«Оптика атмосферы и океана», **9**, N 3 (1996)

УДК 535.36+535.375

О.И. Алдошина, А.В. Фабриков

РАДИАЛЬНО-ЧАСТОТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ПОЛОГО ПРОЖЕКТОРНОГО ЛУЧА, ФОРМИРУЕМОГО АКСИКОНОМ

Выведено уравнение для поля в поперечном сечении полого прожекторного луча, формируемого аксиконом с лазерным источником на входе. Уравнение имеет вид интеграла Фурье, преобразующего функцию радиальной координаты на входе аксикона в функцию радиальной частоты на его выходе в зоне Фраунгофера. Вычисления с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье делают возможным оперативное слежение за формой прожекторного луча на произвольном расстоянии от источника по данным измерений, выполненных в ближней зоне. Для частных случаев однородной плоской волны и гауссова пучка на входе интеграл вычисляется в явном виде и решение может быть представлено вырожденными гипергеометрическими функциями Куммера.

Под радиально-частотным представлением аксиально симметричной функции $\psi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, будем понимать ее представление односторонним Фурье-преобразованием от какой-либо другой аксиально симметричной функции $\varphi(r')$, $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, с частотной переменной Δ, зависящей от r:

$$\psi(r) = \int_0^\infty \varphi(r') \exp(i\,\Delta\, r')\, dr' , \quad \Delta = \Delta(r) . \tag{1}$$

Это представление оказывается очень удобным при описании полого прожекторного луча, формируемого в дальней зоне системой из лазера и аксикона (или рефлаксикона) – линейного пространственного модулятора фазы когерентного оптического излучения [1–3].

Если на расположенный в плоскости $z = z'$ аксикон падает волна когерентного оптического излучения с комплексной амплитудой $\varphi_0(r')$, $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, то на выходе аксикона волна будет описываться выражением

$$\varphi(r') = \varphi_0(r') \exp(i\,\omega_0\, r') , \tag{2}$$

где $\exp(i\,\omega_0\, r')$ – функция пропускания аксикона; ω_0 – параметр, связанный с длиной волны излучения λ и углом отклонения лучей аксиконом β соотношением

$$\omega_0 = k\beta , \quad k = 2\pi/\lambda . \tag{3}$$

В случае конического аксикона с углом при основании α ($\alpha \ll 1$), изготовленного из диэлектрического материала с показателем преломления n, угол отклонения β равен $(n - 1)\alpha$. Для рефлаксикона с углом α между внутренней и наружной отражающими поверхностями $\beta = 2\alpha$. Поле $\psi(r)$ в параксиальном фраунгоферовом приближении скалярной теории дифракции Кирхгофа определяется преобразованием Фурье–Бесселя от $\varphi(r')$:

$$\psi(r) = \frac{k}{z} \int_0^\infty \varphi(r')\, J_0(\omega\, r')\, r'\, dr' , \tag{4}$$

где $J_0(\boldsymbol{.})$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка [4]. При наличии в системе собирающей линзы с фокусным расстоянием f тем же уравнением при $z = f$ описывается распределение комплексной амплитуды ψ в фокальной плоскости линзы.

Решение в замкнутой форме было получено в приближении большого параметра $x = \omega_0 a$, где $2a$ – поперечный размер прошедшего через аксикон пучка излучения (значения этой величины в реальных условиях близки к 10^3) для случаев плоской волны и гауссова пучка на входе аксикона [5–7]. В первом случае $\varphi_0(r') = \mathrm{circ}(r'/a)$ – круговая функция и

$$\psi(r) = \exp(-2\,i\,x)\sqrt{\frac{i\,4\,a^3}{9\,\lambda\,z\,r_0}}\;{}_1F_1(3/2,\,5/2;\,-i\,2\,\rho)\,, \tag{5}$$

$$r_0 = \beta z\,, \quad \rho = ka(r - r_0)/2z\,;$$

через ${}_1F_1$ обозначена вырожденная гипергеометрическая функция Куммера. Получаемая из (5) формула для интенсивности излучения $I(r) = |\psi(r)|^2$ может быть аппроксимирована выражением [8]

$$I(r) \approx \frac{a^3}{2\,\lambda\,z\,r_0}\left|\frac{\sin\rho}{\rho}\right|^2. \tag{5$'$}$$

