

В.А. Яшин, А.И. Бородулин, В.В. Марченко, А.Н. Шабанов

О возможной фрактальной структуре тензора коэффициентов турбулентной диффузии в приземном слое атмосферы

НИИ аэриологии ГНЦ ВБ «Вектор», пос. Кольцово, Новосибирская обл.

Поступила в редакцию 27.11.2001 г.

Рассматриваются данные экспериментального определения компонент тензора коэффициентов турбулентной диффузии, полученные в приземном слое атмосферы за 4-суточный период наблюдений. Помимо четко проявляющегося суточного, почти периодического изменения компонент обнаружены их значительные колебания. Анализ данных показал, что эти колебания не могут быть объяснены наличием ошибок измерений. Предпринята попытка объяснить такое поведение тензора коэффициентов турбулентной диффузии фрактальной структурой наблюдающегося процесса.

Математическое моделирование распространения аэрозольных и газовых загрязнений атмосферы широко применяется для решения различных прикладных задач. При эйлеровом подходе к описанию процесса турбулентной диффузии наиболее плодотворным оказывается использование полуэмпирического уравнения [5]:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{C}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} = \bar{Q}, \quad (1)$$

где \bar{C} и \bar{U}_i – математические ожидания концентрации примеси и компонент скорости ветра; K_{ij} – компоненты тензора коэффициентов турбулентной диффузии; \bar{Q} – член, описывающий источник примеси; $x = x_1$ и $y = x_2$ соответствуют горизонтальным координатам, а $z = x_3$ – вертикальной; t – время. Черта сверху обозначает усреднение по статистическому ансамблю. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Одной из основных проблем, возникающих при обращении к решению полуэмпирического уравнения, является корректное задание тензора коэффициентов турбулентной диффузии. В [3] был предложен рекурсивный метод замыкания полуэмпирического уравнения, который в его первом приближении позволил получить аналитические выражения для определения K_{ij} , зависящие от рядов мгновенных значений компонент скорости ветра:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^\tau [R_{ij}(\xi) + R_{ji}(\xi)] d\xi; \quad (2)$$

$$R_{ij}(\xi) = \frac{1}{T - \tau} \int_\tau^T U'_i(t) U'_j(t - \xi) dt,$$

где U'_i – мгновенное значение пульсации i -й компоненты скорости ветра; τ – характерный временной масштаб пульсаций компонент скорости ветра (эйлеров временной масштаб); T – период времени, на котором произво-

дится усреднение мгновенных значений компонент скорости ветра и вычисление средних значений \bar{U}_i , а также пульсаций U'_i . Соотношение (2) открывает возможность объективного задания коэффициентов турбулентной диффузии по экспериментально полученным рядам мгновенных значений компонент скорости ветра.

В работах [1, 2] описаны результаты определения с помощью данного метода компонент тензора K_{ij} в приземном слое атмосферы. Для получения рядов мгновенных значений компонент скорости ветра нами использовался трехкоординатный акустический анемометр [1, 2]. Результаты измерений, проведенные в приземном слое атмосферы, позволили впервые подтвердить гипотезу о пропорциональности K_{ij} соответствующим компонентам тензора вязких напряжений Рейнольдса. Ранее эта гипотеза была обоснована лишь для турбулентных пограничных слоев, смоделированных в аэродинамических трубах [7]. На рис. 1 дан пример зависимости K_{xx} от времени для эксперимента, проводившегося в течение 4 сут, на границе вода–берег в районе пос. Завьялово, расположенного на берегу водохранилища Обской ГЭС. Высота измерения составляла 1,5 м от подстилающей поверхности.

График построен на основании 576 отсчетов, полученных для $T = 10$ мин. Частота измерения мгновенных значений скорости ветра в пределах каждой 10-минутной выборки составляла 0,5 Гц. Определение характерного временного масштаба τ производилось оценкой момента первого обнуления автокорреляционной функции пульсаций горизонтальной компоненты скорости ветра. Такая процедура была обоснована в [3]. В рассматриваемом примере было установлено, что $\tau \approx 40$ –50 с. Приведенные значения K_{xx} соответствуют системе координат, в которой горизонтальная ось x расположена в направлении вектора среднего значения скорости ветра. Помимо явно проявляющегося на рис. 1 суточного, почти периодического изменения K_{xx} видны значительные колебания мгновенных значений x компоненты тензора. Анализ данных показал, что эти колебания не могут быть объяснены наличием ошибок измерений, порядок величины которых составляет не более 15–20%.

