

УДК 536.25; 532.72; 535.36

## Фотофорез нагретых умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы

Н.В. Малай<sup>1</sup>, А.В. Лиманская<sup>1</sup>, Е.Р. Щукин<sup>2</sup>, А.А. Стукалов<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Белгородский государственный университет  
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

<sup>2</sup>Объединенный институт высоких температур РАН  
127412, г. Москва, ул. Ижорская, 13/19

Поступила в редакцию 4.06.2011 г.

В приближении Стокса проведено теоретическое описание стационарного движения умеренно крупной твердой аэрозольной частицы сферической формы, на которую падает электромагнитное излучение, в газе. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может значительно отличаться от температуры окружающей ее газообразной среды. В процессе решения газодинамических уравнений получены аналитические выражения для силы и скорости фотофореза с учетом зависимостей плотности, вязкости газообразной среды и теплопроводности от температуры.

*Ключевые слова:* фотофорез, фотофорез в газах, сферическая частица, движение аэрозольной частицы в поле электромагнитного излучения; photophoresis, photophoresis in a gases, spherical particle, movement of an aerosol particle in the field of electromagnetic radiation.

### Введение

Явление фотофореза в газе заключается в движении аэрозольных частиц в поле электромагнитного излучения под действием радиометрической силы. Фотофорез может играть существенную роль в атмосферных процессах [1–3], очистке промышленных газов от аэрозольных частиц, создании установок, предназначенных для селективного разделения частиц по размерам, и т.д. Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей внутри ее происходит выделение тепловой энергии с некоторой объемной плотностью  $q_p$ , которая неоднородно нагревает частицу. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы более горячей может оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому имеет место и положительный (движение частицы в направлении излучения), и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения электромагнитного излучения движение частицы в газе [4].

В опубликованных до настоящего времени работах по теории фотофореза это явление изучалось при малых относительных перепадах температуры [4–7], т.е. когда выполняется неравенство

$$(T_{pS} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \ll 1,$$

где  $T_{pS}$  – средняя температура поверхности частицы,  $T_{g\infty}$  – температура газообразной среды вдали от нее. При значительных относительных перепадах температуры, т.е. когда  $(T_{pS} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \sim 0(1)$ , это явление изучено недостаточно. Индексы  $g$  и  $p$  здесь и далее относятся к газу и частице соответственно; индексом «S» обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, и индексом  $\infty$  – физические величины, характеризующие газообразную среду в невозмущенном потоке.

Если средняя температура поверхности частицы существенно отличается от температуры окружающей газообразной среды, то здесь мы сталкиваемся с серьезной проблемой. При решении уравнений газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры, т.е. система газодинамических уравнений становится существенно нелинейной. В связи с этим имеется мало работ, посвященных исследованию движения частиц при больших перепадах температуры [8–10].

Следует отметить, что решение дифференциальных уравнений, описывающих поля скорости и давления в работе [9], искалось в виде степенных рядов методом понижения порядка, что привело

\* Николай Владимирович Малай (malay@bsu.edu.ru); Анна Васильевна Лиманская (limanskayaanna@mail.ru); Евгений Романович Щукин; Александр Анатольевич Стукалов (stukalov@bsu.edu.ru).

к довольно громоздким окончательным выражениям, сложным в практическом применении. В настоящей статье решение уравнений газовой динамики представлено в виде обобщенных степенных рядов, что позволяет дать выражения для силы и скорости фотофореза в компактном виде и существенно упростить численные расчеты для практических приложений.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим твердую неоднородно нагретую аэрозольную частицу сферической формы радиуса  $R$ , взвешенную в газе с температурой  $T_g$ , плотностью  $\rho_g$ , теплопроводностью  $\lambda_g$  и вязкостью  $\mu_g$ . Под нагретой частицей понимаем частицу, средняя температура поверхности которой существенно отличается от температуры газообразной среды вдали от нее. В этом случае, как уже отмечалось выше, коэффициенты молекулярного переноса нельзя считать постоянными величинами. При описании свойств газообразной среды и частицы рассматриваем следующий их вид зависимости от температуры [11]:

$$\mu_g = \mu_{g\infty} t_g^\beta, \quad \lambda_g = \lambda_{g\infty} t_g^\alpha, \quad \lambda_p = \lambda_{p0} t_p^\gamma,$$

где  $\mu_{g\infty} = \mu_g(T_{g\infty})$ ;  $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_{g\infty})$ ,  $\lambda_{p0} = \lambda_p(T_{g\infty})$ ;  $t_h = T_h/T_{g\infty}$  ( $h = g, p$ );  $0,5 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ;  $-1 \leq \gamma \leq 1$ .

Неоднородный нагрев частицы обусловлен поглощением электромагнитного излучения. Степень неоднородности зависит от оптических констант материала частицы и параметра дифракции [12]. Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением газа. Тепловое скольжение вызывает появление фотофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды. Когда величина фотофоретической силы становится равной по величине силе вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения частицы называют фотофоретической скоростью ( $\mathbf{U}_{ph}$ ).

