

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ. ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 535.33:34

С.Д. Творогов, Л.И. Несмелова, О.Б. Родимова

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРОПУСКАНИЯ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

Обсуждается представление функции пропускания рядами экспонент, использующее идею замены сильно зависящей от частоты функции, описывающей коэффициент поглощения, достаточно гладкой функцией частоты. На основе этого представления получены простые аппроксимации функции пропускания для неоднородных сред перекрывающихся спектров. Адекватность полученных соотношений иллюстрируется расчетами функции пропускания в спектральных интервалах 6600 – 7700 и 2200 – 2400 см⁻¹ и их сравнением с экспериментальными данными.

Метод, именуемый *k*-распределением (или «ряды экспонент»), – такой трюк, когда в выражении для функции пропускания $F(z)$ (в интервале $\Delta\omega = \omega'' - \omega'$ частоты ω и для осажденного слоя поглощающего газа z) очень изменчивый по частоте коэффициент поглощения $\kappa(\omega)$ заменяется монотонной функцией $s(g)$ (пример сопоставления $\kappa(\omega)$ и $s(g)$ дан на рис. 1), но так, что равенство

$$F(z) \equiv \frac{1}{\Delta\omega} \int e^{-z \kappa(\omega)} d\omega = \int_0^1 e^{-z s(g)} dg \tag{1}$$

совершенно точное. Затем, уже во втором равенстве (1), применяется соответствующая квадратурная формула (с абсциссами g_n и ординатами a_n), собственно, и знаменующая появление ряда экспонент

$$F(z) = \sum_n a_n e^{-z s(g_n)} \tag{2}$$

с небольшим, естественно, числом слагаемых.

Хорошо известна [1] полезность приема с рядом (2) при расчете интегральных по спектру характеристик в аэрозольно-молекулярной среде. Ныне такая идея активно привлекается [2–16] для решения традиционных проблем атмосферной спектроскопии (F для неоднородной среды перекрывающихся спектров, расчет функции источника). Но пока это лишь одно из применяемых здесь средств, и причем отнюдь не самое эффективное. Скорее всего, потенциальные возможности и преимущества метода далеко не исчерпаны, но их надобно доказывать и утверждать. Для этого необходима некая математическая и методическая основа. Далее представлены некоторые соображения по этому достаточно общему вопросу и конкретные их иллюстрации.

Предварительно отметим, что способ реализации (1) – преобразование Лапласа и перечень обычно используемых исходных соотношений известен:

$$F(z) = \int_0^\infty f(s) e^{-sz} ds, \quad f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} dz e^{sz} F(z), \quad h > 0; \tag{3}$$

$$g(s) = \int_0^s f(s) ds, \quad g(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} dz \frac{F(z)}{z} e^{sz}, \tag{4}$$

где $s(g)$ – функция, обратная (4).

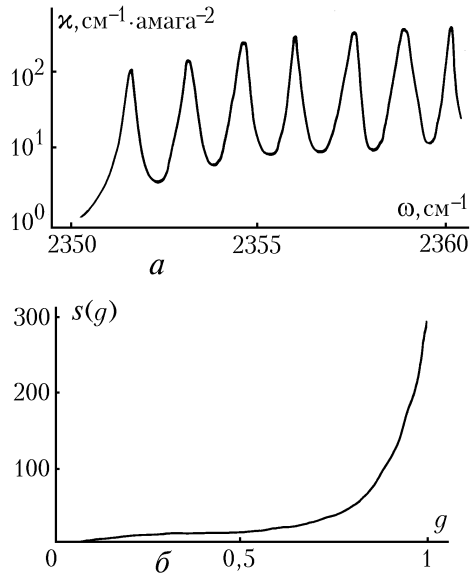


Рис. 1. Коэффициент поглощения $\text{CO}_2 - \text{N}_2$ в спектральном интервале $2350 - 2360 \text{ см}^{-1}$, $T = 300 \text{ К}$ (а); функция $s(g)$, обратная $g(s)$, для того же спектрального интервала (б)

Первое методическое обстоятельство инициировано [17–19], где ряды вида (2) – ряды Дирихле по принятой в математике терминологии – исследованы на математическом уровне строгости. По существу, это создает тот «математический климат», который позволяет избежать царящих в [2–16] рассуждений на «физическом уровне строгости» с весьма многословными и порой апеллирующими к чисто интуитивным соображениям фразами.