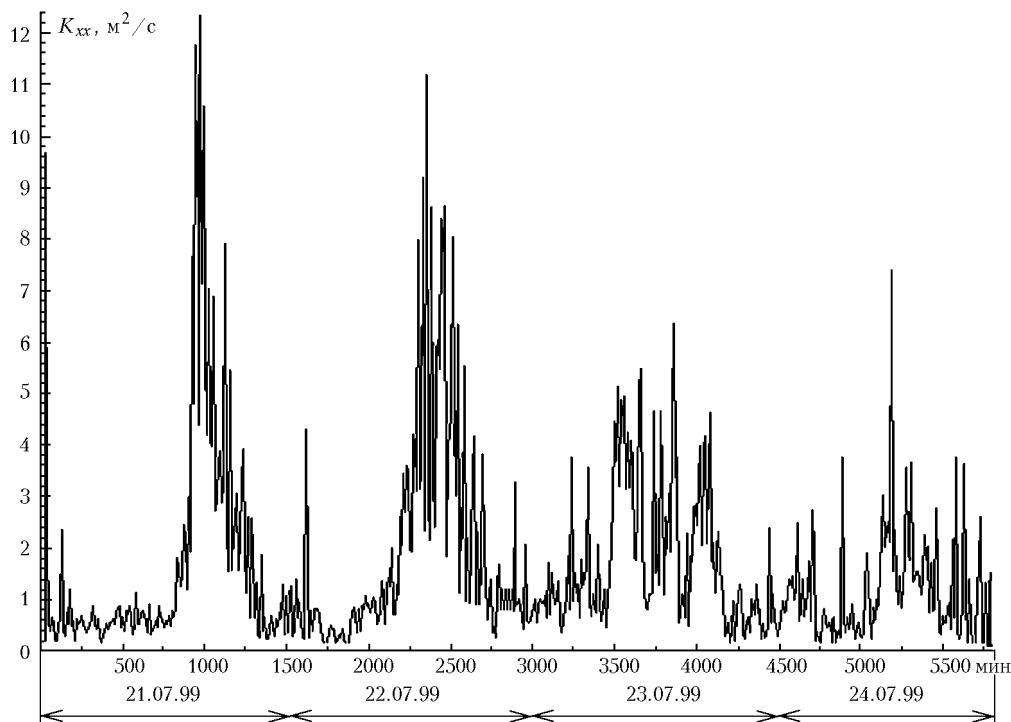


Рис. 1. Зависимость K_{xx} от времени

Нами предпринята попытка объяснить такое поведение тензора коэффициентов турбулентной диффузии фрактальной структурой наблюдающегося процесса [8]. Ограниченный объем публикации не дает возможности даже кратко изложить основные понятия современной теории динамического хаоса. Поэтому дадим определения лишь тех характеристик, которые рассматриваются в данной статье.

В общем случае к приведенному примеру поведения K_{xx} нужно относиться как к единственной реализации некоторого статистического ансамбля. Мы не знаем, от какого количества скрытых параметров (обобщенных координат) зависит вся совокупность членов статистического ансамбля K_{xx} , т.е. размерность фазового пространства не известна. Однако можно предположить, что ансамбль реализаций K_{ij} будет представлен континуальным количеством точек, распределенных в фазовом пространстве. С течением времени плотность распределения фазовых точек будет подвержена случайным колебаниям. Статистические характеристики этого процесса оценивают степень динамического хаоса в системе.

В [12] впервые был введен новый образ динамического хаоса – «странный» аттрактор. Данное определение подчеркивает два его необычных свойства: дробная (фрактальная) размерность фазового пространства динамической системы и свойство выступать в качестве притягивающей области для траекторий из соседних областей фазового пространства. При этом все траектории внутри «странного» аттрактора динамически неустойчивы, что выражается в экспоненциальной расходимости близких в начальный момент траекторий. Его размерность является важнейшей характеристикой фрактальных объектов. В общем случае фрактальная размерность определяет количество информации, необходимое для задания координат точки, принадлежащей аттрактору.

Ниже будем рассматривать корреляционную размерность аттрактора D [10]:

$$D = \lim_{E \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^{M(E)} p_i^2 \right) / \ln E \right], \quad (3)$$

где $M(E)$ – минимальное число n -мерных кубиков с ребром E , необходимых для покрытия аттрактора; p_i^2 – вероятность того, что пара точек аттрактора принадлежит i -му кубику. Показано [9], что D можно рассматривать как характеристику плотности точек статистического ансамбля фазовых траекторий в фазовом пространстве.

