«Оптика атмосферы и океана», **13**, № 5 (2000)

УДК 551.521.32

С.Д. Творогов

Нелинейная оптика поля с большим моментом количества движения

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 20.04.2000 г.

Обсуждается одна из главных методических проблем нелинейной оптики поля с большим моментом количества движения – пространственная дисперсия магнитного момента единицы объема. Показано, что подобная структура появляется в обычном квантовом расчете как следствие именно большого момента количества движения у поля.

1. Плотность момента количества движения $\mathbf{m}$ электромагнитного поля пропорциональна интенсивности излучения I, и, если полагать, что момент поля создается только I, то, как показывают элементарные оценки, он окажется сопоставимым с моментом молекулы (т.е. величиной порядка постоянной Планка η) для полей с напряженностью, превосходящей 10^9 В/см. Это заставляет искать варианты, когда поле, обладая значительным моментом количества движения, будет, тем не менее, иметь умеренную интенсивность. Ответ (в смысле «существование и единственность») представлен в [1] после анализа задачи по правилам квантовой электродинамики.

Считая поле созданным «заданным током», полагаем, что в соответствии с результатами квантовой оптики [2, 3], его волновой функцией будет когерентное состояние с индексом $\alpha = \alpha(\boldsymbol{\kappa})$ – функцией волнового вектора $\boldsymbol{\kappa}$. И надо, чтобы орты $\boldsymbol{\kappa}$ образовали конус с малым углом при вершине, и была бы достаточно велика $|\partial\psi/\partial\varphi|$, где φ – полярный угол $\boldsymbol{\kappa}$ относительно оси конуса, и ψ – фаза комплексной $\alpha = |\alpha| \exp(i\psi)$. Именно большая производная ψ приводит к большому моменту количества движения поля, а его интенсивность определяет только $|\alpha|$. Возможность генерации подобного поля обсуждалась в [4–6].

Теперь уже можно представить контуры электродинамики поля с большим моментом количества движения.

Во-первых, при взаимодействии такого поля с молекулами (о них мы говорим лишь определенности ради) последние обретают (в силу известных законов сохранения) механический момент, появление которого с неизбежностью влечет за собой (см., например, [7]) магнитный момент $\mathbf{M}$ единицы объема. Для оптических частот он обычно игнорируется, но теперь плотность тока j в уравнениях Максвелла надо писать в виде

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \qquad (1)$$

с дипольным моментом $\mathbf{P}$ единицы объема (c – скорость света).

Во-вторых,

$$\mathbf{m} = [\mathbf{r}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})]/(4\pi c) \qquad (2)$$

с напряженностями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электрического и магнитного полей в точке $\mathbf{r}$, и, конечно же,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{m}). \qquad (3)$$

Из (1)–(3) явствует, что оптика окажется нелинейной даже для весьма умеренных величин I.

В-третьих, ясно, что (3) не может иметь структуру $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \sim (\mathbf{m}(\mathbf{r})$, ибо $|\mathbf{m}| \to \infty$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$. Нельзя предполагать и пропорциональность $\mathbf{M}$ полному моменту поля (интегралу от (2) по $\mathbf{r}$) – ведь уравнения Максвелла локальны. Непротиворечивым должен быть вариант типа «пространственная дисперсия»:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \; F(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, \mathbf{m}(\mathbf{r}') \qquad (4)$$

с соответствующей функцией F (в общем случае – тензором).

2. Построение (4) – предмет полуклассической электродинамики, где фигурирует гамильтониан

$$\hat{H}_{OR} = -\sum_a \frac{e_a}{\mu_a c} \, \mathbf{p}_a \, \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t) + \sum_a \frac{e_a^2}{2 m_a c^2} \; \mathbf{A}^2(\mathbf{r}_a, t) \qquad (5)$$

взаимодействия частиц поля. В (5) e_a, μ_a, $\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{p}_a = -\,i\,\eta \operatorname{grad}_{\mathbf{r}_a}$ – заряд, масса, координата (как аргумент волновой функции) и оператор импульса частицы с индексом a; $\mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t)$ – векторный потенциал классического поля.

