

А.А. Попов

### СЕЧЕНИЯ ОСЛАБЛЕНИЯ И ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В статье приведены соотношения для сечений обратного рассеяния поляризованного излучения на круглой пластинке, имеющей комплексный показатель преломления. Формулы для сечений даны в виде линейной комбинации элементов матрицы рассеяния. Каждый элемент матрицы представлен конечной суммой, в которой все слагаемые содержат в качестве множителей дифракционные интегралы. Приведены различные формулы для вычисления дифракционных интегралов.

В статье также приведено соотношение для сечения ослабления излучения круглой пластинкой, полученное на основе формулы ослабления для поляризованных полей. В окончательном выражении амплитуды дифракционного и рассеянного полей сложены между собой когерентно.

Для крупных кристаллов характеристики светорассеяния являются аддитивными суммами рассеиваний от так называемых «светящихся точек». Одни светящиеся точки дают устойчивый вклад при любом расположении кристалла, другие исчезают и появляются даже при небольших изменениях его ориентации. Те светящиеся точки, которые дают неустойчивый вклад, как правило, являются следствием тонкой геометрической структуры кристалла. В интегральных характеристиках светорассеяния от всего рассеивающего объема, состоящего из множества частиц, тонкие эффекты исчезают. Поэтому, когда при рассмотрении светорассеяния на отдельном кристалле подразумевается последующий переход к полному рассеянию полидисперсной среды, имеет смысл заранее упростить геометрию частицы. В этой связи круглая пластинка является обобщенной геометрической моделью отдельной частицы полидисперсной кристаллической среды, состоящей из пластинчатых кристаллов.

Задача формулируется следующим образом. На круглую пластинку радиуса  $a$  и толщиной  $d$  (см. рисунок) под углом  $\beta$  к ее оси падает волна эллиптической поляризации ( $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ). Вектор  $\mathbf{E}_2$  составляет с нормалью к плоскости падения  $\mathbf{n}_\perp$  угол  $\gamma$ . Пластинка имеет комплексный показатель преломления  $\tilde{n} = n + ik$ . Определим для пластинки такие характеристики светорассеяния, которые представляют интерес для лазерного зондирования: сечение ослабления и сечение обратного рассеяния.

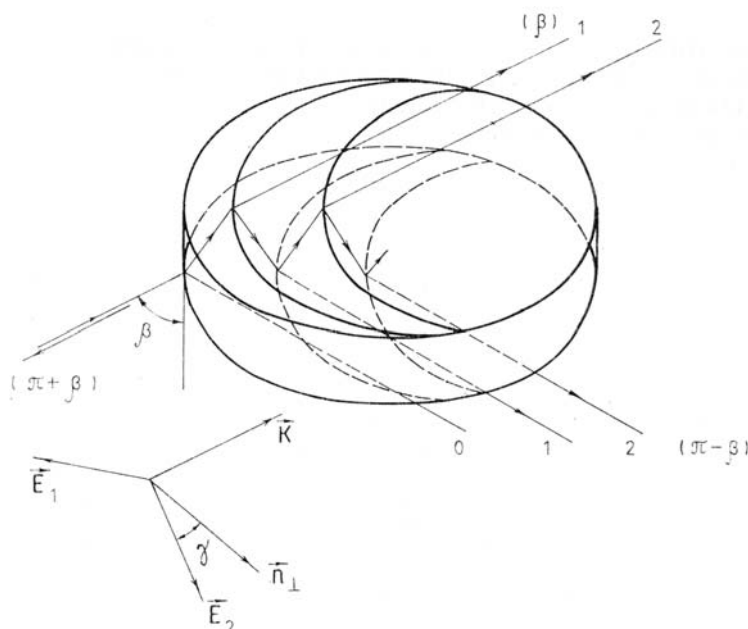


Схема образования пучков из рефракционных лучей различной кратности отражений

При решении подобной задачи полное рассеянное поле разделяют на два вида поля: дифракционное и лучевое [1]. Эти поля определяются методами физической и геометрической оптики соответственно. Такой подход не вызывает сомнений, если речь идет о крупном рассеивателе с гладкой по-

верхностью [2, 4]. Использование данного подхода для расчета характеристик светорассеяния кристаллов нельзя назвать корректным из-за особой геометрии этих рассеивателей.

Наличие в кристалле плоских граней приводит к тому, что все рефракционные лучи, вышедшие из него, формируются в пучки. Как и для определения дифракционного поля от всего кристалла, для расчета поля рассеяния каждого пучка имеет смысл использовать принцип Гюйгенса—Френеля (физическую оптику) в приближении Фраунгофера. Именно такой подход и позволяет получить в отличие от рассеивателя с гладкой поверхностью качественно иную диаграмму рассеяния света на кристалле в виде системы  $\delta$ -образных максимумов [5].

