<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 4 (1995)

РАССЕЯНИЕ И ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 535.36

Л.Е. Парамонов

МАТРИЦА ОСЛАБЛЕНИЯ АНСАМБЛЯ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОРИЕНТАЦИЯМ

Приведены аналитические выражения для матрицы ослабления ансамбля частиц произвольной формы с произвольной, квадратично интегрируемой функцией распределения по ориентациям. Был использован метод **Т**-матриц.

Введение

Ослабление и поляризация света, прошедшего слой частиц в атмосфере, межзвездном пространстве, являются важным источником информации о свойствах частиц. Для интерпретации этих данных, разработки экспрессных методов оценки оптических свойств частиц, а также для их идентификации существенным является выбор модели ансамбля частиц.

В реальных условиях частицы, как правило, являются несферическими, к тому же ряд физических факторов, например, магнитное поле, гравитация, направленные потоки воздуха и т.д., формируют ориентационную структуру ансамбля частиц с произвольной функцией распределения частиц по ориентациям.

В настоящей статье аналитические выражения для матрицы ослабления ансамбля частиц произвольной формы с произвольной, квадратично интегрируемой функцией распределения частиц по ориентациям находятся с помощью метода **Т**-матриц.

1. Метод Т-матриц

При решении задач дифракции электромагнитного излучения на несферических частицах широко используется метод **Т**-матриц, разработанный Уотерменом [1, 2], для задач рассеяния электромагнитного излучения (см., например, материалы конференции, посвященной этому методу [3]). В литературе он встречается у многих авторов под названием EBCM (extended boundary condition method) – метод расширенных граничных условий. Альтернативное обоснование метода **Т**-матриц с использованием принципа эквивалентности Щелкунова [4] приведено в [5]. Отметим, что метод естественно и последовательно может использоваться и в случае неоднородных частиц [6–8]. Применяемые авторами различные системы векторных сферических гармоник (линейно независимых решений векторного уравнения Гельмгольца [9]) порождают различные представления метода **Т**-матриц [5, 8, 10]. Отметим, что выбор сферических гармоник в [5, 8] не является удачным с точки зрения дальнейшего развития и применения метода **Т**-матриц, например для ансамблей частиц с различной ориентационной структурой. Учитывая инвариантность векторного уравнения Гельмгольца относительно вращения системы координат [11], выбор сферических гармоник следует осуществлять на основе свойства инвариантности (в смысле замкнутости), а именно: при вращении системы координат сферические гармоники типа $\mathbf{M}_{\sigma mn}$, $\mathbf{N}_{\sigma mn}$ [9] должны преобразовываться независимо друг от друга.

Искомым свойствам инвариантности удовлетворяют следующие векторные сферические гармоники [10,12]:

$$\mathbf{M}_{mn}(k\mathbf{r}) = (-1)^m d_n h_n^{(1)}(kr)\, \mathbf{C}_{mn}(\theta) \exp(im\varphi); \tag{1}$$

$$\mathbf{N}_{mn}(k\mathbf{r})=(-1)^m d_n \left(\frac{n(n+1)}{kr} h_n^{(1)}(kr)\, \mathbf{P}_{mn}(\theta) + \frac{1}{kr} \left[kr\, h_n^{(1)}(kr) \right]' \mathbf{B}_{mn}(\theta) \right) \exp(im\varphi); \tag{2}$$

$$\mathbf{B}_{mn}(\theta) = \mathbf{i}_\theta \frac{d}{d\theta} d^n_{0m}(\theta) + \mathbf{i}_\varphi \frac{im}{sin\theta} d^n_{0m}(\theta); \tag{3}$$

$$\mathbf{C}_{mn}(\theta) = \mathbf{i}_\theta \frac{im}{sin\theta} d^n_{0m}(\theta) - \mathbf{i}_\varphi \frac{d}{d\theta} d^n_{0m}(\theta); \tag{4}$$

$$\mathbf{P}_{mn}(\theta) = \mathbf{i}_r d^n_{0m}(\theta); \tag{5}$$

$$d_n = \left[\frac{(2\,n+1)}{4\,n(n+1)}\right]^{1/2}.$$

Определение и принципиальные свойства функций Вигнера [13] $d^n_{mm'}(\theta)$ приведены в Приложении; $h^{(1)}_n(kr)$ – сферическая функция Ханкеля 1-го рода; $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ – орты в сферической системе координат; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число среды; λ – длина волны излучения. Аналогичным образом определяются Rg $\mathbf{M}_{mn}$, Rg $\mathbf{N}_{mn}$, где сферические функции Ханкеля заменены сферическими функциями Бесселя – $j_n(kr)$.