Обычно пространственная дисперсия вызвана взаимодействием молекул из разных элементарных объемов; здесь же нелокальная пространственная связь (4) обязана своим происхождением большому моменту поля. Но формальные последствия такие же – надобность отказаться в (5) от длинноволнового приближения, прибегнув к его «фазовому преобразованию» по известной (с несущественными вариациями) схеме [8, 9]. Тогда появится выражение

$$\hat{H}_{OR} = -\sum_a e_a \; \mathbf{r}_a \, \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) - \frac{1}{2} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \; (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_a, t)) \, \mathbf{p}_a \, . \qquad (6)$$

Слагаемые (6) классифицируются как описание взаимодействия поля с электрическим и магнитным диполями. Электрический квадруполь одного порядка со вторым членом (6), однако его влиянием можно пренебречь. Действительно, он не даст вклада в (3) – его произведения с «магнитным» слагаемым будет превышать точность (6), а при вычислении $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ достаточно электродипольное приближение.

Программу вычислений продолжает типичная (см., например, [9, 10]) процедура квантовой механики для нелинейной оптики. В первом порядке теории возмущений по оператору (6) появится пропорционально **H** слагаемое. Именно оно определяет зависимость **j** от **H** для «обычного» поля, и поэтому несущественно. Нам необходимо увидеть появление комбинации (2) в форме (4); надобен поэтому второй порядок теории возмущений. И тогда (с точностью до множителя) величиной (3) будет

$$\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ \mathrm{Sp}\hat{\rho}\,[\hat{\mathbf{M}}'(t), \hat{H}'_{OR}(t_1)\hat{H}'_{OR}(t_2)] =$$

$$= \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ \mathrm{Sp}\ \hat{\rho}\ \times$$

$$\times \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{i\hbar}\hat{H}_0}\, \hat{\mathbf{M}} e^{\frac{t}{i\hbar}\hat{H}_0},\, \underline{\mathrm{e}^{\frac{t}{i\hbar}\hat{H}_0}} \hat{H}_{OR}(t_1) \mathrm{e}^{\frac{t_1-t_2}{i\hbar}\hat{H}_0} \hat{H}_{OR}(t_2) \underline{\underline{\mathrm{e}^{\frac{t_2}{i\hbar}\hat{H}_0}}} \right] \qquad (7)$$

Здесь t – время; $\hat{\rho}$ – гиббсовская матрица плотности невозмущенной полем системы частиц; штрих означает «переход к представлению взаимодействия»

$$\hat{K}'(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{i\hbar}\hat{H}_0}\ \hat{K}\ \mathrm{e}^{\frac{t}{i\hbar}\hat{H}_0}$$

для оператора $\hat{K}$ с $\hat{H}_0 = \hat{T} + V$ – гамильтонианом системы частиц ($\hat{T}$ – оператор кинетической энергии; V – потенциальная энергия); наконец

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_a \delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)\ \frac{e_a}{m_a}\ (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a) \qquad (8)$$

– оператор плотности магнитного момента (δ – дельта-функция).

Разумеется, после подстановки (6) в (7) предметом анализа должны стать слагаемые, куда входят произведения **E** и **H**. Выражения с $\mathbf{E}^2$ и $\mathbf{H}^2$ – поправки второго порядка теории возмущений в (1), несущественные при небольшой интенсивности. И здесь еще раз напомним, что велик, по предположению о структуре поля, именно его момент количества движения.

Предпосылкой для последующего упрощения (7) является почти очевидное утверждение, что взаимодействие поля с большим моментом количества движения и молекулы приводит к ее энергичному вращению.