Для круглой пластинки рефракционные лучи формируются в пучки только в двух направлениях  $\beta$  и  $\pi - \beta$ . В этом случае, как и для любого кристалла с плоскопараллельными гранями, рассеянное в направлении вперед поле соизмеримо с дифракционным. Единый подход в определении этих полей позволяет провести их когерентное сложение. После применения оптической теоремы [4] к полученным выражениям для поляризованных полей несложно получить следующее соотношение для сечения ослабления:

$$\sigma = 2S - \operatorname{Re}(B_{\parallel} + B_{\perp}) - \frac{I_2}{I_1} \operatorname{Re}(B_{\parallel} - B_{\perp}) \cos 2\gamma - \frac{I_3}{I_1} \operatorname{Re}(B_{\parallel} - B_{\perp}) \sin 2\gamma. \quad (1)$$

Метод физической оптики позволяет рассчитать рассеянное поле в обратном направлении  $\pi + \beta$  от пучков, вышедших из пластинки в направлении  $\pi - \beta$ . Полученные соотношения для полей, рассеянных в обратном направлении, приводятся к параметрам Стокса, а те — к сечениям обратного рассеяния. После несложных преобразований для сечений обратного рассеяния имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi_1} &= \frac{\kappa^2}{\pi} \left( a_1 + a_2 + \frac{I_2}{I_1} a_3 + \frac{I_3}{I_1} a_4 - \frac{I_4}{I_1} a_5 \right); \\ \sigma_{\pi_2} &= \frac{\kappa^2}{\pi} \left( a_8 + \frac{I_2}{I_1} (a_1 - a_2) + \frac{I_3}{I_1} a_6 - \frac{I_4}{I_1} a_7 \right); \\ \sigma_{\pi_3} &= \frac{\kappa^2}{\pi} \left( -a_4 - \frac{I_2}{I_1} a_6 + \frac{I_3}{I_1} (a_8 - a_2) - \frac{I_4}{I_1} a_9 \right), \\ \sigma_{\pi_4} &= \frac{\kappa^2}{\pi} \left( -a_5 - \frac{I_2}{I_1} a_7 + \frac{I_3}{I_1} a_9 + \frac{I_4}{I_1} (a_8 + a_2) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2)  $I_1 = |E_1|^2 + |E_2|^2$ ;  $I_2 = |E_1|^2 - |E_2|^2$ ;  $I_3 = 2\operatorname{Re}(E_1 E_2^*)$ ;  $I_4 = 2\operatorname{Im}(E_1 E_2^*)$  — параметры Стокса, характеризующие состояние поляризации падающей на пластинку волны;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Параметры  $a_j$  определены следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{|f_1|^2 + |f_2|^2}{2}; \quad a_2 = |f_3|^2; \quad a_3 = \frac{|f_1|^2 - |f_2|^2}{2}; \\ a_4 &= \operatorname{Re}(f_1 f_3^* - f_2 f_3^*); \quad a_5 = \operatorname{Im}(f_1 f_3^* + f_2 f_3^*); \\ a_6 &= \operatorname{Re}(f_1 f_3^* + f_2 f_3^*); \quad a_7 = \operatorname{Im}(f_1 f_3^* - f_2 f_3^*); \\ a_8 &= \operatorname{Re}(f_1 f_2^*); \quad a_9 = \operatorname{Im}(f_1 f_2^*), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= A_{\parallel} \cos^2 \gamma - A_{\perp} \sin^2 \gamma; \\ f_2 &= A_{\perp} \cos^2 \gamma - A_{\parallel} \sin^2 \gamma; \\ f_3 &= -(A_{\parallel} + A_{\perp}) \sin \gamma \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

Для величин  $B_{\perp}$ ,  $B_{\parallel}$ ,  $A_{\perp}$ ,  $A_{\parallel}$  получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} B_{\perp} &= \tilde{T}_{\perp} T_{\perp} \sum_{j=1}^J S_j e^{i\varphi_j} R_{\perp}^{2(j-1)}; \\ B_{\parallel} &= \tilde{T}_{\parallel} T_{\parallel} \sum_{j=1}^J S_j e^{i\varphi_j} R_{\parallel}^{2(j-1)}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$A_{\perp} = \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \left( \tilde{R}_{\perp} F_0 + \tilde{T}_{\perp} R_{\perp} T_{\perp} \sum_{j=1}^J F_j e^{i\psi_j} R_{\perp}^{2(j-1)} \right),$$

$$A_{\parallel} = \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \left( \tilde{R}_{\parallel} F_0 + \tilde{T}_{\parallel} R_{\parallel} T_{\parallel} \sum_{j=1}^J F_j e^{i\psi_j} R_{\parallel}^{2(j-1)} \right),$$

