

В.А. Банах

## Моделирование изображения подсвечиваемого лазером рассеивающего слоя в турбулентной атмосфере

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 31.01.2007 г.

Представлены алгоритмы компьютерного моделирования изображения подсвечиваемого лазером рассеивающего слоя в турбулентной атмосфере. Приведены примеры использования этих алгоритмов при обосновании возможностей применения методов спекл-фотографии для визуализации областей повышенной турбулентности в атмосфере.

При разработке методов визуализации областей повышенной турбулентности в атмосфере [1, 2], основанных на принципе спекл-фотографии [3], возникает потребность детального анализа возможностей и точности этих методов при различных атмосферных условиях. Такой анализ невозможен без использования современных компьютерных технологий. Однако непосредственное моделирование распространения лазерного излучения на трассах с отражением в турбулентной атмосфере с построением изображения подсвечиваемой лазером области рассеивающей поверхности требует столь больших объемов оперативной памяти и временных затрат, что становится невозможным при использовании обычных персональных компьютеров.

В данной статье формулируется задача построения изображения пятна подсвета рассеивающего атмосферного слоя и описываются возможные пути численного решения этой задачи в некоторых частных случаях.

Рассмотрим следующую оптическую схему (рис. 1).

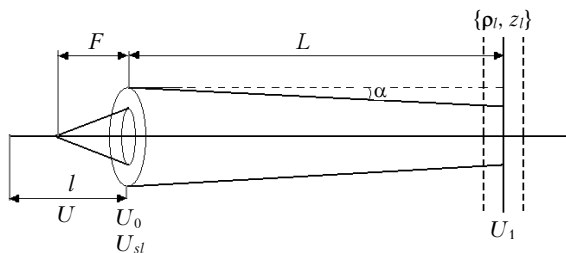


Рис. 1. Схема распространения лазерного излучения

Лазерный импульс с начальным распределением  $U_0(0, \rho', t)$ , прошедший расстояние  $L$  в атмосфере, рассеивается на атмосферном слое, и рассеянное излучение принимается телескопом, в приемной плоскости которого устанавливается матрица фотоприемников. Комплексная амплитуда падающего на рассеивающую частицу поля записывается в виде

$$U_1(z_l, \rho_l, t) = K^{1/2}(z_l) \frac{ke^{ikz_l}}{2\pi iz_l} \int d^2 \rho' U_0\left(\rho', t - \frac{z_l}{c}\right) \times \exp\left\{\psi(\rho', \rho_l) + i \frac{k}{2z_l}(\rho_l - \rho')^2\right\}, \quad (1)$$

где  $z_l$  — продольная координата рассеивающей частицы;  $\rho_l$  — радиус-вектор, определяющий ее положение в поперечной плоскости;  $c$  — скорость света;  $t$  — время;  $\psi = \chi + iS$ ,  $\chi$  — флуктуации амплитуды и  $S$  — флуктуации фазы парциальной сферической волны, распространяющейся из плоскости  $(0, \rho')$  в точку  $(z_l, \rho_l)$ ;  $K(z_l)$  — функция ослабления;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число;  $i$  — мнимая единица.

Комплексная амплитуда поля, рассеянного частицей, в плоскости  $z = 0$  записывается в виде

$$U_{sl}(0, \rho'', t) = \frac{\alpha_l e^{ikz_l}}{z_l} K^{1/2}(z_l) U_1\left(z_l, \rho_l; t - \frac{z_l}{c}\right) \times \exp\left\{\psi(\rho_l, \rho'') + i \frac{k}{2z_l}(\rho'' - \rho_l)^2\right\}, \quad (2)$$

где  $\alpha_l$  — амплитуда рассеяния частицы;  $\psi(\rho_l, \rho'')$  — случайный набег комплексной фазы сферической волны, распространяющейся в обратном направлении от рассеивающей частицы к телескопу.

