

П.А. Бакут, А.А. Пахомов, А.Д. Ряхин

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЧАСТЬ II. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрены достаточные условия однозначного решения фазовой проблемы. Проведено обобщение уравнений Гильберта на двумерный случай, показана возможность аналитического решения задачи в двумерном дискретном случае и рассмотрена однозначность решения в двумерном непрерывном случае.

Из общего анализа однозначности решения фазовой проблемы (Часть I) следует, что она решается неоднозначно, если неизвестное восстанавливаемое распределение (изображение) представимо (одномерный случай) или изначально является (двумерный случай) сверткой двух или более изображений. Для обеспечения однозначности восстановления в этой ситуации необходимо привлечение дополнительной информации, в качестве которой наиболее естественно использовать предварительную экспоненциальную фильтрацию изображения. Экспонента «проникает» под интеграл свертки и экспоненциально отфильтрованная свертка равна свертке экспоненциально отфильтрованных изображений. Экспоненциальная фильтрация необходима также при построении аналитических решений с помощью преобразований Гильберта, поскольку «сдвигает» полосы корней в комплексной плоскости и дает возможность установить однозначную связь модуля и фазы.

### Достаточные условия однозначного решения фазовой проблемы

Экспоненциально отфильтрованным аналогом (ЭА) изображения  $J(t)$  будем называть изображение  $J_1(t)$  вида

$$J_1(t) = J(t) \exp(-\gamma t), \quad (1)$$

где  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  — вектор фильтрации.

Рассмотрим на простейшем примере возможности экспоненциальной фильтрации. В одномерном случае Фурье образ  $f_1(x)$  ЭА изображения имеет вид

$$f_1(x) = \hat{F}\{J_1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} J(t) e^{-\gamma t} e^{ixt} dt = A_1(x) e^{i\varphi_1(x)}, \quad (2)$$

где все обозначения аналогичны (1) (часть I). При малых  $\gamma < \frac{1}{S}$  разложим экспоненту в ряд и ограничимся первым порядком малости:

$$f_1(x) \approx f(x) + i\gamma \frac{df(x)}{dx},$$

где  $f(x)$  — Фурье образ изображения  $J(t)$ . Откуда, приравнявая модули, получаем приблизительное соотношение:

$$A_1(x) \approx A(x) \left\{ 1 - \gamma \frac{d\varphi(x)}{dx} \right\}. \quad (3)$$

Таким образом, зная два модуля спектра  $A_1(x)$  и  $A(x)$  и коэффициент фильтрации  $\gamma$  можно приблизительно восстановить производную фазы  $\varphi'(x)$ , а следовательно, и саму фазу ( $\varphi(0) = 0$ ).

Аналогичное рассмотрение двумерного случая не представляет труда. Вводя два ЭА двумерного изображения как

$$J_2(t_1, t_2) = J(t_1, t_2) \exp(-\gamma_1 t_1), \quad J_3(t_1, t_2) = J(t_1, t_2) \exp(-\gamma_2 t_2),$$

осуществляя их Фурье преобразование, разлагая экспоненту в ряд  $\left(\gamma_1, \gamma_2 < \frac{1}{S}\right)$  и приравнивая модули, приближенно получаем

$$\begin{aligned} A_2(x_1, x_2) &\approx A(x_1, x_2) \left\{ 1 - \gamma_1 \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right\}; \\ A_3(x_1, x_2) &\approx A(x_1, x_2) \left\{ 1 - \gamma_2 \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\}; \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, зная три модуля Фурье спектра  $A_3, A_2, A$  и  $\gamma_1, \gamma_2$ , восстанавливаем две частные производные фазы  $\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}$ , интегрируя и сшивая которые, приближенно находим  $\varphi(x_1, x_2)$ . Обобщение этих результатов на случай произвольных векторов фильтрации сформулируем в виде утверждений.

**Утверждение 1.** Пусть  $J(t)$  — финитная с областью  $S$  функция. Тогда  $J(t)$  однозначно определяется модулем ее Фурье спектра и модулем спектра ее ЭА [1].

**Утверждение 2.** Пусть  $J(t)$  — финитная с областью  $S$  функция. Тогда  $J(t)$  однозначно определяется модулем Фурье спектра и модулями Фурье спектра двух ее ЭА, векторы фильтрации которых ортогональны.

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1 и основано на факторизации спектра [1] по каждой из переменных.

Более подробный анализ показывает, что условие ортогональности векторов фильтрации необязательно.