При теоретическом описании процесса фотофоретического движения частицы предположим, что в силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процесс теплопереноса в системе «частица — газообразная среда» протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса, частица считается однородной по своему составу и умеренно крупной [13, 15, 16]. Относительно последнего отметим, что для классификации аэрозольных частиц по размерам применяют критерий Кнудсена  $\text{Kn} = \lambda/R$ , где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекул газообразной смеси. Частицы называются крупными, если  $\text{Kn} \leq 0,01$ , умеренно крупными при  $0,01 \leq \text{Kn} \leq 0,3$  и мелкими при  $\text{Kn} \gg 1$ . Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями.

Движение частицы удобно описывать в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , связанной с центром масс аэрозольной частицы. Ось  $OZ$  направлена в сторону распространения однородного потока излучения интенсивностью  $I_0$ . В этом случае объемная плотность внутренних источников тепла имеет стандартный вид [12]:

$$q_p(\mathbf{r}) = 2\pi\chi k_0 I_0 B(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где

$$B(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|E(r, \theta, \varphi)|^2}{E_0^2} d\varphi = B\left(r, \theta, \varphi = \frac{\pi}{4}\right)$$

— безразмерная функция источников электромагнитной энергии в случае неполяризованного падающего излучения;  $E(r, \theta, \varphi)$  — локальная направленность электрического поля внутри частицы;  $E_0$  — амплитуда напряженности поля в падающей волне;  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  — волновое число;  $\lambda_0$  — длина волны;  $m(\lambda_0) = n + i\chi$  — комплексный показатель преломления вещества аэрозольной частицы. Обычно для вычисления безразмерной функции источников  $B(\mathbf{r})$  пользуются решением задачи Ми для внутреннего поля (например, [12]). Поскольку система отсчета связана с центром движущейся аэрозольной частицы, то задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком скорости фотофореза, т.е.  $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_{ph}$ .

В рамках сформулированных допущений уравнения гидродинамики, теплопроводности и граничные условия (представленные в сферической системе координат) имеют вид [17, 18]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P_g = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_g \left[ \frac{\partial U_i^g}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^g}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k^g}{\partial x_k} \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_g U_k^g) = 0,$$

$$\text{div}(\lambda_g \nabla T_g) = 0, \quad n_g = P_g/kT_g, \quad (3)$$

$$\text{div}(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p. \quad (4)$$

Здесь  $x_k$  — декартовы координаты;  $\rho_g = n_g m_g$ ,  $\rho_g$ ,  $m_g$ ,  $n_g$  — плотность, масса и концентрация молекул газообразной среды;  $k$  — постоянная Больцмана.

На большом расстоянии от частицы ( $r \rightarrow \infty$ ) справедливы граничные условия, а конечность физических величин, характеризующих частицу при  $r \rightarrow 0$ , учтена в следующих условиях:

$$y \rightarrow \infty, \quad U_r^g = U_\infty \cos\theta, \quad U_\theta^g = -U_\infty \sin\theta, \quad P_g = P_{g\infty}, \quad (5)$$

$$y \rightarrow 0, \quad T_p \neq \infty, \quad (6)$$

где  $U_r^g$  и  $U_\theta^g$  — нормальная и касательная компоненты массовой скорости газа  $\mathbf{U}_g$ ;  $y = r/R$ ;  $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ .

На поверхности частицы имеют место следующие граничные условия [13, 15, 16]:

$$\begin{aligned}
y = 1; \quad -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial y} + \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial y} = \\
= -C_q^T \text{Kn} \frac{\lambda_g}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_g}{\partial \theta} \right) - \sigma_0 \sigma_1 R (T_p^4 - T_{g\infty}^4); \\
U_r^g = C_V^T \text{Kn} \frac{v_g}{RT_g} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T_g}{\partial \theta} \right); \\
T_g - T_p = K_T^T \text{Kn} \frac{\partial T_g}{\partial y}; \\
U_\theta^g = C_m \text{Kn} \left( \frac{\partial U_\theta^g}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^g}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^g}{y} \right) + \\
+ K_{TS} \frac{v_g}{RT_g} \left[ \left( 1 + \text{Kn} (\beta'_{RT} + \beta^B_{RT}) \right) \frac{\partial T_g}{\partial \theta} + \right. \\
\left. + \text{Kn} (\beta_{RT} - \beta^B_{RT}) \frac{\partial^2 T_g}{\partial y \partial \theta} \right],
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $\sigma_0$  — постоянная Стефана—Больцмана,  $\sigma_1$  — интегральная степень черноты [19].