Суммарное поле в плоскости  $(0, \rho'')$  находится в результате суммирования правой части уравнения (2) по всем рассеивающим частицам  $N_s$  в слое

$$U_s = \sum_{l=1}^{N_s} U_{sl}.$$

Для тонкого рассеивающего слоя  $|z_l - L| \ll L$  мы можем принять в (2)  $t = 2L/c$ ,  $z_l \approx L$ , оставив зависимость от  $z_l$  лишь в быстро осциллирующем множителе  $e^{ikz_l}$ .

Наконец, для поля в приемной плоскости телескопа  $(l, \rho)$  получаем

$$U(l, \rho, t) = \frac{k}{2\pi i l} \exp\left\{ ikl + ik \frac{\rho^2}{2l} \right\} \times \int d\rho'' T(\rho'') U_s\left(0, \rho'', \frac{2L}{c}\right) \left\{ -i \frac{k}{l} \rho \rho'' + ik \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{F} \right) \rho''^2 \right\}, \quad (3)$$

где  $T(\rho'')$  – амплитудный коэффициент пропускания приемной апертуры;  $F$  – фокусное расстояние телескопа. Из формулы (3) следует, что интенсивность принятого излучения в плоскости  $(l, \rho)$

$$I(l, \rho, t) = |U(l, \rho, t)|^2 \quad (4)$$

определяется выражением

$$I(l, \rho, t) = \left( \frac{k}{2\pi i l} \right)^2 \left| \int d\rho'' T(\rho'') U_s\left(0, \rho'', \frac{2L}{c}\right) \times \left\{ -i \frac{k}{l} \rho \rho'' + ik \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{F} \right) \rho''^2 \right\} \right|^2. \quad (5)$$

Введем функции Грина параболического уравнения для комплексной амплитуды поля в прямом и обратном направлениях применительно к геометрии распространения на рис. 1:

$$G(0, \rho'; L, \rho_l) = \frac{K^{1/2}(L) e^{ikz_l}}{2\pi i L} \times \exp\left\{ \psi(\rho', \rho_l) + i \frac{k}{2L} (\rho_l - \rho')^2 \right\}, \quad (6a)$$

$$G(L, \rho_l; 0, \rho'') = \frac{K^{1/2}(L) e^{ikz_l}}{2\pi i L} \times \exp\left\{ \psi(\rho_l, \rho'') + i \frac{k}{2L} (\rho'' - \rho_l)^2 \right\}. \quad (6b)$$

Воспользовавшись выражениями (6a), (6b), для поля  $U_s$  в уравнении (5) получаем

$$U_s\left(0, \rho'', \frac{2L}{c}\right) = \frac{2\pi i}{k} \sum_{l=1}^{N_s} \alpha_l G(L, \rho_l; 0, \rho'') \times \int d\rho' U_0\left(\rho', \frac{2}{c}(L - z_l)\right) G(0, \rho'; L, \rho_l) = \frac{2\pi i}{k} \sum_{l=1}^{N_s} \alpha_l G(L, \rho_l; 0, \rho'') U_1\left(L, \rho_l; \frac{2}{c}(L - z_l)\right), \quad (7)$$

что позволяет представить (5) в виде

$$I(l, \rho, t) = \frac{1}{l^2} \sum_{l=1}^{N_s} \sum_{l'=1}^{N_s} \alpha_l \alpha_{l'} \int d\rho_{1,2} T(\rho_1) T^*(\rho_2); G(L, \rho_l; 0, \rho_1) G^*(L, \rho_{l'}; 0, \rho_2) \times U_1\left(L, \rho_l; \frac{2}{c}(L - z_l)\right) U_1^*\left(L, \rho_{l'}; \frac{2}{c}(L - z_{l'})\right) \times \exp\left\{ -i \frac{k}{l} \rho (\rho_1 - \rho_2) + ik \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{F} \right) (\rho_1^2 - \rho_2^2) \right\}. \quad (8)$$