**Утверждение 3.** Пусть  $J(t)$  — финитная с областью  $S$  функция. Тогда  $J(t)$  однозначно определяется модулем Фурье спектра и модулями Фурье спектров двух ее ЭА, векторы фильтрации которых неколлинеарны [2].

Стоит отметить, что термин экспоненциальная фильтрация можно и не вводить, поскольку определение Фурье образа ЭА изображения (1) полностью совпадает с обобщенным определением Лапласа образа  $L(p)$  [3] при  $p = -\gamma + ix$ . понятием обобщенного Фурье преобразования  $f(w)$  при  $w = x + iy$ . (Часть I), а также определением целой функции экспоненциального типа [4].

Однако многочисленность этих названий приводит к путанице, поэтому будем придерживаться введенной терминологии.

Как показано в Части I, двумерный дискретный случай фазовой проблемы может быть сведен к одномерному путем построчного или постолбцового вытягивания изображения. Поэтому если отфильтровать двумерное изображение с вектором фильтрации, который при вытягивании перейдет в квазинепрерывную одномерную фильтрацию, то попадаем в условие утверждения 1.

Рассмотрим метод построчного вытягивания без нулей для двумерного ЭА, изображение вида  $J_{n_1, n_2} \exp(-\gamma_1 n_1 - \gamma_2 n_2)$ .

Поставим в соответствие одномерный ЭА изображения  $I_n \exp(-\gamma_0 n)$  по правилу:

$$J_{n_1, n_2} \exp(-\gamma_1 n_1 - \gamma_2 n_2) = I_n \exp(-\gamma_0 n) \text{ при } n = n_1 + n_2 (N_1 + 1).$$

Приравнивая показатели экспоненты и учитывая правило вытягивания, находим:  $\gamma_1 = \gamma_0, \gamma_2 = \gamma_0(N_1 + 1)$ .

Таким образом, вектор двумерной фильтрации, переходящей в квазинепрерывную одномерную, имеет вид

$$\gamma = \{\gamma_0, (N_1 + 1)\gamma_0\}. \quad (5)$$

**Утверждение 4.** Двумерное дискретное изображение однозначно определяется модулем Фурье спектра и модулем Фурье спектра его ЭА со специально выбранным вектором фильтрации  $\gamma$  вида (5) ( $\gamma_0$  — произвольный).

### Уравнения Гильберта

Аналитическая связь модуля и фазы в одномерном непрерывном случае описывается так называемыми обобщенными преобразованиями Гильберта [5], которые можно получить, применив формулу Коши с контуром интегрирования рис. 1, а к функции  $\frac{\ln f(w)}{w}$ .

Поскольку  $f(w)$  может иметь нули в верхней полуплоскости, то  $\ln f(w)$  в этом случае не является аналитической функцией и применение формулы Коши неправомерно. Однако  $f(w)$  можно «исправить», чтобы ее модуль на действительной оси ( $w = x$ ) не изменился и  $f(w) \neq 0$  при  $y > 0$ , следующим образом:

$$f'(\omega) = f(\omega) \prod_k \frac{\omega - \omega_k^*}{\omega - \omega_k},$$

где  $\omega_k$  — корни уравнения  $f(\omega) = 0$  в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ), а  $f'(\omega)$  — новая функция, удовлетворяющая условиям  $|f'(x)| = |f(x)|$  (так  $\left| \frac{x - \omega_k^*}{x - \omega_k} \right| = 1$ ) и  $f'(\omega) \neq 0$  при  $y > 0$ .

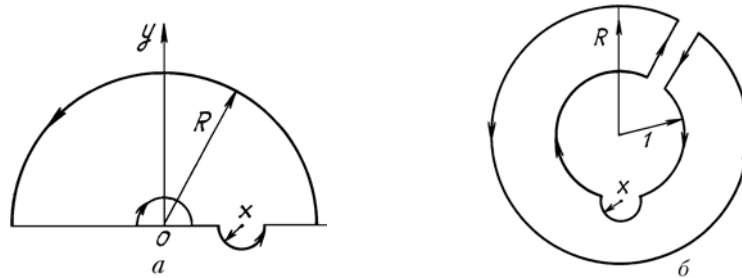


Рис. 1. Контур интегрирования для вывода преобразований Гильберта в непрерывном случае (а), в дискретном случае (б)