При постановке граничных условий для умеренно крупных частиц весь объем, занимаемый газом, мысленно разбивают на две части: слой Кнудсена — часть газа толщиной порядка длины свободного пробега, непосредственно прилегающего к поверхности частицы, и весь остальной газ. Течение в объеме газа вне кинетического слоя описывается обычными гидродинамическими уравнениями, а в слое Кнудсена формируются граничные условия для гидродинамических уравнений. Для описания движения газа в этом слое нужно решать кинетические уравнения, например [15, 16]. В настоящей статье (в граничных условиях (7) на поверхности частицы) учитываются все линейные по числу Кнудсена поправки к скорости движения умеренной крупной аэрозольной частицы. Для потока тепла и нормальной составляющей скорости  $U_r^g$  учитывается разрыв радиального потока тепла, пропорциональный соответственно коэффициентам  $C_q^T$  и  $C_V^T$ . Поправочный коэффициент  $K_T^T$  учитывает скачок температуры на поверхности частицы, и последнее граничное условие показывает, что скорость скольжения газа вдоль сферической поверхности малой кривизны складывается из теплового, изотермического, барнеттовского и скольжения, возникающего из-за неоднородности температуры вдоль искривленной поверхности, пропорциональных соответственно коэффициентам  $K_{TS}$ ,  $C_m$ ,  $\beta^B_{RT}$ ,  $\beta'_{RT}$  и  $\beta_{RT}$ . Выражения для коэффициентов  $K_{TS}$ ,  $C_m$ ,  $K_T^T$ ,  $C_q^T$ ,  $C_V^T$ ,  $\beta'_{RT}$ ,  $\beta_{RT}$  и  $\beta^B_{RT}$  находятся методами кинетической теории газов и могут быть взяты из [15, 16]. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии, близких к единице, они равны соответственно:  $K_{TS} = 1,152$ ,  $C_m = 1,131$ ,

$$K_T^T = 2,179, \quad C_q^T = 0,548, \quad C_V^T = 0,941, \quad \beta'_{RT} = -0,405, \\
\beta_{RT} = 3,731 \text{ и } \beta^B_{RT} = 3,651.$$

Обезразмерим уравнения (2)–(4) и граничные условия (5)–(7), введя безразмерные координату, скорость и температуру следующим образом:  $y_k = x_k/R$ ,  $t = T/T_{g\infty}$ ,  $\mathbf{V}_g = \mathbf{U}_g/U_\infty$ .

При числах  $\text{Re}_\infty = (\rho_{g\infty} U_\infty R)/\mu_{g\infty} \ll 1$  набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому решение уравнений гидродинамики следует искать в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_g^{(1)} + \varepsilon \mathbf{V}_g^{(2)} + \dots, \\
P_g = P_g^{(0)} + \varepsilon P_g^{(1)} + \dots + (\varepsilon = \text{Re}_\infty).
\end{aligned} \tag{8}$$

Вид граничных условий указывает на то, что выражения для компонент массовой скорости  $V_r^g$  и  $V_\theta^g$  ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [17]. Известно [17], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений.

## 2. Поля температур вне и внутри частицы

При нахождении фотофоретической силы и скорости ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы, а для этого необходимо решить уравнения (3)–(4). Решив их методом разделения переменных, получаем следующие выражения для  $t_g$  и  $t_p$ :

$$\begin{aligned}
t_g(y, \theta) = t_{g0}(y) + \varepsilon t_{g1}(y, \theta), \\
t_p(y, \theta) = t_{p0}(y) + \varepsilon t_{p1}(y, \theta),
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
t_{g0}(y) &= \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\
t_{p0}(y) &= \left( B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0 dy + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \\
t_{g1}(y, \theta) &= \frac{\cos \theta}{t_{g0}^\alpha} \frac{\Gamma}{y^2}, \\
t_{p1}(y, \theta) &= \frac{\cos \theta}{t_{p0}^\gamma} \left[ B y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left( y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right) \right]; \\
H_0 &= \frac{R^2(1+\gamma)}{3\lambda_{p0} T_{g\infty}} J_0, \quad H_1 = \frac{R^2}{3\lambda_{p0} T_{g\infty}} J; \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_p dV, \\
J &= \frac{1}{V} \int_V q_p z dV, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3;
\end{aligned}$$

$\int_V q_p z dV$  — дипольный момент плотности тепловых источников [1, 3, 4–7, 12, 14, 23];

$$\psi_0 = -\frac{R^2(1+\gamma)}{2\lambda_{p0}T_{g\infty}}y^2 \int_{-1}^{+1} q_p(r, \theta) dx,$$

$$\psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_{p0}T_{g\infty}}y^2 \int_{-1}^{+1} q_p(r, \theta) x dx; \quad x = \cos\theta; \quad z = r \cos\theta.$$

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур, определяются из граничных условий на поверхности частицы. В частности, для коэффициента  $\Gamma$  имеем

$$\frac{\Gamma}{t_{gS}^\alpha} = \frac{R}{\lambda_{pS}T_{g\infty}\delta} J. \quad (10)$$

Здесь

$$\delta = 1 + 2\frac{\lambda_{gS}}{\lambda_{pS}}(1 - C_q^T \text{Kn}) + 4\frac{\sigma_0\sigma_1 R}{\lambda_{pS}} T_{g\infty}^3 t_{pS}^3 +$$

$$+ K_T^T \text{Kn} \left( 2 - \frac{\alpha \ell^{(S)}}{1 + \alpha} \right) \left( 1 + 4\frac{\sigma_0\sigma_1 R}{\lambda_{pS}} T_{g\infty}^3 t_{pS}^3 \right);$$

$$\lambda_{pS} = \lambda_{p0} t_{pS}^\gamma, \quad \lambda_{gS} = \lambda_{g\infty} t_{gS}^\alpha; \quad t_{pS} = t_{p0}(y=1),$$