Разложение падающей на частицу плоской электромагнитной волны имеет вид (множитель $\exp(-i\omega\, t)$ опускается на протяжении всей статьи)

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[a_{mn}\,\mathrm{Rg}\,\mathbf{M}_{mn}(k\mathbf{r}) + b_{mn}\,\mathrm{Rg}\,\mathbf{N}_{mn}(k\mathbf{r})\right]. \tag{6}$$

Коэффициенты разложения падающей плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении (u, υ), имеют вид [10]

$$\begin{aligned} a_{mn} &= 4(-1)^m\, i^n\, d_n\, \mathbf{C}^*_{mn}(u)\, \mathbf{E}_i \exp(-im\ \upsilon); \\ b_{mn} &= 4(-1)^m\, i^{n-1}\, d_n\, \mathbf{B}^*_{mn}(u)\, \mathbf{E}_i \exp(-im\ \upsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{E}_i$ – вектор линейной поляризации.

Для рассеянного поля имеем следующее разложение:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[\, p_{mn}\mathbf{M}_{mn}(k\mathbf{r}) + q_{mn}\mathbf{N}_{mn}(k\mathbf{r})\right],\ \ r > r_0, \tag{8}$$

где r_0 – радиус сферы, описанной вокруг частицы.

Линейное преобразование между коэффициентами разложения рассеянного и падающего полей задается следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left[T^{11}_{mnm'n'}\, a_{m'n'} + T^{12}_{mnm'n'}\, b_{m'n'}\right], \\ q_{mn} &= \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left[T^{21}_{mnm'n'}\, a_{m'n'} + T^{22}_{mnm'n'}\, b_{m'n'}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что рассмотренное в [10] представление метода **T**-матриц имеет ряд преимуществ по сравнению с представлением [5], которые выражаются в использовании векторных сферических гармоник, инвариантных относительно вращения системы координат, а также в симметричной форме представления основных соотношений.

2. Вращение системы координат

Произвольный поворот координатной системы относительно начала координат полностью определяется заданием трех вещественных параметров. В качестве этих параметров, характеризующих поворот, наиболее часто употребляются углы Эйлера α, β, γ [13].

Обозначим индексами 1 и 2 системы координат, а также величины, задаваемые в этих системах, соответственно, при этом углы Эйлера α, β, γ определяют положение 1-й координатной системы относительно 2-й.

Как отмечалось в предыдущем разделе, векторные сферические гармоники (1), (2) замкнуты относительно вращения системы координат [10]:

$$\mathbf{M}_{mn}(kr, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{m'=-n}^{n} D^{n}_{m'm}(\alpha\,\beta\,\gamma)\, \mathbf{M}_{m'n}(kr, \theta_2, \varphi_2), \tag{10}$$

обратное преобразование

$$\mathbf{M}_{mn}(kr, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{m'=-n}^{n} D^{n-1}_{m'm}(\alpha\,\beta\,\gamma)\, \mathbf{M}_{m'n}(kr, \theta_1, \varphi_1), \tag{11}$$

где $D^{n}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$ – D-функции Вигнера [13] (см. Приложение).

Аналогичные (10), (11) соотношения имеют место и для $\mathbf{N}_{mn}$, Rg $\mathbf{M}_{mn}$, Rg $\mathbf{N}_{mn}$.

Представим (9) в системе координат 1 в виде

$$\begin{bmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}^{12}\\ \mathbf{T}^{21} & \mathbf{T}^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Отметим, что $\mathbf{T}$-матрица (12) в фиксированной системе координат является инвариантом относительно параметров падающего излучения. В системе координат 2, с учетом (10) и (11), а также обозначая через $\mathbf{D}$ линейное преобразование с элементами $D_{mnm'n'} = \delta_{nn'} D^{n}_{mm'}(\alpha\beta\gamma)$, получим [10]

$$\begin{bmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D} & 0\\ 0 & \mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}^{12}\\ \mathbf{T}^{21} & \mathbf{T}^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}^{-1} & 0\\ 0 & \mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}, \tag{13}$$

что эквивалентно

$$^{2}\mathbf{T}^{ij} = \mathbf{D}^{1}\, \mathbf{T}^{ij}\, \mathbf{D}^{-1}, \quad i, j = 1, 2, ..., \tag{14}$$

$$^{2}T^{ij}_{mnm'n'} = \sum_{m_1=-n}^{n} \sum_{m_2=-n'}^{n'} D^{n}_{mm_1}(\alpha\,\beta\,\gamma)\, {}^{1}T^{ij}_{m_1 n m_2 n'}\, D^{n'-1}_{m_2 m'}(\alpha\,\beta\,\gamma). \tag{15}$$

Используя свойство унитарности D-функций Вигнера (П3), найдем инварианты $\mathbf{T}$-матрицы относительно вращения системы координат. При фиксированных n, n', используя (П3) и (15), получим

$$\sum_{m=-n}^{n} {}^{2}T^{ij}_{mnmn} = \sum_{m_1=-n}^{n} \sum_{m_2=-n}^{n} {}^{1}T^{ij}_{m_1 n m_2 n} \sum_{m=-n}^{n} D^{n}_{mm_1}(\alpha\,\beta\,\gamma)\, D^{n-1}_{m_2 m}(\alpha\,\beta\,\gamma) = \sum_{m=-n}^{n} {}^{1}T^{ij}_{mnmn}; \tag{16}$$

$$\sum_{m=-n}^{n} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left|{}^{2}T^{ij}_{mnm'n'}\right|^2 = \sum_{m=-n}^{n} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left|{}^{1}T^{ij}_{mnm'n'}\right|^2, \tag{17}$$