Подробный пример на обсуждаемую тему есть в [20], и связан он с вычислением $s(g)$ и $g(s)$ непосредственно через $\kappa(\omega)$, т.е. фактически по банкам спектроскопической информации. Понятно, что ответ должен получаться подстановкой первого равенства (1) в (3) или (4) с последующей перестановкой интегрирований по ω и z . Но, как выясняется, математически операция эта возможна лишь для (4), и приводит она к весьма простой вычислительной процедуре

$$g(s) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\kappa(\omega) \leq s, \omega \in [\omega', \omega'']} d\omega. \quad (5)$$

Следствие этого факта весьма примечательно. Конечно, первое выражение в (3) тоже можно написать через квадратурную формулу

$$F(z) = \sum_n b_n e^{-s_n z} \quad (6)$$

с абсциссами s_n и ординатами b_n . Но при формальной эквивалентности (2) и (6) предпочтение надо отдать первой формуле по причине, уже приведенной в предыдущем абзаце. Ситуация эта вполне классифицируется как некая математическая самосогласованность, ибо, «с другой стороны», a_n и g_n в (2) – «просто числа». Но в (6) ординаты b_n зависят, разумеется, от характеристик среды из-за их явной связи с f .

Последнее имеет определяющее значение при обосновании приближенных приемов для решения проблем атмосферной спектроскопии. Имеется в виду тот факт, что в (2) параметры среды входят лишь в $g(s)$ через (5).

Анализ показывает, что для неоднородной среды

$$F \equiv \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} \exp \left[- \int_{(l)} \kappa(\omega, l) dl \right] d\omega = \sum_n a_n \exp \left[- \int_{(l)} s(g_n, l) dl \right] d\omega \equiv \sum_n a_n \exp \left[- \sum_j s(g_n, l_j) \Delta l_j \right]. \quad (7)$$

В (7) фигурирует криволинейный интеграл $\int dl(\dots)$ по траектории луча, и, помимо ω , κ – функция тоже среды l ; в последней (7) $\int dl(\dots)$ представлен интегральной суммой. Пример, иллюстрирующий точность (7), приведен в табл. 1.

Таблица 1

Расчет пропускания для неоднородных сред, H_2O , 6622–7092 cm^{-1} . $F_{\text{ibl}} = 0,262$, $F_{\text{expon}} = 0,260$

| Номер слоя | F , К | P , атм | $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$, г/м^3 | $s_n(l)$ | n | | | | |
|------------|---------|-----------|--|------------|-------|-------|--------|-----------|-------|
| | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | | a_n | | | | |
| | | | | | 0,118 | 0,239 | 0,284 | 0,232 | 0,118 |
| 1 | 291 | 0,962 | 9,33 | $s_n(l_1)$ | 0,028 | 0,214 | 0,770 | 3,184 | 23,83 |
| 2 | 289 | 0,913 | 7,95 | $s_n(l_2)$ | 0,022 | 0,175 | 0,631 | 2,611 | 20,14 |
| 3 | 287 | 0,863 | 6,77 | $s_n(l_3)$ | 0,017 | 0,141 | 0,514 | 2,140 | 17,04 |
| 4 | 281 | 0,768 | 4,96 | $s_n(l_4)$ | 0,011 | 0,092 | 0,339 | 1,435 | 12,15 |
| 5 | 269 | 0,592 | 2,09 | $s_n(l_5)$ | 0,009 | 0,031 | 0,114 | 0,503 | 4,76 |
| | | | $a_n \exp(-\sum_i s_n(l_i))$ | | 0,108 | 0,124 | 0,0264 | 10^{-5} | – |

Аналогичные оценки (и тоже с непрменной апелляцией к (2)) утверждают вполне удовлетворительную возможность аппроксимации

$$F \equiv \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} e^{-\kappa_1 z_1 - \kappa_2 z_2} d\omega = \sum_n a_n e^{-s_1(g_n)z_1 - s_2(g_n)z_2} \quad (8)$$

для функции пропускания в случае перекрывающихся спектров. Через κ_1 и κ_2 обозначены коэффициенты поглощения входящих в смесь газов, z_1 и z_2 – их осажденные слои, и s_1 , s_2 построены по (5) отдельно для каждого газа. Эффективность (8) видна из табл. 2.