$$t_{gS} = t_{g0}(y=1).$$

Среднее значение температуры поверхности частицы  $T_{pS}$  определяется из решения следующей системы уравнений, в которой  $T_{pS} = t_{pS} T_{g\infty}$ ,  $T_{gS} = t_{gS} T_{g\infty}$ ,  $\ell^{(S)} = \ell(y=1)$ ,  $\ell = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + K_T^T \text{Kn} \frac{\ell^{(S)}}{1 + \alpha} \right) T_{gS} = T_{pS}, \\ \frac{\ell^{(S)}}{1 + \alpha} t_{gS} = \frac{R^2}{3\lambda_{gS}T_{g\infty}} J_0 - \sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{g\infty}^3}{\lambda_{gS}} \left[ \left( \frac{T_{pS}}{T_{g\infty}} \right)^4 - 1 \right]. \end{array} \right. \quad (11)$$

При выполнении неравенства  $\lambda_g \ll \lambda_p$  (имеет место для большинства газов) коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа, тогда в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу  $\theta$  в системе «частица – газ» (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры). С учетом этого можно считать, что вязкость связана только с температурой  $t_{g0}(r)$ , т.е.  $\mu_g(t_g(r, \theta)) \approx \mu_g(t_{g0}(r))$ . Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

Подставляя (9) в выражение для динамической вязкости, имеем

$$\mu_g = \mu_{g\infty} t_{g0}^\beta. \quad (12)$$

В дальнейшем (12) используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности нагретой аэрозольной частицы сферической формы.

### 3. Решение гидродинамической задачи. Нахождение выражений для полей скорости и давления

Исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса в сферической системе координат показало, что если предположить коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры), то это уравнение может быть в конечном итоге сведено к неоднородному дифференциальному уравнению 3-го порядка с изолированной особой точкой. Решение этого уравнения можно искать в виде обобщенных степенных рядов.

Исходя из граничных условий (5)–(7), выражения для компонент массовой скорости нулевого приближения (8) будем искать в виде

$$U_r^g(y, \theta) = U_\infty \cos\theta G(y), \quad (13)$$

$$U_\theta^g(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta g(y).$$

Здесь  $G(y)$  и  $g(y)$  – произвольные функции, зависящие от радиальной координаты  $y = r/R$ .

Из уравнения непрерывности (2) и уравнения состояния (3) находим связь между функциями  $G(y)$  и  $g(y)$ :

$$g(y) = \frac{1}{2} y \frac{dG(y)}{dy} + \left( 1 + \frac{1}{2(1+\alpha)} \ell(y) \right) G(y). \quad (14)$$

Подставляя в линеаризованное по скорости уравнение Навье–Стокса (2) выражения (13) и (14), учитывая (12) и разделяя переменные, после преобразований в конечном итоге получаем следующее неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка для определения функции  $G(y)$ :

$$y^4 \frac{d^3 G}{dy^3} + y^3 (4 + \gamma_1 \ell) \frac{d^2 G}{dy^2} -$$

$$- y^2 (4 + \gamma_2 \ell - \gamma_3 \ell^2) \frac{dG}{dy} - y(2 - \ell) \gamma_3 \ell^2 G = -\frac{6A_2}{t_{g0}^\beta} \quad (15)$$

с краевыми условиями

$$G(y=1) = 0, \quad G(y \rightarrow \infty) \rightarrow 1, \quad g(y=1) = \text{const},$$

$$g(y \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \quad (16)$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_2 = 2\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}; \quad A_2 = \text{const}.$$

Найдем сначала решение однородного уравнения (15), т.е.

$$y^4 \frac{d^3 G}{dy^3} + y^3 (4 + \gamma_1 \ell) \frac{d^2 G}{dy^2} -$$

$$- y^2 (4 + \gamma_2 \ell - \gamma_3 \ell^2) \frac{dG}{dy} - y(2 - \ell) \gamma_3 \ell^2 G = 0. \quad (17)$$

Точка  $y = 0$  для уравнения (17) является регулярной особой точкой [20–22]. Поэтому будем искать его решение в виде обобщенного степенного ряда [20–22]:

$$G(y) = y^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n, \quad C_0 \neq 0. \quad (18)$$

Подставляя ряд (18) в (17) и приравнявая коэффициенты при  $y^p$ , получаем определяющее уравнение  $\rho(\rho + 3)(\rho - 2) = 0$ , корни которого равны соответственно  $\rho_1 = -3$ ,  $\rho_2 = 2$  и  $\rho_3 = 0$ . Заметим, что разность корней (по модулю) равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса), в остальных решениях, кроме первого решения (в нашем случае  $\rho_1 = -3$ ), появляется добавочное слагаемое с логарифмом, помноженным на первое решение [20–22]. Рекуррентные выражения для соответствующих коэффициентов определяются методом неопределенных коэффициентов.

Большему из корней (по модулю) отвечает решение

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} \ell^n. \quad (19)$$

Решение, отвечающее корню  $\rho_2 = 2$ , мы не приводим, так как оно не удовлетворяет крайевым условиям (16) (конечности решения при  $y \rightarrow \infty$ ).