и как следствие [12]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} {}^{2}T^{ij}_{mnmn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} {}^{1}T^{ij}_{mnmn}; \tag{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left|{}^{2}T^{ij}_{mnm'n'}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left|{}^{1}T^{ij}_{mnm'n'}\right|^2, \tag{19}$$

$i, j = 1, 2.$

Таким образом, при вращении системы координат след подматриц (16) и след их аналогов (18), а также сумма квадратов модулей элементов подматриц (17) и подматриц $\mathbf{T}^{ij}$ являются инвариантами $\mathbf{T}$-матрицы. То же свойство имеет место и для $\mathbf{T}$-матрицы в целом.

3. Амплитудная матрица рассеяния

Пусть направление распространения излучения характеризуется единичным вектором $\mathbf{n} = (\theta, \varphi)$, θ и φ – составляющие электрического поля обозначаются индексами 1 и 2 соответственно.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i \exp(i\, k\, \mathbf{n}_i\, \mathbf{r}) = \left(E_1^i \mathbf{i}_\theta + E_2^i \mathbf{i}_\varphi\right) \exp(i\, k\, \mathbf{n}_i\, \mathbf{r}), \tag{20}$$

падающую на частицу.

В волновой зоне ($kr \gg 1$) рассеянная волна имеет следующие составляющие [10] (LP-представление)

$$\begin{bmatrix} E_1^s \\ E_2^s \end{bmatrix} = \frac{\exp(i\, k\, r)}{k\, r}\, \mathbf{S}(\mathbf{n}_s;\, \mathbf{n}_i) \begin{bmatrix} E_1^i \\ E_2^i \end{bmatrix}, \tag{21}$$

где $\mathbf{S}$ – амплитудная матрица рассеяния.

Циклические составляющие электрического поля определяются следующим образом [14] (CP-представление):

$$\begin{bmatrix} E_{+1} \\ E_{-1} \end{bmatrix} = 2^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Соответствующая амплитудная матрица в CP-представлении имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{+1+1} & C_{+1-1} \\ C_{-1+1} & C_{-1-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{11} + iS_{12} - iS_{21} + S_{22} & S_{11} - iS_{12} - iS_{21} - S_{22} \\ S_{11} + iS_{12} + iS_{21} - S_{22} & S_{11} - iS_{12} + iS_{21} + S_{22} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Используя (6)–(9), (21), а также асимптотику функции $h_n^{(1)}(kr)$ на бесконечности, получим диадное представление амплитудной матрицы рассеяния $\mathbf{S}(\mathbf{n}_s;\, \mathbf{n}_i)$ [3, 10, 13]

$$\mathbf{S}(\mathbf{n}_s;\, \mathbf{n}_i) = 4 \sum_{mnm'n'} i^{n'-n-1} (-1)^{m+m'}\, d_n d_{n'} \exp[i(m\varphi_s - m'\varphi_i)] \left\{ \left[T^{11}_{mnm'n'}\, \mathbf{C}_{mn}(\theta_s) + iT^{21}_{mnm'n'}\, \mathbf{B}_{mn}(\theta_s)\right] \mathbf{C}^*_{m'n'}(\theta_i) + \right.$$

$$\left. + \left[T^{12}_{mnm'n'}\, \mathbf{C}_{mn}(\theta_s) + i\, T^{22}_{mnm'n'}\, \mathbf{B}_{mn}(\theta_s)\right] \mathbf{B}^*_{m'n'}(\theta_i)/i \right\}. \tag{24}$$

Опуская простые, но громоздкие выкладки, запишем выражения для элементов амплитудной матрицы в CP-представлении, используя (23), (24), (П6),

$$C_{+1+1} = \frac{-1}{2} \sum_{mnm'n'} t_{nn'}\, A_{mm'}(\varphi_s, \varphi_i)\, d^n_{1m}(\theta_s)\, d^{n'}_{1m'}(\theta_i) \left(T^{11} + T^{12} + T^{21} + T^{22}\right),$$

$$C_{+1-1} = \frac{-1}{2} \sum_{mnm'n'} t_{nn'}\, A_{mm'}(\varphi_s, \varphi_i)\, d^n_{1m}(\theta_s)\, d^{n'}_{-1m'}(\theta_i) \left(T^{11} - T^{12} + T^{21} - T^{22}\right),$$

$$C_{-1+1} = \frac{-1}{2} \sum_{mnm'n'} t_{nn'}\, A_{mm'}(\varphi_s, \varphi_i)\, d^n_{-1m}(\theta_s)\, d^{n'}_{1m'}(\theta_i) \left(T^{11} + T^{12} - T^{21} - T^{22}\right), \tag{25}$$

$$C_{-1-1} = \frac{-1}{2} \sum_{mnm'n'} t_{nn'}\, A_{mm'}(\varphi_s, \varphi_i)\, d^n_{-1m}(\theta_s)\, d^{n'}_{-1m'}(\theta_i) \left(T^{11} - T^{12} - T^{21} + T^{22}\right),$$

где

$$t_{nn'} = i^{n'-n-1}[(2\,n + 1)(2\,n' + 1)]^{1/2};$$

$$A_{mm'}(\varphi_s, \varphi_i) = (-1)^{m+m'} \exp[i(\, m\varphi_s - m'\varphi_i)]; \tag{26}$$

у элементов $\mathbf{T}^{ij}$-матриц для краткости были опущены нижние индексы.