В результате получаем:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln A(\xi)}{\xi - x} d\xi - \sum_k \arg \frac{x - \omega_k^*}{x - \omega_k}; \quad (6)$$

$$\ln A(x) = \frac{x}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi(\xi - x)} + \frac{x}{\pi} \sum_k \arg v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\xi - \omega_k^*}{\xi - \omega_k} \right) \frac{d\xi}{\xi(\xi - x)} \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) получили название обобщенных преобразований Гильберта, связывающих модуль и фазу Фурье спектра финитной функции. Выражение (6) обычно называют полной фазой, а первое и второе ее слагаемые, соответственно минимальной фазой и фазой Бляшке. При этом любое из слагаемых, входящих в фазу Бляшке, может меняться на обратное:  $\frac{x - \omega_k^*}{x - \omega_k} \rightarrow \frac{x - \omega_k}{x - \omega_k^*}$ , что соответствует переброске корня из нижней полуплоскости в верхнюю (модуль спектра не меняется). Это приводит к общему числу решений фазовой проблемы  $\sim 2^{N-1}$ , где  $N$  — число корней  $f(\omega)$ .

Учет специфики дискретного случая означает переход к рассмотрению  $z$ -образов изображения. Применение формулы Коши к функции  $\frac{\ln R_j(z)}{z}$  в предположении отсутствия нулей в верхней полуплоскости  $\omega$ -плоскости (для  $z$ -плоскости это означает отсутствие нулей при  $|z| \leq 1$ ) с контуром (рис. 1, б) приводит к результату [6]:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \ln A(\xi) \cot \frac{\xi - x}{2} d\xi; \quad (8)$$

$$\ln A(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \left\{ \cot \frac{\xi - x}{2} - \cot \frac{\xi}{2} \right\} d\xi. \quad (9)$$

Вид аналогов фаз Бляшке в дискретном случае не представляет интереса, поскольку неоднозначность по-прежнему сохраняется. Связь модуля и фазы становится однозначной и аналитической, если все корни  $f(\omega)$  лежат либо в одной из полуплоскостей (верхней  $y > 0$  или нижней  $y < 0$ ), либо на действительной оси ( $y = 0$ ).

Аналогично в дискретном случае все корни  $R_j(z)$  должны лежать либо в круге  $|z| \leq 1$ , либо в  $|z| \geq 1$ , либо на окружности  $|z| = 1$ .

Анализ поведения корней в дискретном случае показывает, что в  $\omega$ -плоскости корни расположе-

ны в полосе конечной ширины, охватывающей действительную ось. Доказательство этого факта вытекает из следующего утверждения [7, 8].

Утверждение 5. Конечная последовательность вида  $P(l) = \sum_{n=0}^N a_n l^n$  отлична от нуля при  $|l| \leq \left(1 + \frac{\max_{n \geq k+1} |a_n|}{|a_k|}\right)^{-1}$ , где  $a_k$  — первый отличный от нуля элемент из  $\{a_n\}$ .

**Следствие.** Для дискретного изображения  $J_n$  корни  $\{w_k\}$  уравнения  $f(w) = 0$  лежат в полосе конечной ширины, параллельной действительной оси  $x$ . При  $J_0, J_N \neq 0$  уравнение полосы задается неравенствами

$$-\beta_0 \leq y \leq \alpha_0, \forall x; \alpha_0 = \ln \left\{1 + \frac{J_{\max}}{J_0}\right\}, \beta_0 = \ln \left\{1 + \frac{J_{\max}}{J_N}\right\}.$$

В  $z$ -плоскости корни  $\left(1 + \frac{J_{\max}}{J_0}\right)^{-1} \leq |z| \leq \left(1 + \frac{J_{\max}}{J_N}\right)$  расположены в кольце, охватывающем единичную окружность.

Данное следствие открывает путь аналитического решения фазовой проблемы через минимально-фазовые соотношения.

Рассмотрим ЭА изображения  $J'_n = J_n \exp(-\alpha_0 n)$ . Тогда

$$f(w) = \sum_{n=0}^N J_n e^{-\alpha_0 n} e^{i(x+iy)n} = \sum_{n=0}^N J_n e^{-y'n} e^{ixn},$$

где  $y' = y + \alpha_0$ . При этом у  $f'(w)$  действительная ось  $x$  «поднимется вверх» на величину  $\alpha_0$  (корни останутся внизу). Это означает, что при  $y' > 0$ ,  $f'(w) = 0$ , т.е. связь модуля и фазы описывается либо (8), (9), либо первыми слагаемыми (6), (7).

Естественно, что для построения такого решения необходимо знание априорно неизвестного коэффициента  $\alpha_0$ , однако для типичных малоcontrastных изображений  $\left(\frac{J_{\max}}{J_{\min}} \sim 100\right)$  его всегда можно взять несколько больше истинного.