Во втором случае $\varphi_0(r') = \exp(-r'^2/a^2)$ и

$$\psi(r) = B\left[\,{}_1F_1(3/4,\,1/2;\,-\mathrm{r}^2) - 2\,i\,\rho\,\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}\,{}_1F_1(5/4,\,3/2;\,-\rho^2)\right], \tag{6}$$

$$B = \frac{\Gamma(3/4)}{2}\sqrt{\frac{a^3}{i\,\lambda\,z\,r_0}}\,,$$

$\Gamma(\boldsymbol{.})$ – гамма-функция. Интенсивность $I(r)$ аппроксимируется выражением

$$I(r) = 0{,}24\,\pi\,\frac{a^3}{2\,\lambda\,z\,r_0}\exp[-2(\rho/1{,}65)^2]\,. \tag{7}$$

Радиус средней линии кольца засветки r_0 и ширина кольца δ (на уровне e^{-2} по интенсивности от максимального значения) в поперечной к пучку плоскости на расстоянии z от аксикона определяются выражениями

$$r = z\beta\,, \quad \delta = 3{,}3\,\frac{\lambda z}{\pi a} \approx \frac{\lambda z}{a}\,. \tag{7$'$}$$

В общем случае получить из (4) простые аналитические выражения для $\psi(r)$ и $I(r)$ не удается. Но можно в том же приближении по параметру $\omega_0 a$ привести уравнение (4) к удобному для численных оценок виду (1). Воспользуемся для этого асимптотическим разложением функции $J_0(y)$ [9, с. 185]:

$$J_0(y) = \sqrt{2/(\pi y)}\;\{\cos(y - \pi/4) + O(|\,y|^{-1})\}\,.$$

В нашем случае $y = \omega\,r' = \omega\,a(r'/a)$, где $\omega\,a$ – величина порядка 10^3, и остаточным членом можно пренебречь при выполнении неравенства $(r'/a) \gtrsim 10^{-2}$. В начальном участке области интегрирования $0 \le r' < 10^{-2}\,a$ указанное неравенство не выполняется, но это не существенно из-за наличия в подынтегральном выражении множителя r'. Подставляя в (4) асимптотическое представление $J_0(y)$ и опуская остаточный член $O(|\,\omega\,r'|^{\,2})$, с учетом (2) получаем

$$\psi(r) = 2C\int_0^\infty \varphi(r')\cos(\omega\,r' - \pi/4)\,d\,r' = C\int_0^\infty \varphi_0(r')\,\{\exp[i\,(\omega\,r' - \pi/4)] + \exp[-i\,(\omega_0\,r' - \pi/4)]\}\,\exp(i\,\omega_0\,r')\,d\,r'\,,$$

$$C = \sqrt{2\pi/(\lambda^2 z^2\,\omega)}\,.$$

Слагаемое с быстроосциллирующим множителем $\exp[i(\omega_0 + \omega)r']$ дает при интегрировании величину, мало отличающуюся от нуля. Отбрасывая его, приходим к уравнению вида (1)

$$\psi(r) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}_0(r') \exp(i\,\Delta\, r')\, dr' \,, \tag{8}$$

где

$$\tilde{\varphi}_0(r') = C\, \varphi_0(r') \sqrt{r'} \,,$$

$$\Delta = \omega_0 - \omega = \frac{2\pi}{\lambda z}(r_0 - r) \,, \tag{9}$$

$$C \approx \sqrt{2\pi/(\lambda^2 z^2 \omega_0)} = 1/\sqrt{\lambda\, z\, r_0} \,.$$

Мы опустили здесь несущественный для рассмотрения фазовый множитель $\exp(i\pi/4)$ и приняли $\omega \approx \omega_0$. Последнее оправдано тем, что функция $\psi(r)$ имеет максимум при $r = r_0$ и резко спадает по величине при удалении r от r_0. Физически это означает, что поле прошедшей через аксикон волны в зоне Фраунгофера концентрируется в узком слое (толщиной δ) вокруг конической поверхности с углом раствора $r_0/z \approx \beta$. Именно это свойство аксикона используется в схеме лазерного маяка с прожекторным лучом в форме полого цилиндра с кольцевым распределением энергии излучения во всех поперечных сечениях [1].