4. Уравнение переноса излучения

В этой статье используем параметры Стокса падающего и рассеянного полей в CP-представлении [14]

$$I_2 = E_{-1} E^*_{+1} = 1/2\ (Q - iU),\ \ I_0 = E_{+1} E^*_{+1} = 1/2\ (I - V),$$
$$I_{-0} = E_{-1} E^*_{-1} = 1/2\ (I + V),\ \ I_{-2} = E_{+1} E^*_{-1} = 1/2\ (Q + iU), \tag{27}$$

где I, Q, U, V – параметры Стокса в LP-представлении [15].

В разреженной среде, состоящей из дискретных рассеивателей, произвольно расположенных в пространстве, распространение электромагнитного излучения с учетом состояния поляризации описывается уравнением переноса [15, 16]

$$\frac{d\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i)}{d\,s} = n_d(\mathbf{r})\left[\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i)\,\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i) + \int\limits_{4\pi} d\mathbf{n}_s\,\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_s)\,\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_s)\right], \tag{28}$$

где $\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ – вектор Стокса; $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ – матрица ослабления; $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_s)$ – матрица рассеяния в точке $\mathbf{r}$; $n_d(\mathbf{r})$ – численная плотность частиц; производная в левой части берется вдоль направления $\mathbf{n}_i$.

Пренебрегая вторым членом, описывающим эффекты многократного рассеяния, рассмотрим уравнение для когерентной составляющей в направлении $\mathbf{n}_i$. В этом случае уравнение переноса имеет вид

$$\frac{d\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i)}{d\,s} = n_d(\mathbf{r})\,\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i)\,\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i). \tag{29}$$

Численное решение (29) не представляет сложности при известных $n_d(\mathbf{r})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$. При параметризации $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ и начальном условии

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}(0), \mathbf{n}_i) = \mathbf{I}_0 \tag{30}$$

решение задачи (29), (30) для однородной среды имеет вид

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}(s), \mathbf{n}_i) = \exp\left[\int\limits_0^s d\,s' n_d(\mathbf{r}(s'))\mathbf{K}(\mathbf{r}(s'), \mathbf{n}_i)\right]\mathbf{I}_0. \tag{31}$$

Экспоненциальная функция, аргументом которой является матрица, определяется как

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n/n!. \tag{32}$$

Выражение (31) можно рассматривать как обобщенный закон Бугера для поляризованного излучения.

5. Матрица ослабления ансамбля частиц произвольной формы с произвольной функцией распределения по ориентациям

Возвращаясь к исходной задаче, отметим, что для нахождения матрицы ослабления когерентной составляющей ансамблем частиц с различной ориентацией необходимо усреднить соответствующие матрицы ослабления одиночных частиц с учетом функции плотности распределения по ориентациям.

Используя выражение матрицы ослабления в LP-представлении [16], а также формулы перехода к CP-представлению [17, 18], получим выражение для матрицы ослабления в CP-представлении

$$
\mathbf{K}(\mathbf{n}_i) = -\,i\,\frac{2\pi}{k^2}\begin{bmatrix} <C_{+1+1} - C^*_{-1-1}> & <C_{+1-1}> & <-C^*_{-1+1}> & 0 \\ <C_{-1+1}> & <C_{-1-1} - C^*_{-1-1}> & 0 & <-C^*_{-1+1}> \\ <-C^*_{+1-1}> & 0 & <C_{+1+1} - C^*_{+1+1}> & <C_{+1-1}> \\ 0 & <-C^*_{+1-1}> & <C_{-1+1}> & <C_{-1-1} - C^*_{+1+1}> \end{bmatrix}, \tag{33}
$$

где выражение в скобках означает усреднение соответствующих выражений (25) при аргументе ($\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_i$) и с учетом распределения по ориентациям. Для оценки элементов матрицы ослабления (33) необходимо и достаточно знания $<T^{ij}_{mnm'n'}>$ с последующей подстановкой в формулу (33).

Пусть имеется некоторая система координат, в которой направления рассеянного и падающего излучений описываются вышеотмеченными параметрами, и назовем ее лабораторной системой координат, выбор которой зависит от условий наблюдения и теоретических обстоятельств.