Другой важной характеристикой аттрактора является энтропия (это понятие введено Колмогоровым [4]). Ниже будем использовать корреляционную энтропию. Для ее построения произведем разбиение фазового пространства, включающего в себя аттрактор, на $M(E)$ непересекающихся n -мерных кубиков с ребром E . Проведем m последовательных измерений, следя за фазовой траекторией и через равные промежутки времени Δ отмечая кубики s_i , в которых побывала траектория. При каждом независимом испытании получим некоторую реализацию в виде последовательных кубиков s_1, \dots, s_m . Если нам известны вероятности $P(s_1, \dots, s_m)$ появления всех возможных последовательностей кубиков, то корреляционная энтропия K определяется следующим образом:

$$K = - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{E \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[- \frac{1}{m\Delta} \ln \sum_{s_1, \dots, s_m} P^2(s_1, \dots, s_m) \right]. \quad (4)$$

Характерное время, на которое может быть предсказано поведение системы, обратно пропорционально энтропии процесса. Если энтропия достигает нуля, то система становится полностью предсказуемой. Для истинно случайных процессов энтропия бесконечно велика. При наличии странного аттрактора энтропия положительна и имеет конечное значение. Таким образом, чи-

словое значение энтропии является количественной характеристикой степени хаотичности системы.

Из приведенных определений не следует, что имеющиеся в нашем распоряжении временные ряды K_{ij} необходимы и достаточны для определения характеристик аттракторов. Однако в [13] было показано, что почти для всех гладких динамических систем по одной реализации динамической переменной можно сконструировать новый аттрактор, свойства которого будут такими же, как и у исходного аттрактора. Численный алгоритм, построенный на основании результатов указанных работ, был реализован Сычевым [6] в виде программы FRACTAN 3.0. Программа работает с временными рядами длительностью от 512 до 16384 отсчетов, анализирует фазовое пространство с размерностью от 1 до 16. Выражаем автору программы благодарность за возможность ее использования для анализа экспериментальных данных.

Алгоритм вычисления корреляционной размерности аттрактора для пространства с размерностью n построен на следующих принципах [11]. Рассматривается соотношение, показывающее относительное число пар точек аттрактора, находящихся на расстоянии не больше r :

$$C(r) = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \Theta[r - \rho(x_i, x_j)], \quad (5)$$

где $\Theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$; $\rho(x_i, x_j)$ – расстояние между точками x_i и x_j в n -мерном фазовом пространстве; m – число точек x_i на аттракторе. Если $C(r) \approx r^D$, то D оценивает корреляционную размерность аттрактора. При неизвестной размерности фазового пространства производится расчеты с перебором $n = 1, 2, 3, \dots$. При этом корреляционная размерность аттрактора как функция от параметра r сначала возрастает. Затем большое число кривых обычно выходит на некоторый приблизительно постоянный уровень, который и принимается за искомое значение D . Оценкой размерности фазового пространства системы в данном случае является $n \leq 2D + 1$.

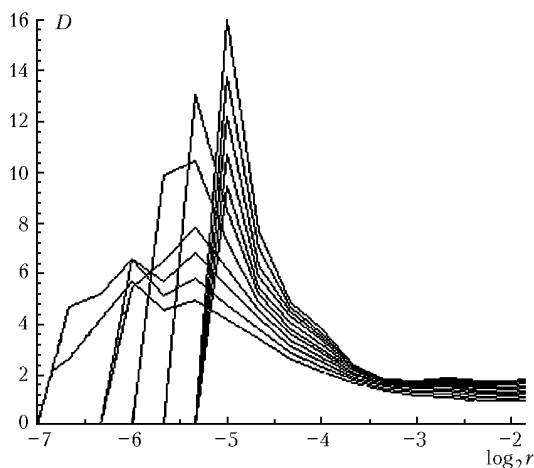


Рис. 2. Корреляционная размерность ряда значений K_{xx}

На рис. 2 приведен пример расчета корреляционной размерности D ряда значений K_{xx} для эксперимента 21–24 июля 1999 г. Различные кривые соответствуют рассматривавшимся размерностям фазового пространства от 1 до 12.

Приведенные на рис. 2 результаты показывают, что приблизительно постоянный уровень кривых наблюдается при корреляционной размерности «странного» аттрактора $D \approx 1,5$. Это соответствует оценке размерности фазового пространства рассматриваемой динамической системы $n \approx 4$.

Определение корреляционной энтропии аттрактора K производится похожим образом [10]. В этом случае вычисляют (5) в зависимости от n и предполагают, что $C(r, n) \approx r^D \exp(-nK)$. Откуда следует выражение

$$K \approx \ln \frac{C(r, n)}{C(r, n+1)}. \quad (6)$$

На рис. 3 приведен пример расчета корреляционной энтропии K ряда значений K_{xx} для эксперимента 21–24 июля 1999 г. Кривые соответствуют рассматривавшимся размерностям фазового пространства от 1 до 12.

