенный функционал качества

$$J^h(\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{Y}, \varphi^0) = I^h(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) + \{\Phi_0(\varphi) + (\mathbf{r}^{\mathrm{T}} M_0\, \mathbf{r}) + (\varphi^0 - \overset{0}{\varphi_a})^{\mathrm{T}} M_1(\varphi^0 - \overset{0}{\varphi_a}) + (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_a)\, \Gamma(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_a)\}^h. \quad (14)$$

Здесь $\Phi_0(\varphi)$ – функционал наблюдений; $\mathbf{r}$ – функция ошибок модели; $\overset{0}{\varphi_a}$, $\mathbf{Y}_a$ – априорные оценки начального состояния φ^0 и параметров $\mathbf{Y}$; M_0, M_1, Γ – заданные весовые матрицы; верхний индекс «*T*» обозначает операцию транспонирования.

Алгоритмы получаются из условий стационарности функционала (14) к вариациям сеточных компонентов функций φ^*, φ, $\mathbf{r}$, $\mathbf{Y}$, $\overset{0}{\varphi}$ в узлах сетки D_t^h. Он включает схемы решения основной и сопряженных задач и формулы расчета функций $\mathbf{r}$, $\overset{0}{\varphi}$, $\mathbf{Y}$ через соответствующие функции чувствительности. По структуре это итерационный метод градиентного типа.

Теперь рассмотрим вопросы планирования. Планы наблюдательных экспериментов зависят прежде всего от целей и выбранных критериев для оценок их информативности. Поэтому на практике реализуется много подходов к решению проблемы планирования [9]. Учитывая специфику задач климато-экологического мониторинга и тот факт, что модели изучаемых процессов имеют большое число внутренних и внешних степеней свободы, удобно использовать методику планирования по «функциям чувствительности», выделяя зоны с максимальными их значениями для размещения там наблюдений. Эта методика эффективна, когда наблюдательные эксперименты направлены на оценку функционалов или параметров моделей. Координаты точек размещений наблюдателей выступают в роли входных параметров моделей планирования. В силу нелинейности моделей процессов будем применять тактику последовательного планирования, вводя корректировку в размещение наблюдателей по информации о функции чувствительности оцениваемых функционалов к вариациям искомых параметров моделей, включая координаты наблюдателей.

В таком случае можно предположить, что движение точек размещения наблюдателей в области D_t может быть параметризовано в виде

$$\mathbf{x}_{k\tau} = \mathbf{x}_k + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}_k),\ \ \mathbf{x}_{k\tau}\,, \mathbf{x}_k \in D_t\,, \quad (15)$$

где $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{x}_{k\tau}$ – стартовая и планируемая точки наблюдений; $\mathbf{V}(\mathbf{x}_k)$ – «скорость» в пространстве планирования; τ – параметр. Функция $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_k)$ рассчитывается через функции чувствительности целевого функционала к вариациям координат точек размещения наблюдений, а параметр τ оценивается из условий его оптимума.

6. Заключение

В алгоритмах решения оптимизационных задач мониторинга и планирования заложены возможности расчета различных функций чувствительности и способы введения обратных связей по управлению антропогенными факторами и размещению наблюдений. В этом состоит принципиальное отличие технологии моделирования для задач мониторинга экологии устойчивого развития от традиционных методов прямого моделирования. При наличии такого конструктивного аппарата исследователь перестает быть просто наблюдателем и регистратором происходящих в природной среде изменений. Он получает возможность активно искать способы обеспечения климато-экологической стабильности при планировании и реализации хозяйственной деятельности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 94-05-16105.

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 314 с.
2. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
3. Пененко В.В., Скубневская Г.И. // Успехи химии. 1990. Т. 59. Вып. 11. С. 1757–1776.
4. Пененко В.В. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. Вып. 6. С. 917–941.
5. Penenko V.V., Tsvetova E.A. // Bull. NCC, Series: Num. Model. in Atmosph. Ocean and Environment Studies. 1995. N 2. P. 53–74.
6. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992. 325 с.
7. Пененко В.В., Алоян А.Е. // Известия АН. Сер. ФАО. 1995. Т. 31. N 3. С. 372–384.
8. Penenko V.V. // Bull/NCC, Series: Num. Model in Atmosph. Ocean and Environmental Studies. 1996. N 4. P. 32–51.

9. Е р м а к о в С . М . , Ж и г л я в с к и й А . А . Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 320 с.

Вычислительный центр СО РАН,
Новосибирск

Поступила в редакцию
22 января 1997 г.

V . V . P e n e n k o . **Mathematical Models for the Problems of Environmental Design and Air Quality Control.**

The problems of arrangement and construction of mathematical models for climatic and ecological monitoring, forecasting, control of the atmosphere quality and design of observations are discussed. Variational principle is the base for the realization of interconnections between models, measurements, variations of the model parameters, and cost functionals.