Пусть $p(\alpha\beta\gamma)$ – произвольная функция плотности распределения частиц по ориентациям, квадратично интегрируемая в области [0, 2π]×[0, π]× ×[0, 2π], в этом случае имеет место следующее разложение [13]:

$$
p(\alpha\beta\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{m'=-n}^{n} \frac{2\,n+1}{8\pi^2}\, p^n_{mm'}\, D^n_{mm'}(\alpha\beta\gamma), \tag{34}
$$

где коэффициенты разложения (см.(П4))

$$
p^n_{mm'} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma\, p(\alpha\beta\gamma)\, D^{n*}_{mm'}(\alpha\beta\gamma). \tag{35}
$$

Обозначим через **A** систему координат, связанную с частицей, относительно которой рассчитывается **T**-матрица частицы. Ориентация частицы определяется углами α, β, γ, которые описывают поворот лабораторной системы координат к системе координат **A**.

Усредненные по ориентациям $\mathbf{T}^{ij}$-матрицы в лабораторной системе координат, с учетом (15), (П2), (П3), (П5), (П7), (П8) и ортогональности функций exp(imα), exp(imγ), имеют вид

$$
<T^{ij}_{mnm'n'}> = \sum_{m_1 m_2} (-1)^{m'-m_2} \sum_{l=|n-n'|}^{n+n'} p^l_{m-m'\; m_2-m_1}\, C^{lm-m'}_{nm\, n'-m'}\, C^{lm_1-m_2}_{nm_1\, n'-m_2}\, T^{ij}_{m_1 n m_2 n'}(A), \tag{36}
$$

где $C^{nm}_{n_1 m_1 n_2 m_2}$ – коэффициенты Клебша–Гордона [13].

Матрица ослабления ансамбля частиц может быть получена после подстановки выражения (36) в (25) и (33).

Рассмотрим некоторые следствия формулы (36).

а) Частный случай $p(\alpha\beta\gamma) = p(\beta)$ был рассмотрен в [19]; с учетом (35) формула (36) упрощается до [19] ($m = m'$, $m_1 = m_2$)

$$
<T^{ij}_{mnm'n'}> = \delta_{mm'} \sum_{m_1=-M}^{M} (-1)^{m-m_1} \sum_{l=|n-n'|}^{n+n'} p^l_{00}\, C^{l0}_{nm\, n'-m}\, C^{l0}_{nm_1\, n'-m_1}\, T^{ij}_{m_1 n m_1 n'}(A), \tag{37}
$$

где $M = \min(n, n')$. Этот случай имеет место, когда ориентирующий фактор (в [19] – магнитное поле) единственный.

б) Для хаотически ориентированных частиц $p(\alpha\beta\gamma) = 1/8\pi^2$ в разложении (29) отличен от нуля один коэффициент $p^0_{00} = 1$. Используем соотношение [13]

$$
C^{00}_{nm\, n-m} = (-1)^{n-m}(2\,n+1)^{-1/2}, \tag{38}
$$

а также выберем направление падающего излучения вдоль оси Z лабораторной системы координат с $\theta_i = \theta_s = 0$, $\varphi_i = \varphi_s = 0$. В данном случае матрица ослабления инвариантна относительно направления падающего излучения, если векторы Стокса падающего и прошедшего излучения заданы относительно одной плоскости, что достигается поворотом плоскости референции, например для вектора Стокса падающего излучения.

Преобразование параметров вектора Стокса при повороте плоскости референции на угол ψ по направлению часовой стрелки, относительно направления распространения, описывается соотношениями [17]:

$$I_n(\psi) = \exp(-\,\mathrm{i}n\psi)\, I_n(0), \quad n = 2, 0, -0, -2. \tag{39}$$

Матрица ослабления с учетом соотношений [13]

$$d^{\,n}_{-11}(0) = d^{\,n}_{1-1}(0) = 0, \quad d^{n}_{11}(0) = d^{\,n}_{-1-1}(0) = 1 \tag{40}$$

имеет диагональный вид, где

$$\begin{aligned} <C_{+1+1}> &= \frac{1}{2}\, i \sum_{mn} \left(T^{11}_{mnmn}(A) + T^{12}_{mnmn}(A) + T^{21}_{mnmn}(A) + T^{22}_{mnmn}(A)\right); \\ <C_{-1-1}> &= \frac{1}{2}\, i \sum_{mn} \left(T^{11}_{mnmn}(A) - T^{12}_{mnmn}(A) - T^{21}_{mnmn}(A) + T^{22}_{mnmn}(A)\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Выражения (41) инвариантны относительно выбора системы координат **A** (см. (18)).

В LP-представлении матрица ослабления имеет диагональные элементы, равные $-\,C_{\mathrm{ext}}$ (сечение ослабления), C_{ext} равно полусумме K_{00}, K_{-0-0} – элементов матрицы ослабления в CP-представлении и [20]

$$C_{\mathrm{ext}} = -\,(2\pi/k^2)\, \mathrm{Re}_{mn}\left(T^{11}_{mnmn}(A) + T^{22}_{mnmn}(A)\right). \tag{42}$$

в) Для строго ориентированного ансамбля частиц с $p(\alpha\beta\gamma) = \delta(\alpha - \alpha_0)\delta(\cos\beta - \cos\beta_0)\delta(\gamma - \gamma_0)$, согласно (35) и определению дельта-функции Дирака $\delta(x)$, $p^n_{mm'} = D^{n*}_{mm'}(\alpha_0\beta_0\gamma_0)$. Используя свойства D-функций Вигнера (см. Приложение), а также (15), получим в правой части (37) выражение для $\mathbf{T}^{ij}$- матрицы одиночной частицы с ориентацией $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ в лабораторной системе координат.