Преобразуемая по уравнениям (4) или (8) волна обычно является плоской, но не всегда однородной. Зависимость $\varphi_0(r')$ может быть достаточно сложной, особенно в случае рефлаксикона, и может меняться со временем. Использование в расчетах уравнения (8) делает возможным непрерывное слежение за формой пучка $I(r) = |\,\psi(r)|^2$ в дальней зоне по данным измерения $I_0(r')$ в непосредственной близости от аксикона. Вычисление функции $\psi(r)$ по выборочным значениям функции $\tilde{\varphi}_0(r') = C\,\sqrt{r'\, I\,(r')}$ проводится с помощью дискретного линейного фильтра, реализующего алгоритм быстрого преобразования Фурье. Текст соответствующей программы на Паскале приведен в приложении.

Уравнения (5) и (6) были получены путем аппроксимации бесконечных рядов, представляющих правую часть (4), для плоской волны и гауссова пучка соответственно. Их можно рассматривать как приближенные решения «точного» уравнения (4). Но они являются также точными решениями приближенного уравнения (8). В этом можно убедиться, воспользовавшись формулами интегрального представления вырожденных гипергеометрических функций и функций параболического цилиндра. Так, из формулы [9, (13.2.1)]

$$\frac{\Gamma(b-a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\; {}_1F_1(a, b; z) = \int_0^1 \exp(z\,t)\, t^{a-1}\, (1-t)^{b-a-1}\, dt$$

при $z = i\rho$, $a = 3/2$ и $b = 5/2$ с точностью до несущественных фазовых множителей следует (5), а формула [10, (7.341)]

$$D_p(z) = \frac{\exp(-z^2/4)}{\Gamma(-p)} \int_0^\infty \exp(-z\,x - x^2/2)\, x^{-p-1}\, dx$$

с учетом связи между функциями параболического цилиндра и функциями Куммера [10, (7.340)]

$$D_p(z) = 2^{p/2} \exp(-z^2/4) \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma[(1-p)/2]}\; {}_1F_1(-p/2,\, 1/2;\, z^2/2) - \frac{\sqrt{2\pi}\, z}{\Gamma(-p/2)}\; {}_1F_1[(1-p)/2,\, 3/2;\, z^2/2] \right\}$$

при $z = i\Delta a$ и $p = -3/2$ приводит к (6).

Расчеты по уравнению (8), таким образом, для плоской волны и для гауссова пучка обеспечивают тот же порядок приближения, что и расчеты по уравнениям (5) и (6), выводимым из (4). Его преимуществом по сравнению с (4) является удобство численных расчетов для функций $\varphi_0(r')$ произвольного вида. При быстрых временных вариациях $\varphi_0(r)$, отслеживаемых с помощью измерителя формы пучка, вычисления $\psi(r)$ по уравнению (8) можно выполнять в реальном времени.