Согласно [4] для произвольного распределения вероятностей начального положения рассеивающих частиц в пространстве слагаемыми с  $l \neq l'$  в (8) можно пренебречь из-за быстро осциллирующих сомножителей  $e^{ikz_l}$  в функциях Грина (6), если масштаб изменения функции распределения вероятностей значительно превышает длину волны рассеянного поля. Масштабы турбулентных неоднородностей поля скоростей в атмосфере значительно превышают длину оптических волн, так что можно воспользоваться этим приближением и при суммировании в (8) ограничиться слагаемыми с  $l = l'$ . В результате получим

$$I(l, \rho, t) = \frac{1}{l^2} \sum_{l=1}^{N_s} |\alpha_l|^2 \int d\rho_{1,2} T(\rho_1) T^*(\rho_2) \times G(L, \rho_l; 0, \rho_1) G^*(L, \rho_l; 0, \rho_2) \times U_1\left(L, \rho_l; \frac{2}{c}(L - z_l)\right) U_1^*\left(L, \rho_l; \frac{2}{c}(L - z_l)\right) \times \exp\left\{ -i \frac{k}{l} \rho (\rho_1 - \rho_2) + ik \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{F} \right) (\rho_1^2 - \rho_2^2) \right\}. \quad (9)$$

Заменим суммирование в (9) интегрированием по рассеивающему объему

$$\sum_{l=1}^{N_s} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dz_l \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_l,$$

введем среднее сечение обратного рассеяния  $\langle |\alpha_l|^2 \rangle = \theta_s$  и концентрацию рассеивающих частиц  $\rho_s$ . Тогда для (9) будем иметь

$$I(l, \rho, t) = \frac{\rho_s \theta_s}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_l \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_l I_1\left(L, \rho_l; \frac{2}{c}(L - z_l)\right) \times \left| \int d\rho'' T(\rho'') G(L, \rho_l; 0, \rho'') \exp\left\{ -i \frac{k}{l} \rho \rho'' + ik \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{F} \right) \rho''^2 \right\} \right|^2, \quad (10)$$

где

$$I_1 = |U_1|^2;$$

$$U_1 = \int d\rho' U_0\left(\rho', \frac{2}{c}(L - z_l)\right) G(0, \rho'; L, \rho_l)$$

и функции Грина не содержат сомножители  $e^{ikz_l}$ .

Выполним интегрирование в (10) по продольной координате  $z_l$ , воспользовавшись для начального распределения поля гауссовской моделью

$$U_0(\rho', t) = \frac{P^{1/2}(t)}{\sqrt{\pi a}} \exp\left\{ -\frac{\rho'^2}{2a^2} - i \frac{k}{2f} \rho'^2 \right\}, \quad (11)$$

где

$$P(t) = \frac{U_p}{\sqrt{\pi \sigma}} e^{-t^2/\sigma^2}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho' |U_0(\rho', t)|^2 = U_p;$$

$\sigma$  определяет длительность импульса;  $a$  и  $f$  – соответственно начальные радиус пучка и радиус кривизны фазового фронта:

$$\frac{U_p}{\sqrt{\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_l \exp\left\{-\frac{4}{c^2} \frac{(L-z_l)^2}{\sigma^2}\right\} = \frac{U_p c}{2}. \quad (12)$$

В окончательной форме для распределения интенсивности в изображении подсвечиваемого лазером атмосферного слоя получаем

$$I(l, \rho, L, t) = \frac{\beta\pi U_p c}{l^2} \int d\rho_l I_1(L, \rho_l) I_t(L, \rho_l, \rho), \quad (13)$$

где

$$I_1(L, \rho_l) = \left| \int d\rho' \exp\left\{-\frac{\rho'^2}{2a^2}(1 + ik\alpha)\right\} G(0, \rho'; L, \rho_l) \right|^2, \quad (14)$$

$$I_t(L, \rho_l, \rho) = \left| \int d\rho'' T(\rho'') \times \exp\left\{-i\frac{k}{l}\rho\rho'' + ik\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{F}\right)\rho''^2\right\} G(0, \rho''; L, \rho_l) \right|^2; \quad (15)$$

через  $\beta\pi = \rho_s\theta$ , обозначен коэффициент обратного рассеяния и параметр  $\alpha = a/f$  задает начальную расходимость пучка. В (13), в соответствии с теоремой взаимности [5, 6], функция Грина для обратного распространения записана в виде, соответствующем распространению вперед.

