«Оптика атмосферы и океана», **5**, № 5 (1992)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ

УДК (535.2+535.241) : 621.373

В.П. Аксенов, Ю.Н. Исаев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА ПО ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛЮ НАГРЕТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Аналитически решена задача восстановления распределения интенсивности лазерного пучка по распределению температуры на лицевой поверхности нагреваемой им мишени. Получены динамические соотношения для мгновенного положения центра тяжести, размера и функционала фокусировки пучка при произвольных граничных условиях на обратной поверхности мишени.

В опубликованной ранее работе [1] для решения проблемы измерения распределения интенсивности $I(\rho, t)$ в сечении мощных лазерных пучков предлагалось осуществлять восстановление интенсивности на основе измерений температурного $T(\rho, t)$ поля нагретой поверхности. При этом в [1] многомерная пространственно-временная обратная задача теплопроводности, к решению которой сводится в общем случае проблема восстановления, редуцировалась к одномерной задаче за счет выбора «одномерной» мишени специальной конструкции. В настоящей статье получены аналитические решения трехмерной пространственно-временной обратной задачи теплопроводности — задачи пересчета граничных условий. В отличие от [1], в качестве мишени выбрана однородная пластина. Установлены динамические соотношения для реконструкции пространственно-временного распределения интенсивности, мгновенного положения центра тяжести, эффективного размера и функционала фокусировки лазерного пучка при произвольных граничных условиях на обратной поверхности пластины.

Считая пластину в поперечном направлении неограниченной, будем описывать процесс распространения тепла в ней трехмерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\rho, z, t) = a^2 \Delta T(\rho, z, t), \ t > 0, \ 0 \leqslant z \leqslant L,$$
$$-\infty < x, \ y < \infty. \tag{1}$$

Граничные условия на лицевой

$$q(\rho, t) = k \frac{\partial}{\partial z} T(\rho, z, t)|_{z=L} = (1-R)\, I(\rho, t) + \vartheta T(\rho, t) - \sigma b T^4(\rho, t); \tag{2}$$

$$T(\rho, z; t)|_{z=L} = T(\rho, t) \tag{3}$$

и обратной поверхности пластины

$$T(\rho, z; t)|_{z=0} = 0; \tag{4}$$

$$k \left. \frac{\partial T(\rho, z; t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \tag{5}$$

будем использовать в разных комбинациях в зависимости от режима, который поддерживается на обратной поверхности. Кроме того, к граничным условиям следует отнести

$$T(\pm\infty, y, z; t) = T(x, \pm\infty, z, t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} T(x, \pm\infty, z; t) = \frac{\partial}{\partial x} T(\pm\infty, y, z; t) = 0. \tag{7}$$

Примем для простоты начальное распределение температуры постоянным и равным нулю

$$T(\rho, z; 0) = 0. \tag{8}$$

В (1)—(2) $\Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — поперечный лапласиан; ϑ, k, a^2 — коэффициенты конвекционного теплообмена, тепло- и температуропроводности соответственно; σ — постоянная Стефана—Больцмана; b — коэффициент излучения; R — коэффициент отражения поверхности пластины.

Трансформируем (1) с помощью интегральных преобразований Фурье

$$\mathbf{F}\left[T(\rho,\ z;\ t)\right] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho T(\rho,\ z;\ t)\, e^{-i\varkappa\rho} \tag{9}$$

и Лапласа

$$\mathbf{L}\left[T(\rho,\ z;\ t)\right] = \int\limits_{0}^{\infty} dt T(\rho,\ z;\ t)\, e^{-st}. \tag{10}$$

Используя (6)—(8), получим для

$$\mathbf{LF}\left[T(\rho,\ z;\ t)\right] = \tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s)$$

следующее уравнение:

$$(s + a^2\varkappa^2)\,\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s) = a^2\,\frac{d^2\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s)}{dz^2} \tag{11}$$

и граничные условия

$$\tilde{q}(\varkappa,\ s) = k\frac{\partial}{\partial z}\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s)\,|_{z=L}, \tag{12}$$

$$\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s)\,|_{z=L} = \tilde{T}(\varkappa;\ s), \tag{13}$$

$$\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s)\,|_{z=0} = 0, \tag{14}$$

$$k\left.\frac{\partial\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{15}$$