Программа расчета дискретного линейного фильтра, реализующего алгоритм быстрого преобразования Фурье

```
Program IIi;
Type Real Array=Array[0...31] of Real;
Function Ibitr (j,nu:Integer):Integer;
Var i, j1,j2,k: Integer;
Begin
                j1:=j;
                k:=0;
                For i:=1 to nu do
Begin
                j2:=j1 Div 2;
                k:=k*2+(j1–2*j2);
                j1:=j2
        End;
        Ibitr:=k
End; {ibitr}
Procedure FFT(Var XReal,XImag: RealArray; N,nu:Integer);
Var N2,Nu1,i,l,k,m: Integer;
TReal, TImag,p,arg,c,s: Real;
Label LBL;
Begin
N2:=N DIV 2;
NU1:=NU–1;
K:=0;
FOR L:=1 TO NU DO
BEGIN
        LBL:
                FOR I:=1 TO N2 DO
                BEGIN
                        M:=K DIV ROUND(EXP(NU1 * LN(2)));
                        P:=IBITR(M,NU);
                        ARG:=6.283185*P/N;
                        C:=COS(ARG);
                        S:=SIN(ARG);
                        TREAL:=XREAL[K+N2]*C+XIMAG[K+N2]*S;
                        TIMAG:=XIMAG[K+N2]*C–XREAL[K+N2]*S;
                        XREAL[K+N2]:=XREAL[K]–TREAL;
                        XIMAG[K+N2]:=XIMAG[K]–TIMAG;
                        XREAL[K]:=XREAL[K]+TREAL;
                        XIMAG[K]:=XIMAG[K]+TIMAG;
                END;
                K:=K+N2;
                IF K<N THEN GO TO LBL;
                K:=0;
                NU1:=NU1–1;
                N2:=N2 DIV 2
END;
FOR K:=0 TO N–1 DO
BEGIN I:=IBITR(K,NU);
                IF I>K THEN
                BEGIN;
                        TREAL:=XREAL[K];
                        TIMAG:=XIMAG[K];
```

```
                    XREAL[K]:=XREAL[I];
                    XIMAG[K]:=TIMAG[I];
                    XREAL[I]:=TREAL;
                    XIMAGE[I]:=TIMAG;
END  END  END; {FFT}
BEGIN FFT(  ); END.
```


1. Алдошина О.И., Фабриков А.В. О возможности построения лазерного маяка с прожекторным лучом в виде полого цилиндра // Применение лазеров в науке, технике и медицине: Тез. докл. научн.-тех. шк.-семин. Челябинск, 1993. С. 41–43.
2. McLeod J.N. The Axicon: A New Type of Optical Element // J. Opt.Soc.Am. 1954. V. 44. N 8. P. 593–597.
3. Edmonds W.R. The reflaxicon, a new reflective optical element, and some applications // Appl.Opt. 1973. V. 12. N 8. P. 1940–1945.
4. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
5. Belanger P.-A., Rioux M. Diffraction ring pattern at the focal plane of a spherical lens-axicon doublet // Can. J. Phys. 1976. V. 54. P. 1774–1780.
6. Belanger P.-A., Rioux M. Ring pattern of a lens-axicon doublet illuminated by a Gaussian beam // Appl.Opt. 1978. V. 17. N 7. P. 1080–1086.
7. Смоктий О.И., Фабриков А.В. Моделирование дифракционного поля в системе «аксикон–линза» при засветке гауссовым пучком // Проблемы обработки информации и интегральной автоматизации производства: Сб.научн.тр. ЛИИА АН СССР. Л.: Наука, 1990. С. 186–191.
8. Смоктий О.И., Фабриков А.В. Моделирование дифракционного поля в фокальной плоскости оптической системы «линза–аксикон» // Изв. вузов. Физика. 1987. N 12. С. 36–41.
9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М; Л.: ГИТТЛ, 1951. 464 с.

Научный центр оптико-физических измерений,
г. Москва

Поступила в редакцию
14 июня 1995 г.

O.I. Aldoshina, A.V. Fabrikov. **Radially-Frequency Representation of Field in the Cross-section of a Searchlight Tubular Beam Formed by Reflaxicon.**

The equation is derived for the field in the cross-section of a searchlight tubular beam formed by the axicon with laser source at the input. The equation in the form of Fourier integral transforms the radial coordinate function at the axicon input into the radial frequency function at its output inside the Fraunhofer zone. The calculations made with the use of fast Fourier algorithm permit the real time control over the searchlight beam form at the arbitrary distance from the source on evidence derived in the near zone. In the special case of homogeneous plane wave and the Gaussian beam at the output, the integral can be calculated explicitly, and the solution may be represented as the degenerate hypergeometric Kummer functions.