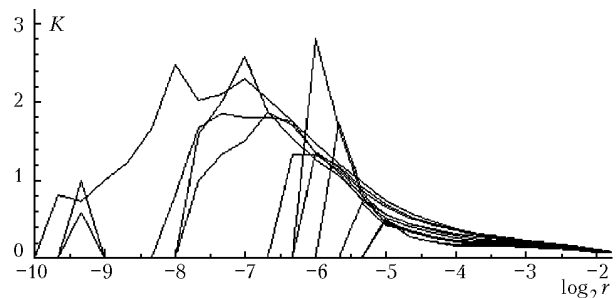


Рис. 3. Корреляционная энтропия ряда значений K_{xx}

Из рис. 3 видно, что $K \approx 0,3$. Это дает основание предполагать наличие в рассматриваемой системе «странного» аттрактора, но с небольшой степенью хаоса. В таблице обобщены оценки размерностей фазового пространства, корреляционной размерности странного аттрактора и его корреляционной энтропии для K_{xx} , K_{yy} и K_{zz} в эксперименте 21–24 июля 1999 г.

| Компонент | n | D | K |
|-----------|-----|-----|-----|
| K_{xx} | 4 | 1,5 | 0,3 |
| K_{yy} | 4,6 | 1,8 | 0,3 |
| K_{zz} | 3 | 1 | 0,2 |

Полученные результаты позволяют утверждать, что компоненты тензора коэффициентов турбулентной диффузии в приземном слое атмосферы, вероятно, имеют фрактальную структуру. В частности:

- размерности фазовых пространств компонент тензора коэффициентов турбулентной диффузии изменяются от 3 до 4,6;
- корреляционные размерности «странных» аттракторов изменяются от 1 до 1,5;
- корреляционные энтропии «странных» аттракторов имеют порядок 0,2–0,3, т.е. обнаруженная в «странных» аттракторах степень хаоса невелика.

Таким образом, вполне обоснованными представляются дальнейшее исследование фрактальной структуры компонент тензора коэффициентов турбулентной диффузии в приземном слое атмосферы, а также попытки выяснения ее физической природы. Например, с учетом приведенных в таблице данных можно предположить, что в качестве нулевой гипотезы о размерности фазового пространства можно принять значение $n = 5$. В качестве метода поиска скрытых параметров можно применить факторный анализ экспериментальных данных.

1. *Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М.* Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1992. 124 с.
2. *Бородулин А.И.* Измерение тензора коэффициентов турбулентной диффузии в атмосфере и его некоторые свойства // *Оптика атмосф. и океана*. 1996. Т. 9. № 6. С. 832–836.
3. *Галкин Л.М.* Некоторые аспекты диффузии в неоднородных средах // *Самоочищение и диффузия внутренних водоемов*. Новосибирск: Наука, 1982. С. 27–31.
4. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов // *Докл. АН СССР*. 1959. Т. 119. С. 861–864.
5. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 720 с.
6. *Сычев В.В.* Вычисление стохастических характеристик физиологических данных: Дис. ... магистра наук. Пущино на Оке: Ин-т математических проблем биологии, 1999.
7. *Rodi В.* Модели турбулентности окружающей среды // *Методы расчета турбулентных течений*. М.: Мир, 1984. С. 227–321.
8. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 640 с.
9. *Grassberger P.* Generalized dimensions of strange attractors // *Phys. Lett. A*. 1983. V. 97. P. 227–231.
10. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal // *Phys. Rev. A*. 1983. V. 28. P. 2591–2593.
11. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 50. P. 346–349.
12. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. V. 20. P. 167–175.
13. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence: Lecture Notes in Mathematics* / Ed. by D.A. Rand & L.S. Young. Heidelberg: Springer-Verlag, 1981. P. 366–381.

V.A. Yashin, A.I. Borodulin, V.V. Marchenko, A.N. Shabanov. **On possible fractal structure of the tensor of turbulent diffusion coefficients in the atmosphere boundary layer.**

The results of experimental determination of the tensor components of the turbulent diffusion coefficients obtained in the atmosphere boundary layer during a four-day observational period are considered. Besides a clearly pronounced diurnal, almost repetitive, variations of its components, considerable oscillations, which can not be explained by the presence of measurement errors, are revealed. An attempt to explain such a behavior of the tensor components of the turbulent diffusion coefficients by fractal structure of the observed is made in this work.