В соотношениях (3)  $R_{\parallel}, R_{\perp}, T_{\parallel}, T_{\perp}, \tilde{R}_{\parallel}, \tilde{R}_{\perp}, \tilde{T}_{\parallel}, \tilde{T}_{\perp}$  — коэффициенты Френеля для плоских волн параллельной и перпендикулярной поляризации, связанные с углом  $\beta$  и комплексным показателем преломления  $\tilde{n}$  следующими выражениями:

$$R_{\parallel} = \frac{\cos \vartheta - \tilde{n} \cos \beta}{\cos \vartheta + \tilde{n} \cos \beta}; \quad R_{\perp} = \frac{\tilde{n} \cos \vartheta - \cos \beta}{\tilde{n} \cos \vartheta + \cos \beta};$$

$$T_{\parallel} = \frac{2\tilde{n} \cos \vartheta}{\cos \vartheta + \tilde{n} \cos \beta}; \quad T_{\perp} = \frac{2\tilde{n} \cos \vartheta}{\tilde{n} \cos \vartheta + \cos \beta};$$

$$\tilde{R}_{\parallel} = \frac{\tilde{n} \cos \beta - \cos \vartheta}{\tilde{n} \cos \beta + \cos \vartheta}; \quad \tilde{R}_{\perp} = \frac{\cos \beta - \tilde{n} \cos \vartheta}{\cos \beta + \tilde{n} \cos \vartheta};$$

$$\tilde{T}_{\parallel} = \frac{2 \cos \beta}{\tilde{n} \cos \beta + \cos \vartheta}; \quad \tilde{T}_{\perp} = \frac{2 \cos \beta}{\cos \beta + \tilde{n} \cos \vartheta}.$$

Комплексный угол преломления  $\vartheta$  определяется из закона Снеллиуса:  $\sin \vartheta = \sin \beta / \tilde{n}$ .

Площадь  $S$  геометрической тени пластинки и площадь  $S_j$   $j$ -го пучка, вышедшего из пластинки в направлении  $\beta$  после  $2j-1$  проходов через нее, определены в виде

$$S = (\pi a^2 + 2ad \operatorname{tg} \beta) \cos \beta;$$

$$S_j = 2a^2 (\arccos \Delta_j - \sqrt{1 - \Delta_j^2}) \cos \beta,$$

где  $\Delta_j = (2j - 1) d \operatorname{tg} \vartheta_r / (2a)$ ,  $0 \leq \Delta_j \leq 1$ ,  $\vartheta_r$  — реальный угол преломления, связанный с комплексным углом преломления соотношением  $\operatorname{tg} \vartheta_r = \tilde{n} \sin \vartheta / \operatorname{Re}(\tilde{n} \cos \vartheta)$ .

Угловая функция  $F_0$ , определяемая выражением

$$F_0 = F_0(\beta) = 2\pi a^2 \cos \beta \frac{J_1(\kappa a \sin 2\beta \cos \beta)}{\kappa a \sin 2\beta \cdot \cos \beta},$$

характеризует рассеяние пучка, отраженного от основания пластинки, в направлении  $\pi + \beta$ .

Угловая функция  $F_j$ , определяемая выражением

$$F_j = F_j(\beta) = 4 \cos \beta \cdot a^2 \sqrt{r_j} \left( I_j - \sqrt{1 - r_j} \frac{\sin R_j}{R_j} \right),$$

где

$$r_j = 1 - \left( \frac{jd \operatorname{tg} \vartheta_r}{a} \right)^2; \quad jd \operatorname{tg} \vartheta_r \leq a; \quad R_j = \kappa a \sqrt{r_j} \sin 2\beta \cos \beta; \quad I_j = \int_0^1 \cos R_j t \sqrt{1 - r_j t^2} dt, \quad (4)$$

характеризует рассеяние  $j$ -го пучка (вышедшего из пластинки после  $2j$  проходов через нее) в направлении  $\pi + \beta$ .

Относительные фазовые набеги  $\varphi_j$  и фазовые набеги  $\psi_j$  парциальных пучков, вышедших в направлениях  $\beta$  и  $\pi - \beta$ , имеют вид

$$\varphi_j = \kappa d \{ (2j - 1) [\tilde{n} / \cos \vartheta_r - \operatorname{tg} \vartheta_r \sin \beta] - \cos \beta \};$$

$$\psi_j = 2\kappa d_j (\tilde{n} / \cos \vartheta_r - \operatorname{tg} \vartheta_r \sin \beta).$$

Заметим, что при  $\beta \neq 0$  из пластинки в направлении  $\beta$  и  $\pi - \beta$  выходит конечное число пучков. Поэтому  $J$  в суммах соотношений (3) — конечная величина. При  $\beta = 0$   $J$  становится бесконечной. Однако образующиеся суммы представляют собой убывающие геометрические прогрессии. При расчетах следует также учитывать экспоненциальное убывание слагаемых сумм с ростом  $j$  при больших  $x$ .