Используя полученные результаты, приведем вывод формулы сечения ослабления для ансамбля частиц произвольной формы с распределением по ориентациям (34).

6. Сечение ослабления ансамбля частиц

Запишем формулу для сечения ослабления одиночной частицы в лабораторной системе координат в виде [21]

$$C_{\mathrm{ext}} = -\frac{\pi}{k^2}\, \mathrm{Re}\left\{\left(\mathbf{a}^*[\mathbf{T}^{11}\mathbf{a} + \mathbf{T}^{12}\mathbf{b}]\right) + \left(\mathbf{b}^*[\mathbf{T}^{21}\mathbf{a} + \mathbf{T}^{22}\mathbf{b}]\right)\right\}, \tag{43}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{a}^*\mathbf{p})$ определяется формулой

$$(\mathbf{a}^*\mathbf{p}) = \sum_{mn} \mathbf{a}^*_{mn}\, p_{mn}. \tag{44}$$

Учитывая линейность выражения (43), относительно элементов **T**-матрицы при неизменных **a** и **b** в выбранной системе координат, выражение сечения ослабления ансамбля частиц имеет тот же вид (43), где $\mathbf{T}^{ij}$-матрицы заменяются $<\mathbf{T}^{ij}>$-матрицами (36) со всеми вытекающими следствиями.

Приведем явный вид коэффициентов разложения падающей плоской электромагнитной волны произвольного направления распространения и поляризации в лабораторной системе координат. При этом считаем, что поворот лабораторной системы координат в систему координат, где ось **Z** – направление распространения волны, а ось **X** – направление вектора поляризации ($\mathbf{E}_i = \mathbf{i}_u$), описывается углами Эйлера α_i, β_i, γ_i. Коэффициенты разложения (7) в системе координат, связанной с распространением излучения при поляризации вдоль оси **X**, имеют простой вид (см.(3), (4), (7) и (П6))

$$a_{mn}=\delta_{m\pm1}\, i^{n+1}(2\,n+1)^{1/2};\tag{45}$$

$$b_{mn}=m\,\delta_{m\pm1}\, i^{n+1}(2\,n+1)^{1/2}.$$

Учитывая (10), коэффициенты разложения в лабораторной системе координат имеют вид

$$a_{mn}=i^{n+1}\,(2\,n+1)^{1/2}\left[D^{n}_{m1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)+D^{n}_{m-1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)\right];\tag{46}$$

$$b_{mn}=i^{n+1}\,(2\,n+1)^{1/2}\left[D^{n}_{m1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)-D^{n}_{m-1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)\right],$$

при поляризации вдоль оси **Y** ($\mathbf{E}_i=\mathbf{i}_\upsilon$)

$$a_{mn}=i^{n}\,(2\,n+1)^{1/2}\left[D^{n}_{m1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)-D^{n}_{m-1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)\right];\tag{47}$$

$$b_{mn}=i^{n}\,(2\,n+1)^{1/2}\left[D^{n}_{m1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)+D^{n}_{m-1}(\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i)\right].$$

Для произвольной эллиптической поляризации падающее излучение может быть представлено в виде линейной комбинации двух когерентных отмеченных волн, то же имеет место и для соответствующих сечений ослабления. Для неполяризованного падающего излучения сечение ослабления равно полусумме сечений ослабления для ортогонально поляризованных падающих волн.

7. Обсуждение и заключение

Как было показано, метод **T**-матриц в сочетании с аппаратом квантовой теории углового момента [13] является адекватным методом для оценки матриц и сечений ослабления ансамблей частиц произвольной формы с произвольной функцией распределения по ориентациям и позволяет заменить трудоемкую процедуру интегрирования аналитическим методом. Отметим, что то же справедливо и для оценки сечений рассеяния [21].

Метод **T**- матриц эффективен для частиц, имеющих форму тела вращения с гладкой поверхностью (численная реализация обсуждается, например, в [22]), для эллипсоидальных частиц [23] расчетное время **T**- матрицы на два порядка превышает таковое для сфероидальных частиц [24].

Для осесимметричных частиц в случае, если ось **Z** системы координат **A** является осью вращения частицы, возможны упрощения, связанные с соотношениями [10, 12]

$$T^{ij}_{mnm'n'}=\delta_{mm'}\,T^{ij}_{mnn'},\quad T^{ij}_{-mnn'}=(-1)^{i+j}\,T^{ij}_{mnn'},\tag{48}$$

что позволяет уменьшить число индексов суммирования в формуле (36) на 1 и сократить в два раза объем вычислений.