Третье решение уравнения (17), линейно независимое от решения  $G_1$  (пропорциональное корню  $\rho_3 = 0$ ), ищем в виде

$$G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{3,n} \ell^n + \omega_3 \ln(y) G_1(y). \quad (20)$$

Вид правой части неоднородного уравнения (15) указывает на то, что его частное решение следует искать в виде

$$\tilde{G}(y) = A_2 G_2(y), \quad (21)$$

$$G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2,n} \ell^n + \omega_2 \ln(y) G_1(y).$$

Значения коэффициентов  $C_{1,n}$  ( $n \geq 1$ ),  $C_{2,n}$  ( $n \geq 3$ ) и  $C_{3,n}$  ( $n \geq 4$ ) находятся методом неопределенных коэффициентов, и их можно определять с помощью соответствующих рекуррентных соотношений:

$$C_{1,n} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \left\{ [(n-1)(3n^2 + 13n + 8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2)] C_{1,n-1} - [(n-1)(n-2) \times (3n+5) + 2\gamma_1(n^2-4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3)] C_{1,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{1,n-3} \right\},$$

$$C_{2,n} = \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \left\{ [(n-1)(3n^2 + n - 6) + \gamma_1 n(n+1) + n\gamma_2] C_{2,n-1} - [\gamma_3(n+1) + (n-1)(n-2)(3n-1) + 2\gamma_1(n-2) + \gamma_2(n-2)] C_{2,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_3 + \gamma_1(n-3)] C_{2,n-3} + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k - 6 \frac{(-\gamma_4)(1-\gamma_4) \dots (n-1-\gamma_4)}{n!} \right\},$$

$$C_{3,n} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \left\{ (n-1) \times [3n^2 - 5n - 4 + \gamma_1 n + \gamma_2] C_{3,n-1} - [(n-1)(n-2)(3n-4) + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3] C_{3,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{3,n-3} + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k \right\};$$

$$\Delta_k = (3k^2 + 16k + 15) C_{1,k} - ((k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2) C_{1,k-1} + (3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3) C_{1,k-2}.$$

При вычислении коэффициентов  $C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$  и  $C_{3,n}$  по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что

$$C_{1,0} = 1, \quad C_{2,0} = 1, \quad C_{3,1} = 0, \quad C_{2,2} = 1,$$

$$C_{2,1} = -\frac{1}{8}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4), \quad \gamma_4 = \beta/(1 + \alpha),$$

$$\frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60}(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2), \quad C_{3,1} = 0, \quad C_{3,2} = \frac{1}{4}\gamma_3,$$

$$C_{3,3} = 1, \quad C_{3,0} = 1,$$

$$\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15} \left[ \frac{1}{4}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4)(4 + 3\gamma_1 + \gamma_2) + 3\gamma_3 + 3\gamma_4(\gamma_4 - 1) \right],$$

$C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$  и  $C_{3,n}$  при  $n < 0$  равны нулю.

Таким образом, общее решение уравнения (15), удовлетворяющее крайевым условиям (16), имеет вид

$$G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y) \quad (22)$$

и выражения для компонент массовой скорости и давления равны:

$$U_r^g = U_\infty \cos\theta (A_1 G_1 + A_2 G_2 + G_3),$$

$$U_\theta^g = -U_\infty \sin\theta (A_1 G_4 + A_2 G_5 + G_6);$$

$$P_g = P_{g\infty} + \frac{\mu_{g\infty} U_\infty}{R} t_{g0}^\beta \times \\ \times \left\{ \frac{y^2 d^3 G}{2 dy^3} + y \left[ 3 + \frac{\beta-1}{2} y f \right] \frac{d^2 G}{dy^2} - \left[ 2 - y^2 f^I - \frac{\beta}{2} y^2 f^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\beta-2) y f \right] \frac{dG}{dy} + 2 \left[ y^2 f^{II} + y f^I (4 + y \beta f) - \frac{2}{3} f \right] G \right\}. \quad (23)$$

Здесь

$$f = -\frac{\ell}{y(1+\alpha)}; \\ G_k = \left( 1 + \frac{\ell}{2(1+\alpha)} \right) G_{k-3} + \frac{1}{2} y G_{k-3}^I \quad (k = 4, 5, 6); \\ f^I, f^{II}, G_1^I, G_2^I, G_3^I$$

— первые и вторые производные по  $y$  от соответствующих функций.

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий на поверхности аэрозольной частицы.

#### 4. Определение фотофоретической силы и скорости. Анализ полученных результатов

Таким образом, в первом приближении по  $\varepsilon$  нами получены выражения для полей температур вне и внутри аэрозольной частицы, а также распределения скорости и давления в ее окрестности. Результирующая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы и имеет вид [17, 18]:

$$F_z = \int_{(S)} (-P_g \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \Big|_{r=R}. \quad (24)$$

Здесь  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, U_r^g$  и  $U_\theta^g$  — компоненты тензора напряжений, радиальная и касательная компоненты массовой скорости:

$$\sigma_{rr} = \mu_g \left( 2 \frac{\partial U_r^g}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_g \right), \\ \sigma_{r\theta} = \mu_g \left( \frac{\partial U_\theta^g}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^g}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^g}{y} \right).$$

С учетом приведенных выше выражений получаем, что общая сила будет складываться из силы вязкого сопротивления среды  $\mathbf{F}_\mu$  и фотофоретической силы  $\mathbf{F}_{ph}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \varepsilon \mathbf{F}_{ph}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{F}_\mu = 6\pi R \mu_{g\infty} U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z$ ,  $\mathbf{F}_{ph} = -6\pi R \mu_{g\infty} f_{ph} J \mathbf{n}_z$ ;  $\mathbf{n}_z$  — единичный вектор в направлении оси  $OZ$ .