Найдем вначале тепловой поток для пластины, обратная поверхность которой поддерживается при постоянной температуре. В этом случае используем граничные условия (12) и (14). Введем новые функции $V(\varkappa,\ z;\ s)$ и $U(\varkappa,\ z;\ s)$ так, чтобы выполнялось

$$V(\varkappa,\ z;\ s)\,\tilde{q}(\varkappa,\ s) = k\frac{\partial}{\partial z}\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s); \tag{16}$$

$$U(\varkappa,\ z;\ s)\,\tilde{q}(\varkappa,\ s) = k\tilde{T}(\varkappa,\ z;\ s). \tag{17}$$

Тогда вместо (11), (12) и (14) получим

$$(s + a^2\varkappa^2)\,U(\varkappa,\ z;\ s) = a^2\,\frac{dV(\varkappa,\ z,\ s)}{dz};\quad \frac{dU(\varkappa,\ z;\ s)}{dz} = V(\varkappa,\ z;\ s); \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &V(\varkappa,\ L;\ s) = 1,\\ &U(\varkappa,\ 0;\ s) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

— систему обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (19). Преобразуем краевую задачу (18)—(19) в задачу с начальными условиями. Для этого используем метод погружения [2], включив параметр L в качестве аргумента функций V и U и продифференцируем (18)—(19) по L.

Учитывая, что

$$\frac{d}{dL}V(\varkappa,\ L,\ L;\ s) = \frac{\partial V}{\partial L}(\varkappa,\ z,\ L;\ s)\,|_{z=L} + \frac{\partial}{\partial z}V(\varkappa,\ z,\ L;\ s)\,|_{z=L}, \tag{20}$$

где $\frac{\partial}{\partial z}V(\varkappa, z, L; s)\Big|_{z=L} = \frac{s+a^2\varkappa^2}{a^2}U(\varkappa, L, L; s)$, из (18)–(19) получим

$$(s+a^2\varkappa^2)\frac{\partial}{\partial L}U(\varkappa, z, L; s) = a^2\frac{d}{dz}\frac{\partial}{\partial L}V(\varkappa, z, L; s),$$

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial}{\partial L}U(\varkappa, z, L; z) = \frac{\partial}{\partial L}V(\varkappa, z, L; s); \tag{21}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L}(\varkappa, 0, L; s) = 0; \frac{\partial V}{\partial L}(\varkappa, z, L; s)|_{z=L} = -\frac{s+a^2\varkappa^2}{a^2}U(\varkappa, L, L; s). \tag{22}$$

Сопоставляя (18)–(19) с (21)–(22) и считая решение задачи единственным, находим

$$\frac{\partial}{\partial L}U(\varkappa, z, L; s) = -\frac{s+a^2\varkappa^2}{a^2}U(\varkappa, L, L; s)\,U(\varkappa, z, L; s), \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial L}V(\varkappa, z, L; s) = -\frac{s+a^2\varkappa^2}{a^2}U(\varkappa, L, L; s)\,V(\varkappa, z, L; s). \tag{24}$$

Так как

$$\frac{dU}{dL}(\varkappa, L, L; s) = \frac{\partial U(\varkappa, z, L; s)}{\partial L}\Big|_{z=L} + \frac{\partial U(\varkappa, z, L; s)}{\partial z}\Big|_{z=L}, \tag{25}$$

для величины $U(\varkappa, L, L; S)$ согласно (18)–(19), (23), (25), получим уравнение Риккати

$$\frac{d}{dL}U(\varkappa, L, L; s) = -\frac{s+a^2\varkappa^2}{a^2}U^2(\varkappa, L, L; s) + 1 \tag{26}$$

с начальным условием

$$U(\varkappa, 0, 0; s) = 0. \tag{27}$$

Интегрируя (26)

$$\int_0^U \frac{dU}{\frac{a^2}{S+a^2\varkappa^2} - U^2} = \frac{s+a^2\varkappa^2}{a^2}\int_0^L dL, \tag{28}$$

можно установить

$$U(\varkappa, L, L; s) = \frac{a}{\sqrt{s+a^2\varkappa^2}}\,\mathrm{th}\left(\frac{L\sqrt{s+a^2\varkappa^2}}{a}\right). \tag{29}$$