Это, прежде всего, позволяет игнорировать коммутатор (8) и $\hat{H}_0$, а следовательно, полагать $\mathbf{M}'$ и $\exp\left(\pm(t/i\eta)\ \hat{H}_0\right)$ перестановочными (отсюда, впрочем, не следует надобность приближения $\hat{\mathbf{M}}' \cong \hat{\mathbf{M}}$ – оно оказывается слишком грубым для рассматриваемого выражения). Действительно,

$$\lfloor \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),\ \hat{H}_0\ \rfloor = \lfloor \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),\ \hat{T}\ + V \rfloor = \lfloor \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),\ \hat{T}\ \rfloor .$$

Но с коммутатором $\lfloor \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),\ \hat{H}_0 \rfloor$ связан (как это аргументировано в статистической физике [11]) поток плотности частиц через границу элементарного объема – величина, явно равная нулю при только вращении молекул. Далее, перестановочность $(\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a)$ и $\hat{T}$ проверяется непосредственно, а при описывании вращения хорошим приближением является $V = \mathrm{const}$.

Теперь появляется возможность вынести за знак [ ] в (7) подчеркнутый одной чертой экспоненциальный оператор, воспользоваться его точной коммутацией с $\hat{\rho}$ и, под знаком Sp, переставить за знак [ ]; возникает комбинация

$$\hat{H}_{OR}(t_1)\, \mathrm{e}^{-\frac{t_1-t_2}{i\hbar}\hat{H}_0}\ \hat{H}_{OR}(t_2)\, \mathrm{e}^{-\frac{t_1-t_2}{i\hbar}\hat{H}_0} .$$

Аналогично, только в обратном порядке, можно поступить с подчеркнутым двумя чертами экспоненциальным оператором, что приведет к выражению

$$\mathrm{e}^{-\frac{t_1-t_2}{i\hbar}\hat{H}_0}\, \hat{H}_{OR}(t_1)\, \mathrm{e}^{-\frac{t_1-t_2}{i\hbar}\hat{H}_0}\, \hat{H}_{OR}(t_2) .$$

Первый или второй варианты используются ради того, чтобы «освободить» от экспоненциальных множителей оператор $\left(\mathbf{r}_a\, \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t)\right)$, когда это выражение (в произведении с $\mathbf{H}(\mathbf{r}_a, t)$) стоит слева или справа. В другом сомножителе, после несложного векторного преобразования, получим $\hat{\mathbf{M}}_a$ – слагаемое из (8):

$$\mathrm{e}^{-\frac{t_1-t_2}{i\hbar}\hat{H}_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}_a, t) \hat{\mathbf{M}}_a\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{i\hbar}\hat{H}_0} = \mathbf{H}(\mathbf{r}'_a(t), t) \hat{\mathbf{M}}'_a .$$

При достаточно энергичном вращении его можно трактовать как классическое с начальным значением $\mathbf{r}_a$, и «траектория» $\mathbf{r}'_a(t)$ представляется как $\mathbf{r}_a$ + «нечто»; это «нечто» = 0 (размеры молекулы), если речь идет о вращении. Но в **H** пространственная координата входит как $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}$ с $\kappa \sim 1/$(длина волны). Поэтому величину $\boldsymbol{\kappa}$, умноженную на(«нечто»), можно игнорировать, и в последнем выражении $\mathbf{H}(\mathbf{r}'_a) \to \mathbf{H}(\mathbf{r}_a)$.

Смысл подобного преобразования весьма простой. Следствием (2) будет $\mathbf{m} = (\mathbf{r}\,\mathbf{E})\,\mathbf{H} - (\mathbf{r}\,\mathbf{H})\,\mathbf{E}$, и **M**, будучи сориентированным по **H**, связан только с первым слагаемым. Но именно оно и появляется в итоге только что прокомментированных акций.