Таблица 2

Расчет пропускания в перекрывающихся спектрах, $\text{H}_2\text{O}+\text{CO}_2$, 6622–7092 cm^{-1} , $T = 296$ К.
 $P = 1$ атм, $P_{\text{CO}_2} = 3 \cdot 10^{-4}$ атм, $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-2}$ г/м³

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | l , км | F_{expon} | F_{ibl} | $F_{\text{expon}}/F_{\text{ibl}}$ |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|--------------------|------------------|-----------------------------------|
| a_n | 0,118 | 0,239 | 0,284 | 0,239 | 0,118 | 1 | 0,995 | 0,993 | 1,002 |
| $s_n^{(1)}$ | $3,24 \cdot 10^{-5}$ | $2,39 \cdot 10^{-4}$ | $8,55 \cdot 10^{-4}$ | $3,54 \cdot 10^{-3}$ | $2,60 \cdot 10^{-2}$ | 10 | 0,952 | 0,938 | 1,014 |
| $s_n^{(2)}$ | – | 0 | $1,05 \cdot 10^{-5}$ | $3,17 \cdot 10^{-4}$ | $1,07 \cdot 10^{-2}$ | 100 | 0,779 | 0,773 | 1,06 |
| | | | | | | 1000 | 0,428 | 0,371 | 1,15 |

Табл. 3 позволяет оценить число слагаемых в (2), когда формулы Гаусса и Чебышева используются как квадратурные. Добавим, что при непосредственном счете F по (1) и схеме line-by-line необходимы ~ 60 тысяч точек.

Таблица 3

Точность расчетов пропускания с помощью рядов экспонент. $\text{CO}_2+\text{H}_2\text{O}$, 7092–7634 cm^{-1} ,
 $T = 296$ К, $P = 1$ атм, $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10$, $P_{\text{CO}_2} = 3 \cdot 10^{-4}$ атм

| l , км | 0,004 | 0,05 | 0,5 | 1 | 5 |
|-----------------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
| F_{ibl} | 0,918 | 0,680 | 0,370 | 0,298 | 0,167 |
| F_{Gaus5} | 0,921 | 0,682 | 0,373 | 0,309 | 0,171 |
| F_{Gaus6} | 0,917 | 0,680 | 0,364 | 0,289 | 0,170 |
| F_{Gaus7} | 0,916 | 0,678 | 0,373 | 0,302 | 0,160 |
| F_{Ch6} | 0,926 | 0,682 | 0,374 | 0,296 | 0,147 |
| F_{Ch7} | 0,924 | 0,683 | 0,372 | 0,300 | 0,159 |
| F_{Ch9} | 0,920 | 0,682 | 0,370 | 0,303 | 0,172 |
| $F_{\text{Gaus5}}/F_{\text{ibl}}$ | 1,003 | 1,004 | 1,009 | 1,037 | 1,026 |
| $F_{\text{Gaus6}}/F_{\text{ibl}}$ | 0,9987 | 0,9999 | 0,985 | 0,970 | 1,020 |
| $F_{\text{Gaus7}}/F_{\text{ibl}}$ | 0,9975 | 0,9981 | 1,008 | 1,013 | 0,961 |
| $F_{\text{Ch6}}/F_{\text{ibl}}$ | 1,009 | 1,003 | 1,012 | 0,994 | 0,882 |
| $F_{\text{Ch7}}/F_{\text{ibl}}$ | 1,007 | 1,004 | 1,007 | 1,005 | 0,950 |
| $F_{\text{Ch9}}/F_{\text{ibl}}$ | 1,002 | 1,003 | 1,002 | 1,017 | 1,031 |

Другое методическое обстоятельство – наше убеждение, что при создании «радиационных блоков» климатических моделей и алгоритмов для геофизических приложений надежность предлагаемых приемов должна контролироваться сопоставлением соответствующих оценок с экспериментальными цифрами. На рис. 2 и 3 даны примеры, касающиеся наших расчетов.

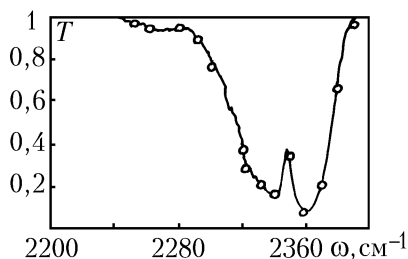


Рис. 2. Функция пропускания для спектрального интервала 2200 – 2400 см^{-1} . Кривая – эксперимент [22], точки – расчет с помощью рядов экспонент, совпадающий в масштабах рисунка с расчетом line-by-line; $T = 291 \text{ К}$, $P = 6,21 \cdot 10^4 \text{ Па}$, $P_{\text{CO}_2} = 0,0230$