Обобщение этого результата на двумерный случай приводит к соответствующему обобщению преобразований Гильберта. В двумерном непрерывном случае необходимо сначала применить формулу Коши с контуром (рис. 1, а) к функции  $\frac{\ln f(w_1, 0)}{w_1}$ , а затем к  $\frac{\ln f(x_1, w_2)}{w_2}$  или сначала к  $\frac{\ln f(0, w_2)}{w_2}$ , а затем к  $\frac{\ln f(w_1, x_2)}{w_1}$ . Для минимально-фазового случая получаем следующую связь модуля и фазы:

$$\varphi(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln A(\xi_1, 0) d\xi_1}{\xi_1(\xi_1 - x_1)} - \frac{x_2}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln A(x_1, x_2) d\xi_2}{\xi_2(\xi_2 - x_2)}; \quad (10)$$

$$\ln A(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi_1, 0) d\xi_1}{\xi_1(\xi_1 - x_1)} + \frac{x_2}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x_1, \xi_2) d\xi_2}{\xi_2(\xi_2 - x_2)},$$

$$\varphi(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln A(\xi_2, 0) d\xi_2}{\xi_2(\xi_2 - x_2)} - \frac{x_1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln A(x_1, \xi_2) d\xi_1}{\xi_1(\xi_1 - x_1)};$$

$$\ln A(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(0, \xi_2) d\xi_2}{\xi_2(\xi_2 - x_2)} + \frac{x_1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi_1, x_2) d\xi_1}{\xi_1(\xi_1 - x_1)}. \quad (11)$$

Как видно из этих уравнений, двумерные преобразования Гильберта являются, по сути дела, последовательностью одномерных преобразований Гильберта, а различие между (10) и (11) сводится к различию последовательности применений одномерных Гильберт-преобразований. Поскольку конечное значение фазы или модуля не зависит от пути, правые части (10) и (11) при минимально-фазовых условиях равны.

Дискретные двумерные преобразования Гильберта в минимальнофазовом случае аналогично выносятся при применении формулы Коши с контуром (рис. 1, б) сначала к  $\ln \frac{R_J(z_1, 1)}{z_1}$ , а затем к

$$\ln \frac{R_J(e^{ix_1}, z_2)}{z_2} \text{ или наоборот.}$$

Дискретный аналог (10) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) = & -\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \ln A(\xi, 0) \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\xi_1 - x_1}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\xi_1}{2} \right\} d\xi_1 - \\ & -\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \ln A(x_1, \xi_2) \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\xi_2 - x_2}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\xi_2}{2} \right\} d\xi_2 ; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\ln A(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi_1, 0) \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\xi_1 - x_1}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\xi_1}{2} \right\} d\xi_1 + \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x_1, \xi_2) \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\xi_2 - x_2}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\xi_2}{2} \right\} d\xi_2 .$$

Попробуем теперь выбрать конечные значения коэффициентов фильтрации ( $\gamma_1, \gamma_2$ ) ЭА изображения вида

$$J'_{n_1, n_2} = J_{n_1, n_2} \exp(-\gamma_1 n_1 - \gamma_2 n_2) ,$$

чтобы одновременно выполнялись минимально-фазовые условия в двумерном случае:  $f(\omega_1, 0) \neq 0$  и  $f(x_1, \omega_2) \neq 0$  ( $R_J(z_1, 1) \neq 0$ ,  $R_J(e^{ix_1}, z_2) \neq 0$ ), т. е. перенесем утверждение 5 и его следствие на двумерный случай. Детальный теоретический анализ условий совместимости системы неравенств приводит к неравенству:

$$\hat{n}_1 \hat{n}_2 \ln B_1 \ln B_2 \leq 1, \quad (13)$$

где  $B_1 = \max_{n_2, n_1 > 0} \{J_{n_1 n_2}\} / J_{0, n_2}$ ;  $B_2 = \max_{n_1, n_2 > 0} \{J_{n_1 n_2}\} / J_{n_1, 0}$ ,  $J_{0, n_2}$  и  $J_{n_1, 0}$  — либо первые отличные от нуля, либо максимальные элементы изображения соответственно в первом столбце и первой строке изображения;  $\hat{n}_1, \hat{n}_2$  — координаты этих элементов. Неравенство (13) выполняется безусловно в следующих частных случаях:

1.  $\hat{n}_1 = 0$  (следовательно,  $\hat{n}_2 = 0$ ) и наоборот.