Таким образом, из (13) следует, что интенсивность в изображении подсвечиваемого лазером атмосферного слоя полностью определяется интегралом от произведения распределений интенсивностей на слое освещающего лазерного пучка (14) и «пучка» с параметрами приемного телескопа, также распространяющегося в прямом направлении (15). Выражение (13) с точностью до численных коэффициентов справедливо не только для атмосферного рассеяния импульсного излучения, но и для непрерывного излучения, отраженного от «твердой» диффузной поверхности.

Формула (13) допускает обобщения. В случае неоднородности концентрации рассеивателей в слое выражение (13) принимает вид

$$I(l, \rho, L, t) = \frac{\theta_s U_p c}{l^2} \int d\rho_l \rho_s(\rho_l) I_1(L, \rho_l) I_t(L, \rho_l, \rho), \quad (16)$$

где функция  $\rho_s(\rho_l)$  в общем случае может быть случайной. Учесть неполную пространственную когерентность источника можно, воспользовавшись вместо (11) для начального распределения поля следующей моделью:

$$U_0(\rho', t) = \frac{P^{1/2}(t)}{\sqrt{\pi a}} \exp\left\{-\frac{\rho'^2}{2a^2} - i\frac{k}{2f}\rho'^2\right\} \exp\{iS_s(\rho')\} = U_{0s}(\rho', t) \exp\{iS_s(\rho')\}, \quad (17)$$

где случайная фаза  $S_s(\rho')$  определяется корреляционной функцией

$$\psi_s(\rho') = \langle S_s(\rho'_1) S_s(\rho'_2 + \rho') \rangle = \sigma_s^2 K_s(\rho') \quad (18)$$

с дисперсией  $\sigma_s$  и коэффициентом пространственной корреляции  $K_s(\rho')$ .

Для модели (17) функция пространственной когерентности поля лазерного источника записывается в виде [7]:

$$\Gamma_0(\rho') = \langle U_0(\rho'_1, t) U_0^*(\rho'_2, t) \rangle = U_{0s}(\rho'_1, t) U_{0s}^*(\rho'_2, t) \exp\left\{\sigma_s^2 [K_s^2(\rho') - 1]\right\}. \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что при малых флуктуациях фазы  $\sigma_s^2 \ll 1$  радиус пространственной когерентности источника  $a_k \sim l_s$  сравним с масштабом корреляции фазы  $l_s \sim |K_s'|^{-1/2}$ , а при больших фазовых флуктуациях  $\sigma_s^2 \gg 1$  радиус когерентности поля определяется отношением  $a_k \sim l_s/\sigma_s$ .

Наконец, для рассеивающих частиц, изменяющих со временем свое положение в пространстве, выражение (13), записанное для момента  $t + \Delta t$ , будет иметь вид

$$I(l, \rho, L, t + \Delta t) = \frac{\beta\pi U_p c}{l^2} \frac{1}{2} \times \int d\rho_l I_1[L, \rho_l(\Delta t)] I_t[L, \rho_l(\Delta t), \rho], \quad (20)$$

где  $\rho_l(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \mathbf{V}[\tilde{\rho}_l(\tau); \mathbf{V}(\rho_l)]$  – вектор скорости перемещения рассеивающих частиц в слое перпендикулярно направлению распространения освещающего пучка. Вектор скорости  $\mathbf{V}(\rho_l)$  может иметь сложную функциональную зависимость от координаты  $\rho_l$  и быть случайным.

Алгоритм расчета распределения интенсивности по формуле (13) следующий: моделируется распространение двух пучков в прямом направлении до рассеивающего слоя, например методом расщепления по физическим факторам [8], рассчитываются их интенсивности, которые затем перемножаются, и результат перемножения интегрируется в общем случае с весовой функцией  $\rho_s(\rho_l)$ . Но такое прямое моделирование не всегда возможно из-за больших временных затрат. Задача моделирования существенно упрощается при  $l = F$ , если влиянием турбулентности можно пренебречь, как, например, в случае распространения на высотных трассах или в случае распространения вдоль вертикальных и наклонных трасс, когда искажающий слой прилежит к приемопередатчику и влияние турбулентности хорошо аппроксимируется приближением фазового экрана [9]. Тогда выражение (13) принимает вид интеграла свертки

$$I(F, \rho, L, t) \sim \int d\rho_l I_1(L, \rho_l) I_t(L, \rho_l - \rho) \quad (21)$$

