«Оптика атмосферы», **2**, № 5 (1989)

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 551.501

А.А. Попов, О.В. Шефер

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОСЛАБЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМОЙ КРИСТАЛЛОВ В ВИДЕ ПЛАСТИНОК

Получено приближенное аналитическое выражение коэффициента ослабления оптического излучения полидисперсной системой пластинчатых кристаллов в приближении физической оптики. Из предложенной формулы следует и нейтральный ход коэффициента ослабления в видимой части диапазона, и его заметная зависимость от длины волны в ИК-диапазоне. Показано, что по сравнению с интегральным представлением алгебраическая формула для коэффициента ослабления позволяет проводить вычисления с погрешностью не более 2,5%.

Моделирование процесса прохождения оптического излучения через различные полидисперсные среды связано с выполнением трудоемких расчетов соответствующих коэффициентов ослабления. Каждый коэффициент ослабления является интегралом, подынтегральная функция которого содержит в качестве сомножителя сечение ослабления излучения частицей той или иной формы. Эта характеристика, в свою очередь, является результатом решения задачи рассеяния волны на отдельной частице. Однако не для всех форм частиц такие решения могут быть получены, а из найденных лишь их незначительная часть выражается простыми соотношениями. Поэтому для большинства моделей полидисперсных сред коэффициент ослабления может быть определен только численно. Тем не менее существует близкая к реальности модель полидисперсной среды, для которой возможно провести необходимое интегрирование в аналитическом виде. Этому вопросу и посвящена данная статья.

Рассмотрим в качестве такой модели совокупность круглых ориентированных пластинок. Каждая пластинка характеризуется двумя линейными размерами: радиусом a и толщиной L. В результате для коэффициента ослабления оптического излучения этой полидисперсной средой можно записать следующее соотношение:

$$\alpha = \iint\limits_{aL} \sigma(a,\ L,\ \lambda)\, N(a,\ L)\, da dL. \tag{1}$$

Здесь $N(a, L)$ — двумерная функция распределения частиц по размерам; $\sigma(a, L, \lambda)$ — сечение ослабления излучения круглой пластинкой на длине волны λ. Соотношение (1) можно упростить, если использовать априорную информацию о взаимосвязи размеров a и L для отдельного кристалла. Экспериментально установлено, что между линейными размерами пластинчатого кристалла существует следующая функциональная связь [1]:

$$L = f(a) = B(2a)^{\beta}, \tag{2}$$

где $B = 2{,}020$; $\beta = 0{,}449$ — некоторые константы, а размеры a и L заданы в микрометрах. С учетом (2) соотношение (1) можно существенно упростить. В результате имеем

$$\alpha = \int\limits_0^{\infty} \sigma(a,\ L,\ \lambda)\,|_{L=f(a)}\, N(a)\, da. \tag{3}$$

Сечение ослабления σ в общем случае зависит от состояния поляризации падающего излучения [2]. Однако при нормальном падении волны на пластинку оно определяется более простым соотношением [3], которое имеет следующий вид:

$$\sigma = (a,\ L,\ \lambda) = 2\pi a^2\,(1 - \mathrm{Re}(S)), \tag{4}$$

где

$$S = t \sum_{j=1}^{\infty} e^{i\delta_j} r^{j-1}, \tag{5}$$

$$t = 4\tilde{n}/(\tilde{n}+1)^2;\ r = (\tilde{n}-1)^2/(\tilde{n}+1)^2);\ \delta_j = \kappa L\,[(2j-1)\,\tilde{n} - 1],$$

где $\kappa = 2\pi\lambda$ — волновое число; $\tilde{n} = n + i\kappa$ — комплексный показатель преломления. Соотношение (3) с учетом (4) можно представить в виде двух слагаемых, т.е.

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \tag{6}$$

где

$$\alpha_1 = \int_0^\infty 2\pi a^2 N(a)\, da; \tag{7}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{Re} \int_0^\infty 2\pi a^2 N(a) \cdot S\,|_{L=f(a)} da. \tag{8}$$

Для кристаллов, как правило, функция распределения $N(a)$ является одномодальной и удовлетворительно аппроксимируется гамма-распределением [4], т.е.

$$N(a) = N \frac{\mu^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} \cdot \frac{1}{a_m} \left(\frac{a}{a_m}\right)^\mu \mathrm{e}^{-\mu \frac{a}{a_m}}, \tag{9}$$

где N — концентрация частиц в единице объема; a_m, μ — задаваемые параметры распределения.