Таким образом, полученные формулы для сечений ослабления и обратного рассеяния могут служить основой для постановки ряда обратных задач поляризационного зондирования кристаллических облаков. К таким задачам следует отнести прежде всего определение ориентации кристаллов в полидисперсной кристаллической среде.

**Приложение.** К вычислению дифракционного интеграла. Дифракционный интеграл (4)

$$I = \int_0^1 \cos Rt \sqrt{1 - rt^2} dt$$

может быть вычислен с помощью квадратур [3], учитывающих осциллирующий характер подынтегральных функций. Однако при  $r$  близких к 1, в квадратуре приходится существенно увеличивать количество разбиений, что приводит к потере точности. Поэтому при вычислении дифракционного интеграла предлагается использовать его различные разложения.

Всю область изменения параметров  $r$  и  $R$  можно условно разбить на 3 подобласти: а)  $R \leq 10$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ; б)  $10 < R \leq 100$ ,  $r < 0,8 + 0,15(R - 10)/90$ ;  $R > 100$ ,  $r < 0,95$ ; в)  $10 < R \leq 100$ ,  $1 \geq r \geq 0,8 + 0,15(R - 10)/90$ ;  $R > 100$ ,  $1 \geq r \geq 0,95$ . Для каждой из этих подобластей наиболее эффективно использование следующих рядов:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{2n} a_n}{(2n)!}, \quad (a)$$

где

$$a_{n+1} = -\frac{r^{-1}(1-r)^{3/2}}{2n+4} + \frac{2n+1}{2n+4} r^{-1} a_n;$$

$$a_0 = \frac{(1-r)^{1/2}}{2} + \frac{\arcsin \sqrt{r}}{2\sqrt{r}}, \quad (r \neq 0);$$

$$I = \frac{\sin R}{R}, \quad (r = 0).$$

$$I = b_0 - \sum_{n=1}^{N_1} \frac{(2n-3)!}{2^n n!} r^n b_n, \quad (6)$$

где

$$b_{n+1} = \frac{\sin R}{R} + 2(n+1) \frac{\cos R}{R^2} - 2(n+1)(2n+1) \frac{b_n}{R^2};$$

$$b_0 = \frac{\sin R}{R}.$$

$$I = J_0(R) c_0 + 2 \sum_{n=1}^{N_2} J_{2n}(R) \cdot c_n; \quad (в)$$

$$c_n = \sum_{\kappa=0}^n (-1)^\kappa A_\kappa a_\kappa, \quad c_0 = a_0;$$

$$A_\kappa = \sum_{l=1}^{\kappa} C_{2n}^{2(l-1)} C_{n+1-l}^{\kappa-l}, \quad A_0 = 1,$$

где  $C_n^m$  — биномиальные коэффициенты;  $J_0, J_{2n}$  — функции Бесселя.

Сумма условно сходящегося ряда (6) вычисляется с относительной погрешностью не более  $10^{-5}$ . При  $r = 1$  все слагаемые в сумме (в), кроме первого, обращаются в нуль. В результате интеграл преобразуется к виду

$$I = \frac{\pi}{2R} J_1(R).$$

Для значений  $r \neq 1$  ряд (в) быстро сходится. При этом  $N_2$  не превышает 10.

1. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. — Л.: Гидрометеоздат, 1984. — 198 с.
2. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. — М.: ИЛ, 1961. — 536 с.
3. Крылов В.И., Шутьгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. — М.: Наука, 1966. — 370 с.
4. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. — М: Мир, 1986. — 660 с.
5. Наац И.Э., Попов А.А. К оптической локации кристаллических облаков. — Томск, 1986. — 52 с. (Препринт № 16/ИОА СО АН СССР).

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР, Томск

Поступила в редакцию  
15 января 1988 г.

**A. A. P o p o v . Polarized Radiation Extinction and Backscattering Cross-Sections by a Round Plate in the Physical Optics Approximation.**

The relations for the polarized radiation backscattering cross sections by a round plate with a complex refractive index are derived. Cross section formulae have the form of a linear combination of scattering matrix elements. Each matrix element is a finite sum with all the summands containing diffraction integrals as cofactors. Different equations for calculating diffraction integrals are reported. The relation for the radiation extinction cross section by a round plate obtained on the basis of polarized field extinction formulae is given. In the final form of the above expression the diffraction and scattered field amplitudes are coherently added.