Учитывая (17), получим

$$\tilde{q}(\varkappa; s) = k\frac{\sqrt{s+a^2\varkappa^2}}{a}\tilde{T}(\varkappa; s)\,\mathrm{cth}\left(L\frac{\sqrt{s+a^2\varkappa^2}}{a}\right). \tag{30}$$

Для обращения уравнения (30) воспользуемся последовательно теоремами операционного исчисления об умножении изображений, подобия, смещения, дифференцировании оригинала, а также теоремой о преобразовании Фурье свертки [3]. Учтем также, что

$$\mathbf{L}[\Theta_3(1, t)] = \frac{\mathrm{cth}\sqrt{s}}{\sqrt{s}},$$

где

$$\Theta_3(\vartheta, t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}\cos 2\pi n\vartheta$$

– функция Якоби [3]. В результате получим

$$q(\rho,\ t) = -\frac{k}{4\pi a^2 L}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \frac{T(\rho',\ \tau)}{(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(\rho-\rho')^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\frac{d}{d\tau}\Theta_3\left(1,\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right). \tag{31}$$

Формула (31) справедлива при произвольных значениях параметров мишени a^2, k, L, а также ρ и t. Однако ее можно упростить при определенных соотношениях между этими параметрами. Считая, что $L/a \ll 1$, используем разложение функции $\mathrm{cth}(x)$ в степенной ряд

$$\mathrm{cth}(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + 0(x^3),\ x < 1.$$

Тогда вместо (30) получим

$$\tilde{q}(\varkappa,\ s) = \frac{k}{L}\tilde{T}(\varkappa,\ s) + \frac{kL}{3a^2}(s + a^2\varkappa^2)\tilde{T}(\varkappa,\ s) + 0\left(\frac{k}{L}\left(\frac{k}{a}\right)^4 (s+a^2\varkappa^2)^2\tilde{T}(\varkappa,\ s)\right).$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в этом разложении и осуществляя обращение, будем иметь

$$q(\rho,\ t) = \frac{k}{L}T(\rho,\ t) + \frac{kL}{3a^2}\left[-a^2\Delta_\perp T(\rho,\ t) + \frac{\partial}{\partial t}T(\rho,\ t)\right]. \tag{32}$$

Уравнение (32) описывает процесс переноса тепла в тонкой «двумерной» пластине. Его можно переписать в виде уравнения теплопроводности с источниками

$$\frac{\partial}{\partial t}T(\rho,\ t) = a^2\Delta_\perp T(\rho,\ t) + \frac{3a^2}{kL}q(\rho,\ t) - \frac{3a^2}{L^2}T(\rho,\ t). \tag{33}$$

В другом предельном случае, когда $L/a \gg 1$, воспользуемся асимптотическим разложением

$$\mathrm{cth}\, x = 1 + 2\mathrm{e}^{-x} + 0(\mathrm{e}^{-2x}),\ x \gg 1,$$

в котором ограничимся первым членом. Обращая соотношение

$$\tilde{q}(\varkappa;\ s) = \frac{k\sqrt{s + a^2\varkappa^2}}{a}\tilde{T}(\varkappa,\ s),$$

получим решение задачи для «полуограниченного» тела

$$q(\rho,\ t) = -\frac{k}{8\sqrt{\pi^3}a^3}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \frac{T(\rho',\ \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^5}}\exp\left(-\frac{(\rho-\rho')^2}{4a^2(t-\tau)}\right). \tag{34}$$

Соотношения (33) и (34) можно получить и непосредственно из (31). Это достигается введением в (31) обобщенного теплофнзического параметра $F_O = \frac{a^2}{L^2}t$ и использованием метода Лапласа для $F_O \gg 1$, а в другом предельном случае ($F_O \ll 1$) сведением бесконечного суммирования в (31) к интегрированию [1].