Для осесимметричных частиц (например, сфероиды, цилиндры), чьи размеры меньше длины волны падающего излучения, в приближении Рэлея ($n=n'=1$; m, $m'=-1, 0, 1$) элементы **T**-матрицы выражаются в явном виде [10, 24]:

$$T^{ij}_{mnm'n'}=\delta_{i2}\,\delta_{j2}\,\delta_{mm'}\,T_m.\tag{49}$$

В этом случае явный вид имеют и все рассмотренные в статье величины, использование которых позволяет исследовать закономерности распространения поляризованного излучения, например, в средах с анизотропией, обусловленной ориентацией молекул, на основе обобщенного закона Бугера (31).

Полученные результаты могут применяться в теоретических исследованиях оптики атмосферы при оценке ослабления и поляризации излучения, прошедшего слой частиц с различной ориентационной структурой. Для эффективности расчета направление распространения излучения может быть выбрано вдоль оси **Z**, что допускает существенные упрощения (см. (25), (26), (40)).

ПРИЛОЖЕНИЕ

D-функции Вигнера

$D^{n}_{mm'}(\alpha\,\beta\,\gamma)$ – *D*-функции Вигнера, которые определяются как матричные элементы неприводимого представления веса n на группе вращений [11, 13] или как матричные элементы оператора поворота $\mathbf{D}(\alpha\beta\gamma)$ в JM-представлении [13]

$$\langle J\, M \mid \mathbf{D}(\alpha\ \beta\ \gamma) \mid J'\ M'\rangle = \delta_{JJ'}\ D^{J}_{mm'}(\alpha\ \beta\ \gamma). \tag{П1}$$

Функции $D^{n}_{mm'}(\alpha\beta\gamma)$ записываются в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых зависит только от одного угла Эйлера [13],

$$D^{n}_{mm'}(\alpha\ \beta\ \gamma) = \exp(-\mathrm{im}\ \alpha)\ d^{n}_{mm'}(\beta)\ \exp(-\mathrm{im}'\gamma), \tag{П2}$$

где $d^{n}_{mm'}(\beta)$ – функции Вигнера [13], которые удовлетворяют условиям унитарности [13]

$$\begin{gathered}\left[\mathbf{D}^{-1}(\alpha\ \beta\ \gamma)\right]^{n}_{mm'} = \left[\mathbf{D}^{*}(\alpha\ \beta\ \gamma)\right]^{n}_{m'm};\\ \sum_{m=-n}^{n} D^{n}_{mm'}(\alpha\ \beta\ \gamma)\ D^{n*}_{mm_1}(\alpha\ \beta\ \gamma) = \sum_{m=-n}^{n} D^{n}_{mm'}(\alpha\ \beta\ \gamma)\ D^{n-1}_{m_1 m}(\alpha\ \beta\ \gamma) = \delta_{m'm_1}\end{gathered} \tag{П3}$$

и ортогональности

$$\frac{2\,n+1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta\ d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma\ D^{n}_{mm'}(\alpha\ \beta\ \gamma)\ D^{n_1^*}_{m_1 m_1'}(\alpha\ \beta\ \gamma) = \delta_{nn_1}\ \delta_{mm_1}\ \delta_{m'm_1'} \tag{П4}$$

для функций $d^{n}_{mm'}(\beta)$

$$\int_0^{p} \sin\beta\ d\beta\ d^{n}_{mm'}(\beta)\ d^{n'}_{mm'}(\beta) = \frac{2}{2\,n+1}\ \delta_{nn'}. \tag{П5}$$

Функции $d^{n}_{mm'}(\beta)$ удовлетворяют следующим соотношениям [13]:

$$\begin{gathered}\frac{m}{\sin\beta}\ d^{n}_{0m}(\beta)\Big|_{\beta=0} = 1/2\ \delta_{m\pm1}[n(n+1)]^{1/2},\\ \frac{d}{d\,\beta}\ d^{n}_{0m}(\beta)\Big|_{\beta=0} = 1/2\ m\ \delta_{m\pm1}[n(n+1)]^{1/2},\\ \frac{m}{\sin\beta}\ d^{n}_{0m}(\beta) = 1/2\ [n(n+1)]^{1/2}\left[d^{n}_{1m}(\beta) + d^{n}_{-1m}(\beta)\right],\\ \frac{d}{d\,\beta}\ d^{n}_{0m}(\beta) = 1/2\ [n(n+1)]^{1/2}\left[d^{n}_{1m}(\beta) - d^{n}_{-1m}(\beta)\right],\end{gathered} \tag{П6}$$

а также теореме умножения в виде

$$d^{n}_{mm'}(\beta)\ d^{n'}_{m_1 m_1'}(\beta) = {}_{n_1=|n-n'|}^{n+n'} C^{n_1 m+m_1}_{nmn'm_1}\ C^{n_1 m'+m_1'}_{nm'n'm_1'}\ d^{n_1}_{m+m_1\ m'+m_1'}(\beta) \tag{П7}$$