После предыдущих упрощений и вычисления Sp в (7) предметом анализа станут выражения вида

$$\sum_{n_1 \dots n_4} \rho_{n1}\ \mathrm{e}^{i\omega_{n_1 n_2} t}\, B_{n_1 n_2}\, C_{n_2 n_3}(\omega')\, \mathrm{e}^{-i\omega'(t-\tau_1)}\, Д_{n_3 n_4}(\omega'') \times$$

$$\times\, \mathrm{e}^{-i\omega''(t-\tau_1-\tau_2)}\, G_{n_4 n_1}\, \mathrm{e}^{i\omega_{n_5 n_1}\tau_2}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}. \qquad (9)$$

Относительно (9) надобно обстоятельное разъяснение (мы выписали лишь одно слагаемое, возникающее в коммутаторе из (7)).

Индекс n нумерует собственные функции $\hat{H}_0$, ρ_n – диагональный матричный элемент $\hat{\rho}$; $\omega_{nn'} = (\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})/\eta$ с ε_n – собственными значениями $\hat{H}_0$; экспоненты с $\omega_{nn'}$ – последствия представления взаимодействия. Предварительно в (7) последовательно сделаны замены переменных $t_2 = t_1 - \tau_2$ и $t_1 = t - \tau_1$, затем для $\mathbf{E}(t)\ \mathbf{H}(t)$ написано разложение в интеграл Фурье (с компонентами $\mathbf{E}(\omega')$, $\mathbf{H}(\omega'')$ и интегрированием по частотам ω' и ω'') – так в (9) появляются экспоненты с ω' и ω'' и рассматривается преобразование Фурье для частоты ω самого $\mathbf{M}(t)$ – об этом свидетельствует exp ($i\omega t$). Через $B_{nn'}$; $C_{nn'}$; $Д_{nn'}$ и $G_{nn'}$ обозначены матричные элементы оператора (8), $(\mathbf{r}_a\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, \omega'))$, одной из векторных компонент $\mathbf{H}(\mathbf{r}_a, \omega'')$ и вектора $(\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a)$.

Разумеется, (9) стоит под знаком $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{0}^{\infty} d\tau_1 \int\limits_{0}^{\infty} d\tau_2$, что, как обычно, приводит к сингулярным функциям, порождающим ограничения $\omega'' = -\omega'$, $\omega + \omega_{n_1n_2} = 0$, $\omega'' = \omega_{n_4n_1}$ на суммирование в (9) и возникающее после перехода к преобразованию Фурье интегрирования $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d\omega''$. Вместо $\mathbf{E}(\omega')$ надо писать $\overline{\mathbf{E}(\omega'')}$, где черта – знак комплексного сопряжения. Столь же понятно появление комбинации

$$\sum_{n_1n_2n_4} (СД)_{n_2n_4}\ G_{n_4n_1} \rho_{n_1} B_{n_1n_2} \equiv \sum_{n_2n_4} (СД)_{n_2n_4}\ \Pi_{n_4n_2} = S_p\ \hat{\Pi}\ (\hat{C}\hat{Д})\ . \quad (10)$$

Конечно же, $\hat{\Pi}$ из (10) обладает, в силу своего определения и «вращательного» происхождения, всеми атрибутами тензора второго ранга, и для изотропных сред он, естественно, диагонален. Поэтому $\hat{C}\hat{Д}$ перейдет в ожидаемую комбинацию $(\mathbf{r}\ \mathbf{E})\ \mathbf{H}$.

Надо еще принять во внимание суммирование по частицам в (6). Итогом предыдущего преобразования будет поэтому

$$\sum_{a,a'} (\mathbf{r}_a\ \mathbf{E}(r_a))\ \ \mathbf{H}(\mathbf{r}_{a'})\ \Pi_{a'}, \quad (11)$$

где $\Pi_{a'}$ – соответствующее индексу a' слагаемое матричного элемента ^;P из (10). Предстоит убедиться, что в (11) предпочтение должно быть отдано слагаемым с $a' = a$.

Обозначим через x и y координаты частиц с индексами a и a'; $X(x, y)$ – используемые при вычислении матричных элементов волновые функции; f и g – фигурирующие в (10) величины. Необходимо сравнить интегралы

$$\int dxdy\ \overline{X}(x, y)\ f(x)\ g(x)\ X(x,y),$$

$$\int dxdy\ \overline{X}(x, y)\ f(x)\ g(y)\ X(x,y),$$

соответствующие вариантам $a = a'$ и $a \neq a'$.