Если обратная поверхность пластины теплоизолирована, то для решения обратной задачи мы должны использовать наряду с уравнением (11) граничные условия (13), (15). Составляя и решая уравнения погружения, находим, что

$$\tilde{q}(\varkappa;\ s) = k\tilde{T}(\varkappa;\ s)\frac{\sqrt{s+a^2\varkappa^2}}{a}\,\mathrm{th}\left(L\frac{\sqrt{s+a^2\varkappa^2}}{a}\right). \tag{35}$$

В результате обращения (35) найдем тепловой поток на лицевой поверхности мишени, обратная поверхность которой теплоизолирована

$$q(\rho,\ t) = -\frac{k}{4\pi a^2 L}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d^2\rho' \frac{T(\rho',\ \tau)}{(t-\tau)}\exp\left(-\frac{(\rho-\rho')^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\frac{d}{d\tau}\Theta_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right), \tag{36}$$

где

$$\Theta_1(\vartheta,\ t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 t\right)\sin\pi(2n+1)\vartheta.$$

Из (36) для $\mathrm{F_O} \gg 1$ можно получить асимптотическую формулу

$$q(\boldsymbol{\rho},\ t) = \frac{Lk}{a^2}\left[\frac{\partial T}{\partial t}(\boldsymbol{\rho},\ t) - a^2\Delta_\perp T(\boldsymbol{\rho},\ t)\right],$$

а при $\mathrm{F_O} \ll 1$ формулу (34) для полуограниченного тела.

Получив интегральные представления для восстановления теплового потока, нетрудно вывести соответствующие соотношения для интегральных моментов потока: положения центра тяжести, эффективного размера, функционалов фокусировки. Так как тепловые потери на излучение и теплообмен на лицевой поверхности мишени известны, интегральные моменты потока однозначно связаны с интегральными моментами интенсивности лазерного пучка. Будем считать, что теплопотерями можно пренебречь. Тогда для полного потока интенсивности

$$P_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho I(\boldsymbol{\rho},\ t)$$

в случае полуограниченного тела получим

$$P_0(t) = -\frac{k}{2\sqrt{\pi}a(1-R)}\int\limits_0^t d\tau \frac{M_0(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}},$$

а для охлаждаемой и теплоизолированной мишени будем иметь

$$P_0(t) = -\frac{k}{L(1-R)}\int\limits_0^t d\tau M_0(\tau)\frac{d}{d\tau}\Theta_3\left(1,\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right),$$

$$P_0(t) = -\frac{k}{L(1-R)}\int\limits_0^t d\tau M_0(\tau)\frac{d}{d\tau}\Theta_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right)$$

соответственно, где

$$M_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(\boldsymbol{\rho};\ t)\, d^2\rho.$$

Вектор координат центра тяжести распределения интенсивности следует определять на основе формул

$$\boldsymbol{\rho}_c = -\frac{k}{2\sqrt{\pi}a(1-R)P_0(t)}\int\limits_0^t d\tau \frac{\mathbf{M}_T(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}},$$

$$\boldsymbol{\rho}_c = -\frac{k}{L(1-R)P_0(t)}\int\limits_0^t d\tau \mathbf{M}_T(\tau)\frac{d}{d\tau}\Theta_3\left(1,\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right)$$

и

$$\boldsymbol{\rho}_c = -\frac{k}{L(1-R)P_0(t)}\int\limits_0^t d\tau \mathbf{M}_T(t)\frac{d}{d\tau}\Theta_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right)$$

для полуограниченной, охлаждаемой и теплоизолированной мишеней соответственно. Здесь

$$\mathbf{M}_T(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(\boldsymbol{\rho}',\ t)\,\boldsymbol{\rho}' d^2\rho.$$

Эффективный радиус пучка $\rho_э^2$ определится на основе соотношения

$$\rho_э^2 = \rho_{xэ}^2 + \rho_{yэ}^2 = P_0^{-1}(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\boldsymbol{\rho},\ t)\,\boldsymbol{\rho}^2 d^2\rho.$$

Представления $\rho_э^2$ через распределение температуры на поверхности для трех видов граничных условий будут иметь вид

$$\rho_э^2 = -\frac{k}{2\sqrt{\pi}a(1-R)P_0(t)}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^3}}[M_{T2}(\tau) + 4a^2(t-\tau)M_0(\tau)];$$

$$\rho_э^2 = -\frac{k}{L(1-R)P_0(t)}\int_0^t d\tau\,[M_{T2}(\tau) + 4a^2(t-\tau)M_0(\tau)]\frac{d}{d\tau}\Theta_3\left(1,\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right),$$

$$\rho_э^2 = -\frac{k}{L(1-R)P_0(t)}\int_0^t d\tau\,[M_{T2}(\tau) + 4a^2(t-\tau)M_0(\tau)]\frac{d}{d\tau}\Theta_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right),$$

где

$$M_{T2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(\boldsymbol{\rho}',\ t)\rho'^2 d^2\rho'$$

— момент инерции температуры.