Изображение имеет угловую точку  $J_{0,0} \neq 0$ . При линейной замене переменных к этому условию сводятся также случаи  $J_{0,N} \neq 0$ ,  $J_{N,0} \neq 0$  или  $J_{N,N} \neq 0$ . Коэффициенты фильтрации выбираются из условия:

$$\gamma_1 \geq \ln \{1 + \max_{n_2, n_1 > 0} (J_{n_1 n_2}) / J_{0,0}\}, \quad \gamma_2 \geq \ln \{1 + \max_{n_1, n_2 > 0} (J_{n_1 n_2}) / J_{0,0}\}.$$

2. Либо  $B_1 < 1$ , либо  $B_2 < 0$ , но не одновременно.

Это соответствует наличию на краю изображения яркой точки или при концентрации энергии на краях.

3.  $B_1 \approx B_2 \approx 1$ . Выполняется для очень мало контрастных изображений или изображений, имеющих постоянную интенсивность.

Таким образом, в двумерном дискретном случае (в отличие от одномерного) применить двумерные преобразования Гильберта в сочетании с экспоненциальной фильтрацией напрямую не удастся, что заставляет использовать метод сведения двумерного случая к одномерному. Комбинируя утверждения 4 и 5, получаем для  $\gamma_0$  из утверждения 4 следующее неравенство:

$$\gamma_0 \geq \ln \left\{ 1 + \frac{\max(J_{n_1, n_2})}{J_{n_1, 0}} \right\}, \quad (14)$$

где  $J_{n_1, 0}$  — первый отличный от нуля элемент в нулевой строке изображения.

**Утверждение 6.** Пусть  $J(\mathbf{n})\exp(-\gamma\mathbf{n})$  — ЭА дискретного изображения, причем  $\gamma$  определяется из (3), а  $\gamma_0$  удовлетворяет (14). Тогда модуль и фаза Фурье спектра построчно-вытянутого одномерного аналога этого изображения однозначно связаны между собой уравнениями (8) и (9).

При специальном выборе не только направления, но и величины вектора фильтрации  $\gamma$  и использовании метода сведения двумерного дискретного случая к одномерному можно построить точное аналитическое решение фазовой проблемы и в двумерном случае.

Рассмотрим практическую сторону такого решения.

Одномерный аналог ЭА двумерного изображения имеет вид  $I_n \exp(-\gamma_0 n)$ ,  $n = n_1 + n_2(N_1 + 1)$ .

Подставляя сюда величину из (14) и полагая, например,  $\frac{J_{\max}}{J_{\min}} \sim 100$ , получаем  $\gamma_0 \sim 10$ . Если массивы

изображений имеют размерность  $64 \times 64$ , то конечное значение  $n = 4096$  и последний элемент ЭА изображения имеет вид  $I_{4096} \cdot 10^{-4096}$ , в то время как пределы точности современных вычислительных машин  $10^{70} - 10^{300}$ . Следовательно, и этот метод имеет ограниченное применение для малоразмерных изображений, на которых укладывается  $\sim 10 \times 10$  элементов разрешения.

Полученные обобщенные двумерные преобразования Гильберта позволяют теоретически рассмотреть вопрос однозначности фазовой проблемы в двумерном непрерывном случае. Остановимся подробнее на этом вопросе.

### Качественный анализ однозначности в двумерном непрерывном случае

При отказе от минимально-фазовых ограничений первые уравнения (10) и (11) будут иметь следующий вид:

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_{\min}(x_1, 0) - \arg \sum_k \frac{x_1 - w_{1k}^*}{x_1 - w_{1k}} + \varphi_{\min}(\hat{x}_1, x_2) - \arg \sum_l \frac{x_2 - w_{2l}^*(\hat{x}_1)}{x_2 - w_{2l}(\hat{x}_1)}, \quad (15)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_{\min}(0, x_2) - \arg \sum_m \frac{x_2 - w_{2m}^*}{x_2 - w_{2m}} + \varphi_{\min}(x_1, \hat{x}_2) - \arg \sum_n \frac{x_1 - w_{1n}^*(\hat{x}_2)}{x_1 - w_{1n}(\hat{x}_2)}, \quad (16)$$

где  $\{w_{1k}^*, \{w_{2l}^*(\hat{x}_1)\}, \{w_{2m}^*, \{w_{1n}^*(\hat{x}_2)\}$  соответственно корни уравнений  $f(w_1, 0) = 0$ ,  $f(\hat{x}_1, w_2) = 0$ ,  $f(0, w_2) = 0$ ,  $f(w_1, \hat{x}_2) = 0$ , а обозначение  $\hat{x}_i$  — означает, что соответствующая переменная фиксирована.