Значения коэффициентов  $f_\mu$  и  $f_{ph}$  могут быть оценены с помощью выражений

$$f_\mu = \frac{2 N_2 + C_m \operatorname{Kn} N_4}{3 N_1 + C_m \operatorname{Kn} N_3}, \quad (26)$$

$$f_{ph} = \frac{4}{3} K_{TS} \frac{v_{gS}}{\lambda_{pS} \delta T_{g\infty}} \frac{G_1}{N_1 + C_m \operatorname{Kn} N_3} \times \\ \times \left\{ 1 + \operatorname{Kn} \left[ \beta'_{RT} + \beta_{RT}^E - (\beta_{RT} - \beta_{RT}^E) \left( 2 - \frac{\alpha \ell^{(S)}}{1+\alpha} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 C_V^T \frac{G_4}{G_1} \left( 1 - C_m \operatorname{Kn} \frac{G_4^I + G_1 - G_4}{G_4} \right) \right] \right\}.$$

Приравнивая результирующую силу  $\mathbf{F}$  к нулю, получаем следующее выражение для скорости фотофореза  $\mathbf{U}_{ph}$  ( $\mathbf{U}_{ph} = -\mathbf{U}_\infty$ ) твердой умеренно крупной нагретой частицы сферической формы:

$$\mathbf{U}_{ph} = -h_{ph} J \mathbf{n}_z, \quad (27)$$

где  $h_{ph} = f_{ph} / f_\mu$ .

При оценке коэффициентов  $f_\mu$ ,  $f_{ph}$  и  $h_{ph}$  необходимо учитывать, что индексом «S» обозначены значения физических величин, взятые при средней относительной температуре поверхности частицы  $T_{ps}$ , которая определяется по формуле (11); функции

$$G_1(y), G_1^I(y), G_1^{II}(y), G_2(y), G_2^I(y), G_2^{II}(y), \\ G_3(y), G_3^I(y), G_3^{II}(y), N_1(y), N_2(y), N_3(y) \text{ и } N_4(y)$$

берутся при  $y = 1$ :

$$N_1(1) = G_1(1)G_2^I(1) - G_2(1)G_1^I(1), \\ N_2(1) = G_1(1)G_3^I(1) - G_3(1)G_1^I(1), \\ N_3(1) = G_2(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_2^{II}(1) + \\ + \left( 2 + \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha} \right) (G_2(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_2^I(1)), \\ N_4(1) = G_3(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_3^{II}(1) + \\ + \left( 2 + \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha} \right) (G_3(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_3^I(1)).$$

Полученные выше формулы можно использовать и при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы. В случае, когда величина нагрева поверхности частицы мала, т.е. средняя температура поверхности по величине незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от частицы ( $\Gamma_0 \rightarrow 0$ ), зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры можно пренебречь, и тогда ( $y = 1$ ) имеем:

$$\begin{aligned}
G_1 &= 1, G_1^I = -3, G_1^{II} = 12, G_1^{III} = -60, \\
G_2 &= 1, G_2^I = -1, G_2^{II} = 2, G_2^{III} = -6, \\
G_3 &= 1, G_3^I = 0, G_3^{II} = 0, G_3^{III} = 0, \\
N_1 &= 2, N_2 = 3, N_3 = 6 \text{ и } N_4 = 6.
\end{aligned}$$

В этом случае формулы для силы и скорости фотофореза совпадают с результатами [23].

Представляют интерес численные оценки влияния нагрева поверхности аэрозольной частицы на фотофорез. На рис. 1 и 2 приведены кривые, связывающие значения

$$\phi = f_{ph}/f_{ph}|_{T_{pS}=273 \text{ К}}; \quad \psi = h_{ph}/h_{ph}|_{T_{pS}=273 \text{ К}}$$

при

$$f_{ph}|_{T_{pS}=273 \text{ К}} = 1,15 \cdot 10^{-10}, \quad h_{ph}|_{T_{pS}=273 \text{ К}} = 1,38 \cdot 10^{-10}$$

со значениями  $T_{pS}$  для умеренно крупных частиц меди радиусом  $R = 5$  мкм, движущихся в воздухе при нормальных условиях.