и алгоритм моделирования изображения подсвечиваемого слоя сводится к расчету Фурье-образа интенсивности  $I$  в изображении как произведения Фурье-образов интенсивностей  $I_1$  и  $I_t$ :

$$\tilde{I}(F, \kappa, L, t) \sim \tilde{I}_1(L, \kappa) \tilde{I}_t(L, \kappa, \rho),$$

и вычислению обратного преобразования Фурье:

$$I(F_t, \rho) = \int d\kappa \tilde{I}_1(L, \kappa) \tilde{I}_t(L, \kappa, \rho) e^{i\kappa \rho}. \quad (22)$$

Применение алгоритма быстрого преобразования Фурье обеспечивает расчет интенсивности в изображении при вполне приемлемых временных затратах.

Другой алгоритм основан на приближении квадрата интенсивности освещающего пучка:

$$I(F, \rho, L, t) \approx \int d\rho_l I_1^2(L, \rho_l) I_t^0(L, \rho_l, \rho), \quad (23)$$

где  $I_t^0(L, \rho_l, \rho)$  – распределение интенсивности пучка с параметрами, определяемыми параметрами приемного телескопа в плоскости рассеивающего слоя, рассчитанное для однородной среды. В соответствии с (23) с помощью телескопического пучка осуществляется «сканирование» пятна засветки, при этом турбулентные искажения учитываются в предположении, что они являются одинаковыми для освещающего и телескопического пучков, что вполне справедливо при использовании приемного телескопа с узким полем зрения.

Оба алгоритма прошли тестирование в численных экспериментах [1, 2, 10, 11], в частности при анализе возможности визуализации вихревых областей повышенной турбулентности в следах самолетов и измерения скорости ветра методом спекл-фотографии [1, 2, 10]. На рис. 2 представлены результаты компьютерного моделирования визуализации вихрей, возникающих в атмосфере за самолетом [2]. Рис. 2, *a* показывает распределение интенсивности в изображении рассеивающего слоя, рассчитанное для оптической схемы (см. рис. 1) по алгоритму (23) в момент времени  $t$  [формула (13)], рис. 2, *б* – распространение интенсивности для той же геометрии и такой же турбулентности в момент времени  $t + \Delta t$  [формула (20)]. Изменение положения рассеивающих частиц в слое  $\rho_l(\Delta t)$  моделировалось в соответствии с моделью для тангенциальной скорости в следовых самолетных вихрях [12]. В изображении отчетливо видны вихревые структуры, возникающие вследствие переноса рассеивающих частиц и турбулентных неоднородностей на трассе распространения полей скоростей самолетных вихрей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-05-64445, 06-05-96951-р-офи), Корпоративного исследовательского центра Европейского оборонного авиакосмического концерна (EADS) (контракт с Институтом оптики атмосферы СО РАН) и Президиума СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 63).