Определим интеграл (7), учитывая соотношение (9). В результате имеем

$$\alpha_1 = 2\pi N \frac{\mu+2}{\mu} \cdot \frac{\mu+1}{\mu} a_m^2 \equiv D. \tag{10}$$

Получим аналитическое выражение для α_2, предварительно приведя его к виду

$$\alpha_2 = \mathrm{Re} \int_0^\infty S \cdot 2\pi \, \{a^2 N(a)\}_{a=F(L)} F'(L)\, dL, \tag{11}$$

где $a = F(L) = 0{,}5(L/B)^{1/\beta}$ — обратная функция для $L = f(a)$, $F'(L) = dF/dL = 1/2\beta B \cdot (L/B)^{1/\beta - 1}$, а S зависит только от толщины пластинки L. Введем обозначение $2\pi\{a^2N(a)\}_{a=F(L)} F'(L) = \tilde{N}(L)$. Тогда для α_2 имеем

$$\alpha_2 = \mathrm{Re} \int_0^\infty S \tilde{N}(L)\, dL. \tag{12}$$

Функция $\tilde{N}(L)$ отличается от гамма-распределения, хотя и имеет один максимум. Чтобы провести интегрирование в соотношении (12) в аналитическом виде, заменим $\tilde{N}(L)$ на некоторую функцию $N(L)$. Новая функция $N(L)$ должна наилучшим образом аппроксимировать $\tilde{N}(L)$ на всем интервале интегрирования, т.е. величина

$$\rho = \frac{\sqrt{\sum_{l=1}^{n} (\tilde{N}(L_l) - N(L_l))^2}}{n} \tag{13}$$

должна быть минимальной. Кроме того, для функции $N(L)$ должно выполняться условие нормировки

$$\int_0^\infty N(L)\, dL = \int_0^\infty \tilde{N}(L)\, dL = \int_0^\infty 2\pi a^2 N(a)\, da \equiv D. \tag{14}$$

И наконец, новая функция $N(L)$ должна быть такой, чтобы стало возможным аналитическое определение интеграла в (12). Будем искать ее в виде

$$N(L) = D \frac{1}{\Gamma(x_1+1)} \cdot \frac{1}{x_2} \left(\frac{L}{x_2}\right)^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{L}{x_2}}, \tag{15}$$

где x_1, x_2 — некоторые константы, определяемые при минимизации ρ. Заметим, что x_1 является безразмерной величиной, а x_2 определяется в микрометрах.

Таблица 1

Константы x_1 (верхняя строка), x_2 (нижняя строка), определяемые из (15) при минимизации (13) методом конфигураций для $\tilde{n} = 1{,}31 + i \cdot 10^{-4}$

a_m, мкм	μ = 1	2	3	4	5	6
100	17,17 2,20	22,12 1,41	27,08 1,05	32,04 0,84	37,02 0,70	41,98 0,60
200	17,17 3,01	22,12 1,92	27,08 1,43	32,05 1,15	37,02 0,96	41,99 0,82
300	17,17 3,61	22,13 2,30	27,08 1,72	32,05 1,38	37,02 1,15	41,99 0,99
400	17,17 4,10	22,13 2,62	27,08 1,95	32,05 1,57	37,02 1,31	41,99 1,13
500	17,17 4,54	22,13 2,89	27,08 2,16	32,05 1,73	37,02 1,45	41,99 1,25
600	17,17 4,92	22,13 3,14	27,08 2,35	32,05 1,88	37,02 1,57	41,98 1,35
700	17,17 5,28	22,13 3,37	27,08 2,51	32,05 2,01	37,02 1,68	41,98 1,44

Проинтегрировав соотношение (12) с учетом (4), имеем

$$\alpha_2 \approx D \cdot \mathrm{Re}(t \cdot P), \tag{16}$$

где

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^{j-1}}{(1 + (2j-1)\varkappa \cdot \kappa x_2 - i\,[(2j-1)\,n - 1]\,\kappa x_2)^{x_1+1}} . \tag{17}$$

Подставляя (16) и (10) в соотношение (6), окончательно получим для коэффициента ослабления

$$\alpha \approx D(1 - \mathrm{Re}(t \cdot P)). \tag{18}$$

В табл. 1 приведены параметры x_1, x_2, полученные при минимизации величины ρ методом конфигураций [5]. Эти величины находятся во взаимнооднозначном соответствии с задаваемыми параметрами μ, a_m. Подставляя различные пары значений x_1 и x_2 из табл. 1 в соотношение (17) и анализируя его, нетрудно убедиться, что для видимой части оптического диапазона все слагаемые в P обращаются в нуль и коэффициент ослабления $\alpha = D$ имеет нейтральный ход по λ. Из соотношения (17) следует, что с увеличением длины волны величина P очень слабо возрастает, оставаясь достаточно малой. Однако в ИК-диапазоне ее уже нельзя считать близкой к нулю. И в этом случае величина P определяется только первым слагаемым, по сравнению с которым остальные слагаемые стремятся к нулю. А это означает, что в данной части диапазона можно не учитывать внутренние отражения электромагнитного поля в кристалле. В результате в ИК-диапазоне коэффициент ослабления связан с параметрами исследуемой здесь модели полидисперсной среды следующим элементарным соотношением:

$$\alpha \approx D\left\{1 - \mathrm{Re}\left[\frac{t}{(1 + \varkappa \cdot \kappa x_2 - i\,(n-1)\,\kappa x_2)^{x_1+1}}\right]\right\} \equiv \tilde{\alpha}. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что из (19) вытекает и предельный случай: при $n = 1$, $\kappa = 0$ коэффициент ослабления $\alpha = \tilde{\alpha} \equiv 0$.

В табл. 2 для различных длин волн ИК-диапазона приведены коэффициенты ослабления α и $\tilde{\alpha}$, вычисленные по формулам (3) и (19) соответственно. Причем для соотношения (3) проводилось численное интегрирование. Из анализа табл. 2 следует, что погрешность в определении коэффициента ослабления по формуле (19) не превышает 2,5%. Заметим, что численное интегрирование быстроосциллирующих функций на большом интервале — достаточно трудоемкая вычислительная задача. Поэтому полученное выражение (19) для коэффициента ослабления является не только простым для анализа, но и дает существенный выигрыш при его численной реализации.

Таблица 2

Сопоставительный анализ величины коэффициента ослабления, получаемой в точных вычислениях и на основе предложенного аналитического приближения при $\tilde{n} = 1{,}31 + i \cdot 10^{-4}$

$N=1$, $\mu=4$, $a_m=400$			
λ	α	$\tilde{\alpha}$	$(\alpha-\tilde{\alpha})/\alpha \cdot 100\%$
9,0	$1{,}901 \cdot 10^{6}$*	$1{,}944 \cdot 10^{6}$*	—2,24
9,1	1,937	1,980	—2,20
9,2	1,974	2,017	—2,12
9,3	2,013	2,054	—2,00
9,4	2,052	2,090	—1,86
9,5	2,091	2,126	—1,70
9,6	2,129	2,161	—1,53
9,7	2,165	2,194	—1,35
9,8	2,200	2,226	—1,17
9,9	2,233	2,255	—0,99
10,0	2,263	2,281	—0,82
10,1	2,290	2,305	—0,64
10,2	2,314	2,325	—0,47
10,3	2,335	2,342	—0,31
10,4	2,353	2,356	—0,15
10,5	2,367	2,367	0,00
10,6	2,377	2,374	0,14
10,7	2,383	2,377	0,27
10,8	2,386	2,377	0,39
10,9	2,385	2,373	0,50
11,0	2,380	2,365	0,60
11,1	2,371	2,354	0,68
11,2	2,358	2,340	0,76
11,3	2,342	2,323	0,82
11,4	2,323	2,303	0,87
11,5	2,300	2,279	0,92

* Цифры в столбце умножаются на 10^6.

В заключение отметим, что сечение ослабления для пластинки слабо зависит от состояния поляризации падающего излучения [3]. Кроме того, при изменении угла падения волны на пластинку от 0 (нормальное падение) до 7—10° величина сечения ослабления изменяется незначительно. Поэтому формула (19) допускает обобщение на реальный случай преимущественной ориентации кристаллических пластинок в полидисперсной среде, в которой каждая пластинка совершает колебательное движение около некоторого положения ее равновесия в воздушном потоке.

1. Auer A., Veal D. //J. Atm. Sci. 1970. V. 27. № 6. P. 919—926.
2. Попов А.А. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 5. С. 19—24.
3. Попов А.А., Шефер О.В. К поляризационному лазерному зондированию кристаллических облаков: простейшая оптическая модель частицы. Томск. 1988. 59 с. (Препринт /ТФ СО АН СССР, № 65).
4. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 198 с.
5. Уайлд Д.Дж. Методы поиска экстремума. М.: Наука, 1967. С. 202—208.

Марийский политехнический институт им. Горького,
Йошкар-Ола
Институт оптики атмосферы СО АН СССР, Томск

Поступила в редакцию
12 января 1989 г.

A.A. Popov, O.V. Shefer. **An Analytical Expression for the Coefficient of Optical Radiation Extinction by a Polydispersed Ensemble of Plate Shaped Crystals**.

An analytical expression is derived in the paper for the coefficient of optical radiation extinction by a polydispersed ensemble of plate shaped crystals in the physical optics approximation. This formula explains both the neutral spectral behavior of the extinction coefficient in the visual range and its dependence on the wavelength in the IR region. It is shown in the paper that in contrast to the integral representation the algebraic formula for the extinction coefficient provides for achieving a 2,5% accuracy of computations.