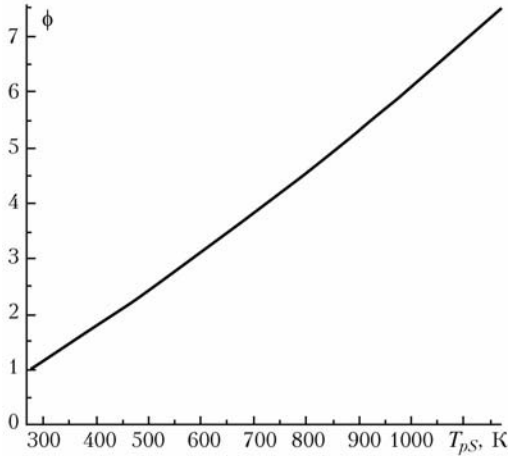


Рис. 1. Кривая зависимости функции  $\phi$  от средней температуры поверхности частицы  $T_{pS}$

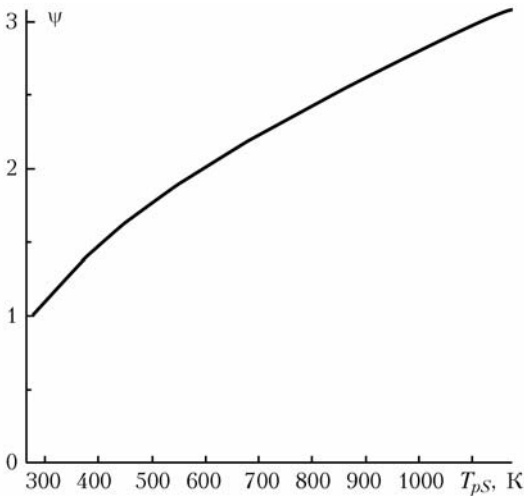


Рис. 2. Кривая зависимости функции  $\psi$  от средней температуры поверхности частицы  $T_{pS}$

Чтобы проиллюстрировать зависимость  $\mathbf{F}_{ph}$  и  $\mathbf{U}_{ph}$  от интенсивности падающего излучения, рассмотрим наиболее простой случай – частица поглощает падающее на нее излучение как черное тело. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной  $\delta R \ll R$ , прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной  $\delta R$  определяется с помощью формулы [14]:

$$q_p = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R} \cos\theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, R - \delta R \leq r \leq R, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (28)$$

В этом случае интегралы легко считаются:

$$\int_V q_p dV = \pi R^2 I_0, \quad \int_V q_p z dV = -\frac{2}{3} \pi R^3 I_0,$$

и мы получаем следующие выражения для фотофоретической силы и скорости абсолютно черных умеренно крупных частиц сферической формы:

$$\mathbf{F}_{ph}^* = 3\pi R \mu_{g\infty} f_{ph} I_0 \mathbf{n}_z, \quad (29)$$

$$\mathbf{U}_{ph}^* = \frac{h_{ph}}{2} I_0 \mathbf{n}_z \quad (h_{ph} = f_{ph}/f_u).$$

Средняя температура поверхности частицы  $T_{pS}$  связана с интенсивностью падающего излучения формулой

$$\begin{cases} \left(1 + K_T^T \text{Kn} \frac{\ell^{(S)}}{1 + \alpha}\right) T_{gS} = T_{pS} \\ \frac{\ell^{(S)}}{1 + \alpha} \lambda_{gS} T_{gS} = \frac{R}{4\lambda_{gS}} I_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{g\infty}^4}{\lambda_{gS}} \left[\left(\frac{T_{pS}}{T_{g\infty}}\right)^4 - 1\right]. \end{cases} \quad (30)$$

На рис. 3 и 4 приведены кривые, связывающие значения  $F_{ph}^*$ ,  $U_{ph}^*$  со значениями  $I_0$  для умеренно крупных частиц меди радиусом  $R = 5$  мкм, движущихся в воздухе при нормальных условиях.

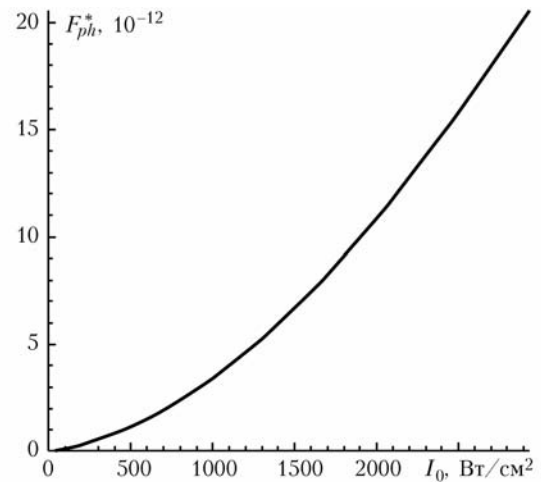


Рис. 3. Кривая зависимости фотофоретической силы  $F_{ph}^*$  от интенсивности падающего излучения  $I_0$

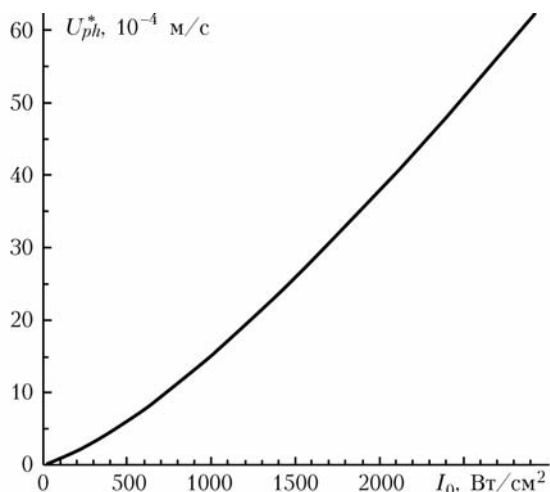


Рис. 4. Кривая зависимости фотофоретической скорости  $U_{ph}^*$  от интенсивности падающего излучения  $I_0$

### Заключение

Формулы (25)–(27) позволяют при известном распределении по объему плотности тепловых источников учесть влияние нагрева поверхности частицы на величину фотофоретической силы и скорости при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом степенного вида зависимости вязкости и теплопроводности от температуры. Полученные формулы носят наиболее общий характер.