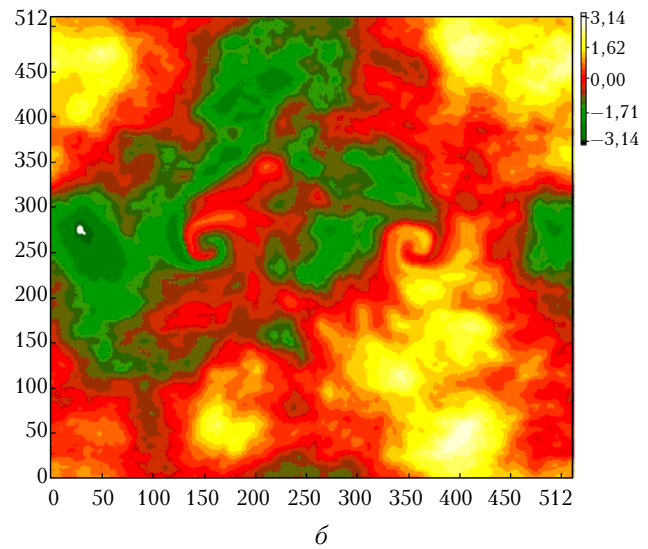
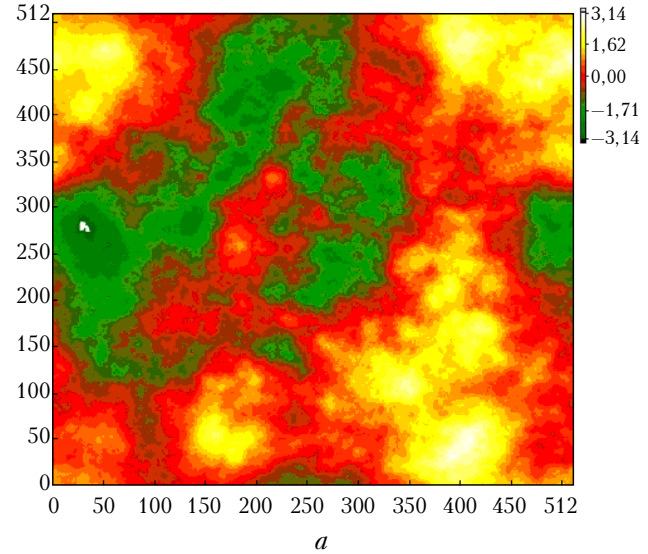


Рис. 2. Визуализация следовых самолетных вихрей:  $L = 1$  км;  $C_n^2 = 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$ ,  $\alpha = 30''$ ; эффективный диаметр апертуры телескопа 0,2 м

1. Halldorsson T., Langmeier A., Prucklmeier A., Banakh V.A., Falits A.V. Particle and speckle imaging velocimetry applied to a monostatic LIDAR // Proc. SPIE. 2006. V. 6522. 8 p.
2. Banakh V., Falits A., Halldorsson T. Simulation of retrieval of wind velocity and vortex observation in a turbulent atmosphere by speckle photography // Lidar Technologies, Techniques, and Measurements for Atmospheric Remote Sensing II: Abstracts. Stockholm, September, 2006. P. 100.
3. Fomin N.A. Speckle Photography for Fluid Mechanics Measurements. Springer-Verlag, 1998. 290 p.
4. Crosignani B., Porto P. Di, Bertolotti M. Statistical Properties of Scattered Light. New York; San Francisco; London: Academic Press, 1975. 206 p.
5. Гельфган В.И. Отражение в рассеивающей среде // Акуст. ж. 1976. Т. 22. Вып. 1. С. 123–124.
6. Banakh V.A., Mironov V.L. Lidar in a Turbulent Atmosphere. Boston & London: Artech House, 1987. 185 p.
7. Рытов С.М., Крайцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978. 463 с.

8. *Кандидов В.П.* Метод Монте-Карло в нелинейной статистической оптике // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 12. С. 1309–1338.
9. *Банах В.А., Смалихо И.Н.* Распространение лазерных пучков на вертикальных и наклонных протяженных трассах через турбулентную атмосферу // Оптика атмосф. и океана. 1993. Т. 6. № 4. С. 377–385.
10. *Banakh V.A., Falits A.V., Halldorsson T.* Simulation of retrieval of wind velocity in a turbulent atmosphere by speckle photography // Proc. 13-th Coherent Laser Radar Conf. 2005. P. 19–22.
11. *Banakh V.A., Rytchkov D.S., Falits A.V.* Computer simulation of a partially coherent laser beam backscattering in atmosphere // Proc. SPIE. 2005. V. 6160. P. 61600Q-1–61600Q-7.
12. *Lamb H.* Hydrodynamics. 6th ed. New York: Dover, 1932. P. 592 [Chapter 11].

***V.A. Banakh. Modeling of image of laser-illuminated scattering layer in a turbulent atmosphere.***

Algorithms for simulation of image of laser illuminated atmospheric scattering layer are discussed. The examples of application of these algorithms to developing the speckle photography lidar concept for visualization of high intensity turbulence areas in the atmosphere are listed as well.