Поскольку имеем дело с финитным вращением – движением, то можно сослаться на осцилляционную теорему [12]. В первом случае $\int dy\ \overline{X}(x, y)\ X(x,y)$ относится к одной частице и имеет, скажем, N осцилляций; причем N велико, и вращение достаточно сильное. Но во втором случае число осцилляций значительно возрастет, что, разумеется, приведет к существенному уменьшению интеграла.

Далее надо объяснить, почему в (11), где теперь $a' = a$, Π_a будут иметь аргументом $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$. Соответствующие доводы хотя и выглядят качественными, тем не менее, вполне стандартны. Во-первых, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$ фигурирует в определении (8) . Во-вторых, при только вращении молекул (а это, напомним, прочно ассоциируется с большим моментом количества движения у поля) непременно должна быть трансляционная инвариантность. Наконец, все то же вращение молекул представляет возможность перейти при его описании на классический язык, когда Sp в (10) превратиться в $\int d\mathbf{r}_a$ ($\int d\mathbf{r}'$ после подходящей замены переменных).

Вернемся еще раз к (10), обратив внимание на то, что $\hat{\Pi}$ зависит от ω и ω'' (или ω'), причем входят они туда отнюдь не независимо. И следствием известных соображений со стационарностью статистических процессов [Sp в (10) (!)] станет утверждение, что соответствующим аргументом в конечном счете окажется $(\omega - \omega')$.

Итог всей процедуры – построение величины (3) – можно уже представить соотношениями

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(r, \omega)\ \ e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}'\ F(\omega - \omega', \mathbf{r} - \mathbf{r}')\big(\mathbf{r}'\ \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega')\big)\mathbf{H}(\mathbf{r}', \omega'), \quad (12)$$

которые и соответствуют структуре (4). Конечно, нет проблем представить F через многочисленные матричные элементы и другие квантовые характеристики, но подобные выражения бесполезны в качестве вычислительного средства. Как обычно, подобные F величины объявляются эмпирическими, когда вид формул, куда они входят, уже установлен.

Итак, вместе с уравнениями Максвелла (где $\mathbf{P}$ связано с $\mathbf{E}$ обычным линейным образом) соотношения (1) и (12) составляют нелинейную оптику, когда поле источника обладает большим моментом количества движения. Ее существенные черты – необязательность достаточно большой интенсивности, присутствие магнитного момента единицы объема и пространственной дисперсии. Последняя обязана здесь своим происхождением особенностям взаимодействия среды и поля с большим моментом.

1. *Творогов С.Д.* // Изв. вузов. Физика. 1996. № 10. С. 93–103.
2. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов // Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966. 452 с.
3. *Клаудер Дж., Сударшан Э.* Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 428 с.
4. *Еньшин А.В., Творогов С.Д.* // ДАН СССР. 1989. Т. 314. № 3. С. 524–527.
5. *Еньшин А.В., Творогов С.Д.* // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 5. С. 320–331.
6. *Лопасов В.П.* // Изв. вузов. Физика. 1999. № 8. С. 119–123.
7. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
8. *Арекки Ф., Скалли М., Хакен Г., Вайдлих В.* Квантовая флуктуация излучения лазера. М.: Мир, 1974. 236 с.
9. *Goeppert-Mayer M.* // Ann. Phys. 1931. Т. 9. С. 273. Цит. по кн.: Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966. 424 с.
10. *Шен И.Р.* Принципы нелинейной оптики. М.: Мир, 1980. 558 с.
11. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: ГИФМЛ, 1963. 702 с.

S.D. Tvorogov. **Nonlinear optics of the field with large moment of momentum.**

One of the main methodical problems of the optics of the field with the large moment of momentum is the spatial dispersion of the moment of the unit volume. It is shown that the similar structure appears in the quantum calculation as a consequence of the very presence of the large moment of momentum of the field.