Из формул (25)–(27) видно, что величина и направление силы и скорости фотофореза определяются величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников  $\int_V q_p z dV n_z$ .

В тех случаях, когда дипольный момент отрицательный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к источнику излучения), частица движется в направлении падающего излучения. Если дипольный момент положительный (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы), частица будет двигаться навстречу направлению распространения излучения. Для вычисления интеграла необходимо знать величину  $q_p$ , которая определяется из решения электродинамической задачи [1, 6, 14]. В настоящее время разработаны численные методы, позволяющие найти величину дипольного момента плотности тепловых источников, например в работе [24] приводится листинг программы.

Из рис. 1–4 видно, что сила и скорость фотофореза нелинейно возрастают с увеличением интенсивности излучения, что обусловлено зависимостью коэффициентов молекулярного переноса и плотности от температуры. В случае малых перепадов наблюдается линейный характер зависимости, что совпадает с известными результатами [2, 4, 6, 12].

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы научно-образовательного центра «Управляемые электромагнитные процессы в конден-

сированных средах» (Госконтракт № 02.740.11.0545) и ГК № 16.518.11.7058.

1. Волковицкий О.А., Седунов Ю.С., Семенов Л.П. Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 300 с.
2. Вальдберг А.Ю., Исянов П.М., Яламов Ю.И. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями. СПб.: НИИОГАЗ-фильтр, 1993. 235 с.
3. Кабанов М.В. Лазерное зондирование промышленных аэрозолей. Новосибирск: Наука, 1986. 185 с.
4. Кутуков В.Б., Яламов Ю.И. Нелинейные эффекты при распространении лазерного излучения в атмосфере. Томск: Изд-во ТГУ, 1977. С. 145–147.
5. Pueshel R.L., Verma S., Rohatschek M., Ferry G.V., Boiadjeva N., Hovard S.D., Strawa A.W. Vertical transport of anthropogenic soot aerosol into the middle atmosphere // J. Geophys. Res. D. 2000. V. 105, N 3. P. 3727–3736.
6. Береснев С.А., Ковалев Ф.Д., Кочнева Л.Б., Рунков В.А., Суетин П.Е., Черемисин А.А. О возможности фотофоретической левитации частиц в стратосфере // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16, № 1. С. 52–57.
7. Chyi-Yeou Soong, Wen-Ken Li, Chung-Ho, Pei-Yuan Tzeng. Effekt of thermal stress slip on microparticle photophoresis in gaseous media // Opt. Lett. 2010. V. 35, N 5. P. 625–627.
8. Kassoy D.R., Adomcon T.C., Messiter J.R., Messiter A.F. Compressible Low Reynolds Number Flow around a Sphere // J. Phys. Fluids. 1966. V. 9, N 4. P. 671–681.
9. Малай Н.В., Щукин Е.Р. Фотофоретическое и термомодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц // Инж. физ. ж. 1988. Т. 54, № 4. С. 628–634.
10. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // Прикл. мех. и техн. физ. 2008. № 1. С. 74–80.
11. Бретинайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
12. Береснев С.А., Кочнева Л.Б. Фактор асимметрии поглощения излучения и фотофорез аэрозолей // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16, № 2. С. 134–141.
13. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 207 с.
14. Борен К.Ф., Хафмен Д.Р. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
15. Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 1047–1050.
16. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // Ж. техн. физ. 1982. Т. 52, вып. 11. С. 2253–2262.
17. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
19. Шейндлин А.Е. Излучательные свойства твердых материалов: Справочник. М.: Энергия, 1974. 471 с.
20. Кордингстон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. 474 с.



21. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. III. Ч. II. 672 с.
22. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 703 с.
23. *Малай Н.В., Шуккин Е.Р., Плесканев А.А., Стукалов А.А.* Особенности фотофоретического движения умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19, № 5. С. 413–418.
24. *Рязанов К.С., Попов И.В., Малай Н.В.* Вычисление распределения поглощаемой электромагнитной энергии внутри частиц сферической формы: Свид. о госуд. регистрации программы для ЭВМ № 2010616043 от 14.09.2010.

*N.V. Malay, A.V. Limanskaya, E.R. Shchukin, A.A. Stukalov.* **Photophoresis of heated moderately large aerosol spherical particles.**

In the Stokes approximation the stationary motion of large solid aerosol spherical particle in gas, on which powerful electromagnetic radiation falls, is described theoretically. By consideration of the motion it was assumed that average temperature of the particle surface significantly differs from the temperature of gaseous medium. During solution gas-dynamic equations analytical expressions for the force and velocity of photophoresis were derived taking into account the dependence of gaseous medium density, viscosity, and heat conduction on temperature.