и соотношениям симметрии

$$d^{n}_{mm'}(\beta) = (-1)^{m'-m}\, d^{n}_{-m-m'}(\beta) = (-1)^{m'-m}\, d^{n}_{m'm}(\beta). \tag{П8}$$

Произведение двух D-функций $D^{n_1}_{m_1\,m_1'}(\alpha\beta\gamma)$ и $D^{n_2}_{m_2\,m_2'}(\alpha\beta\gamma)$ может быть записано в виде следующей суммы, называемой рядом Клебша–Гордона [13]:

$$D^{n_1}_{m_1\,m_1'}(\alpha\ \beta\ \gamma)\ D^{n_2}_{m_2\,m_2'}(\alpha\ \beta\ \gamma) = \sum_{n_3=|n_1-n_2|}^{n_1+n_2} C^{n_3 m_1+m_2}_{n_1 m_1 n_2 m_2}\ D^{n_3}_{m_1+m_2\ m_1'+m_2'}(\alpha\ \beta\ \gamma)\ C^{n_3 m_1'+m_2'}_{n_1 m_1'\ n_2 m_2'}. \tag{П9}$$

Рекуррентные соотношения для расчета функций Вигнера и коэффициентов Клебша–Гордона приведены в [13].

1. W a t e r m a n P . C . // Proc. IEEE. 1965. V. 53. P. 805–812.
2. W a t e r m a n P . C . // Phys. Rev. D. 1971. V. 3. P. 825–839.
3. A c o u s t i c , electromagnetic and elastic wave scattering – focus in T-matrix approach / Eds. V.K. Varadan, V.V. Varadan. N.Y.: Pergamon Press, 1980. 693 p.
4. S c h e l k u n o f f S . A . Electromagnetic waves. N.Y.: D. von Nostrand, 1943. 930 p.
5. B a r b e r P . W . , Y e h C . // Appl. Opt. 1975. V. 14. P. 2864–2872.
6. W a n g D . S . , B a r b e r P . W . // Appl. Opt. 1979. V. 18. P. 1190–1198.
7. W a n g D . S . , C h e n H . C . H . , B a r b e r P . W . , W y a t t P . J . // Appl. Opt. 1979. V. 18. P. 2672–2679.
8. P e t e r s o n B . O . , S t r ö m S . // Phys. Rev. D. 1975. V. 10. P. 2670–2684.
9. С т р э т т о н Ж . А . Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.
10. T s a n g L . , K o n g J . A . , S h i n R . T . // Radio Sci. 1984. V. 19. P. 629–642.
11. Г е л ь ф а н д И . М . , М и н л о с Р . А . , Ш а п и р о З . Я . Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения. М.: ГИТТЛ, 1958. 368 с.
12. M i s h c h e n k o M . I . // J. Opt. Soc. Amer. A. 1990. V. 8. P. 871–882.
13. В а р ш а л о в и ч Д . А . , М о с к а л е в А . Н . , Х е р с о н с к и й В . К . Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
14. K u š č e r I . , R i b a r i č M . // Opt. Acta. 1959. V. 6. P. 42–51.
15. Р о з е н б е р г Г . В . // Успехи физических наук. 1955. Т. 56. С. 77–110.
16. Д о л г и н о в А . З . , Г н е д и н Ю . Н . , С и л а н т ь е в Н . А . Распространение и поляризация излучения в космической среде. М.: Наука, 1979. 424 с.
17. H o v e n i e r J . W . , v a n d e r M e e C . V . M . // Astron. Astrophys. 1983. V. 128. P. 1–16.
18. P a r a m o n o v L . E . // J. Opt. Soc. Amer. A. 1994. V. 11. N 4. P. 1360–1369.
19. M i s h c h e n k o M . I . // Astrophys. J. 1991. V. 367. P. 561–573.
20. M i s h c h e n k o M . I . // Astrophys. Space Sci. 1990. V. 164. P. 1–13.
21. П а р а м о н о в Л . Е . // Оптика и спектроскопия. 1994 (в печати).
22. W i s c o m b e W . J . , M u g n a i A . Single Scattering from nonspherical Chebyshev particles: a compendium of calculations. Greenbelt: NASA/GSFC, 1986 (NASA Refl. Pub. 1157).
23. S c h n e i d e r J . B . , P e d e n I . C .//IEEE Trans. Antennas Propag. 1988. V. 36. P. 1317–1321.
24. П а р а м о н о в Л . Е . Рассеяние и поглощение света сфероидальными частицами – моделями клеток: Дис. канд. физ.-мат. наук. Красноярск: Институт биофизики СО РАН, 1989. 149 с.

Институт биофизики СО РАН,
Красноярск

Поступила в редакцию
9 сентября 1994 г.

L . E . P a r a m o n o v . **Extinction Matrix for Ensemble of Arbitrarily Shaped Particles with Arbitrary Distribution Function upon Orientation.**

The **T**-matrix approach is used to develop a rigorous analytical method to compute the extinction matrix for ensemble of arbitrarily shaped particles with arbitrary square integrable function of distribution upon orientation.