Таким образом, для определения интегральных моментов распределения интенсивности необходимо измерять моменты распределения температуры. Функционал фокусировки

$$S_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\boldsymbol{\rho}',\ t)K(\boldsymbol{\rho}')d^2\rho',$$

равный мощности лазерного пучка в пределах апертуры, заданной' функцией $K(\rho)$, оказывается связанным с распределением температуры более сложной зависимостью. В частности, при фокусировке излучения в круг с радиусом α ($K(\rho) = 1$, если $\rho \le \alpha$ и $K(\rho) = 0$, если $\rho > \alpha$), используя (34), (31), (36), получаем

$$S_2(t) = -\frac{k}{2\sqrt{\pi}a(1-R)}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \frac{T(\boldsymbol{\rho}',\ \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\left[1 - J\left(\frac{\alpha^2}{4a^2(t-\tau)},\ \frac{\rho'^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right];$$

$$S_2(t) = -\frac{k}{L(1-R)}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' T(\boldsymbol{\rho}',\ \tau)\left[1 - J\left(\frac{\alpha^2}{4a^2(t-\tau)},\ \frac{\rho'^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right]\frac{d}{d\tau}\Theta_3\left(1,\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right),$$

$$S_2(t) = -\frac{k}{L(1-R)}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' T(\boldsymbol{\rho}',\ \tau)\left[1 - J\left(\frac{\alpha^2}{4a^2(t-\tau)},\ \frac{\rho'^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right]\frac{d}{d\tau}\Theta_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{a^2}{L^2}(t-\tau)\right).$$

Здесь

$$J(x,\ y) = 1 - e^y \int_0^x e^{-t} I_0(2\sqrt{yt})\,dt,$$

где $I_0(\xi)$ — модифицированная функция Бесселя [4]. Очевидно, что соотношения для интегральных моментов и энергетических функционалов излучения оказываются наиболее простыми в случае тонких «двумерных» мишеней.

Таким образом, мы получили расчетные формулы для восстановления распределения интенсивности, интегральных моментов и энергетических функционалов лазерного пучка по температурному распределению на поверхности нагреваемой мишени. Рассмотренная проблема относится к области обратных задач теплопроводности и называется «задачей пересчета граничных условий» [5].

Насколько нам известно, аналитическое решение этой задачи в многомерной постановке получено нами впервые. Задача относится к классу некорректно поставленных. Некорректность связана с присутствием характерного «Абелева» ядра $(\sqrt{t-\tau})^{-n}$ в интегральных представлениях (31), (34), (36). Вопрос регуляризации решения задач такого типа в одномерной постановке подробно рассмотрен в [1]. Очевидно, что практическая реализация полученных выше соотношений потребует разработки эффективных инженерных алгоритмов, устойчивых к шуму в исходных данных — измеренных значений температуры.

1. Аксенов В.П., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. //Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 2. С. 165–172.

2. К а с т и Д ж . . К а л а б а Р . Методы погружения в прикладкой математике. М.: Мир, 1976. 223 с.
3. Д и т к и н В . А . , П р у д н и к о в А . П . Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 544 с.
4. П р у д н и к о в А . П . , Б р ы ч к о в Ю . А . , М а р и ч е в О . И . Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986, 800 с.
5. А л и ф а н о в О . М . Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 216 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
16 января 1992 г.

V . P . A k s y o n o v , Y u . N . I s a e v . **Reconstruction of the Laser Beam Parameters from a Temperature Field of a Heated Surface.**

An analytical solution of the problem on reconstructing the cross sectional beam intensity distribution from tile temperature field on Ihe surface of a target heated with the beam is derived. Dynamic relationships for the instantaneous positron of the spot's center of gravity for the beam focusing functional at the rear side of the target are derived for arbitrary boundary conditions.