Как уже упоминалось, конечное значение фазы не должно зависеть от пути ее вычисления и (15) равно (16) (так называемое условие замкнутости).

Посторонние решения могут появиться только при перебросках корней, т. е. изменяются только вторые и четвертые слагаемые. При этом построения решения могут иметь ту же область  $S$ , что и истинные, т. к. квадрат модуля, а следовательно, автокорреляция, имеющая размеры  $2S$ , при этом не меняется (при условии положительности решений).

Допустим, что произошла переброска одного корня по линии  $x_2$  ( $x_1 = 0$ ) и изменилось второе слагаемое в (16) (корень  $w_{2m}^*$  заменится на  $w_{2m}$ ). Чтобы не нарушилось равенство (15) и (16), должно изменяться либо четвертое слагаемое из (16), либо переменные слагаемые из (15). Поскольку фазу в точке  $x_1, x_2$  с помощью данных уравнений можно рассчитать по любой ломаной линии, которых в непрерывном случае бесконечное множество, а конечное значение также фиксировано и равно сумме слагаемых по прямолинейным участкам ломаной, то приходим к выводу, что «локальная» переброска корней на любом отрезке ломаной должна сопровождаться «глобальной» переброской корней во всех остальных одномерных срезах для ее компенсации. Из самого принципа переброски корней следует, что изменения фазы  $\Delta\varphi$  при этом не могут быть бесконечно малыми, поскольку множество корней не является непрерывным и различно для каждого среза. Поэтому скомпенсировать локальный дискретный скачок фазы (т. е. не нарушить условие замкнутости) с помощью бесконечного или конечного числа других конечных скачков фазы практически невозможно.

Таким образом, построить в двумерном непрерывном случае постороннее решение можно только с помощью «строго согласованной» «глобальной» переброски областей или неких замкнутых множеств нулей в четырехмерном пространстве корней  $f(w_1, w_2) = 0$ . Очевидно, что это возможно только

при очень специфическом их расположении, например, [9], где в силу почти круговой симметрии изображения двумерный случай сведен к одномерному через функции Бесселя.

Правильность полученных двумерных уравнений Гильберта, а также наличие условия «замкнутости» косвенно подтверждается работами [10, 11], где для восстановления фазы использовался приближенный метод, позволяющий восстановить модули разностных фаз в ортогональных средах, и при переходе к самим фазам возникала неопределенность в знаке, которая устранялась перебором, использующим неизменность конечного значения фазы при различных путях прихода в эту точку. В результате в одномерном случае было получено множество решений, т. к. там условие «замкнутости» отсутствует, а в двумерном случае — единственное.

1. Walker J. R. //Opt. Act. 1981. V. 28. P. 735.
2. Бакут П. А., Пахомов А. А., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н. //Оптика и спектроскопия 1987. Т. 36. Вып. 4. С. 856.
3. Владимиров В. С. //Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука. 1979. С. 134.
4. Корн Г., Корн Т. //Справочник по математике. М.: Наука, 1984.
5. Перица Я. //Когерентность света, М.: Мир, 1974.
6. Бакут П. А., Пахомов А. А., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н. //Оптика и спектроскопия. 1988 Т. 64. Вып. 1. С. 165.
7. Курош А. Г. //Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
8. Аблеков Б. К., Авдеевский В. С., Бабаев Ю. И. и др. //ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 6. С. 1371.
9. Huiser A. M. J., van Toorn P. //Opt. Lett. 1980. V. 71. P. 1026.
10. Bates R. N. T., Garden K. L. //Optik. 1982. V. 61. P. 242.
11. Bates R. N. T., Garden K. L. //Optik. 1982. V. 62. P. 131.

Научно-производственное объединение  
«Астрофизика», Москва

Поступила в редакцию  
24 января 1992 г.

**P. A. Bakut, A. A. Pakhomov, A. D. Ryakhin. Method of Solution of the Phase Problem in Digital Image Processing. Part 2.**

Conditions sufficient for obtaining the unique solution of the phase problem are considered. The Gilbert equations are generalized for a two-dimensional case. A possibility of obtaining an analytical solution of the problem in a two-dimensional discrete case is shown. Unambiguity of the solution in a two-dimensional continuous case is analysed.