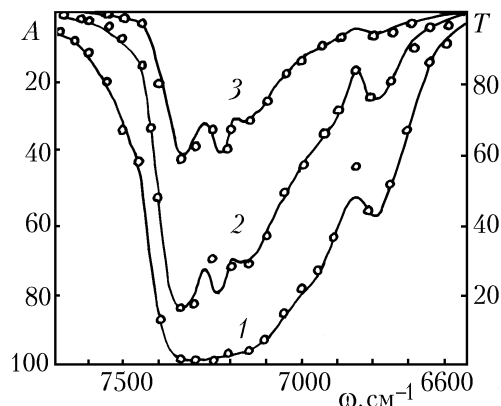


Рис. 3. Спектр пропускания H_2O в области полосы 1,4 мкм. Кривые – эксперимент [23], точки – расчет с помощью рядов экспонент; u – осажденный слой. $1 - u = 0,845 \text{ г/см}^2$, $2 - u = 0,135 \text{ г/см}^2$, $3 - u = 0,018 \text{ г/см}^2$, $P = 1 \text{ атм}$

Такая позиция приносит здесь неожиданные дивиденды – некую возможность судить о периферии контура по его резонансной части. Дело просто в том, что при вычислениях по (5) величину $g(s)$, несомненно, определяют участки, соответствующие центру линии, а крылья линий, с их экспоненциальным спадом [21], можно игнорировать. Поэтому счет ведется с дисперсионным контуром, обрываемым на том расстоянии от центральной части, где начинается периферия. И граница эта, как выясняется во время сопоставления экспериментальных и расчетных данных, смещается при изменении температуры.

1. Van de Hulst H.C., Irvin W.M. // Meteor. Soc. Roy. Sci. Liege. 1963. Ser. 5, 7. N 1. P. 78.
2. Goody R., West R., Chen L., Grisp D. // JQSR. 1989. V. 42. P. 539.
3. Lacis A.A., Oinas V. // J. Geophys. Res. 1991. V. 96D. P. 9027.
4. Yamamoto G., Tanaka M., Asano S. // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27. P. 282.
5. Lacis A.A., Hansen J.E. // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. P. 118.
6. Arking A., Grossman K. // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. P. 937.
7. Liou K.N., Sasamori T. // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32. P. 2166.
8. Ming Dah Chou, Arking A. // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. P. 798.
9. Isaacs R.G., Wang W.-C., Worsham R.D., Goldenberg S. // Appl. Optics. 1987. V. 26. P. 1272.
10. Wang W.-C., Guang-Yu Shi // JQSR. 1988. V. 39. P. 387.
11. Xun Zhu // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46. P. 511.
12. Phillips W.J. // JQSR. 1990. V. 43. P. 13.
13. Si-Chee Tsay, Stamnes K., Jaywecre K. // JQSR. 1990. V. 43. P. 133.
14. Hollweg H.-D. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98D. P. 2747.
15. Xun Zhu // JQSR. 1991. V. 45. P. 33; 1992. V. 47. P. 159.
16. Riviere Ph., Soufiani A., Taine J. // JQSR. 1992. V. 48. P. 187.
17. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 534 с.
18. Леонтьев А. Ф. Последовательность полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980. 384 с.
19. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1980. 172 с.
20. Творогов С. Д. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 3. С. 315.
21. Несмелова Л. И., Родимова О. Б., Творогов С. Д. Контур спектральной линии и межмолекулярное взаимодействие. Новосибирск.: Наука, 1986. 215 с.
22. Levi Di Leon R., Taine J. // JQSR. 1986. V. 35. P. 337.
23. Yamanouchi T., Tanaka M. // JQSR. 1985. V. 34. P. 463.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
27 июля 1995 г.

S.D. Tvorogov, L.I. Nesmelova, O.B. Rodimova. **Representation of the Transmission Function by a Series of Exponents.**

The representation of the transmission function by series of exponents is discussed, based on the idea of replacing the very changeable frequency-dependent absorption coefficient by a sufficiently smooth function of frequency. Making use this representation the simple approximations of the transmission function are derived for the nonhomogeneous media and for overlapping spectra. The adequacy of the relations obtained is illustrated by calculations of the transmission function in spectral regions $6600\text{--}7700\text{ cm}^{-1}$ and $2200\text{--}2400\text{ cm}^{-1}$ and by their comparison with experimental data.